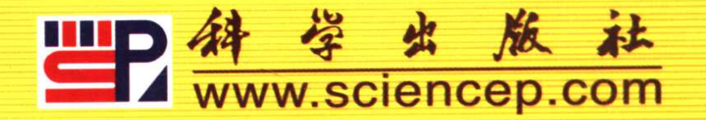


现代数学基础丛书 110

鞅与Banach空间几何学

刘培德 著



内 容 简 介

本书是关于取值于 Banach 空间的鞅与 Banach 空间几何理论的专著. 全书分为 8 章. 在介绍了向量测度与积分、条件期望的基础知识以后,一方面叙述鞅与鞅型序列的极限定理, 独立增量鞅的大数定律、中心极限定理、重对数律、鞅不等式与鞅空间、鞅变换等问题; 另一方面研究 Banach 空间的几何性质, 包括 RN 性质、型和余型、一致凸与一致光滑性、无条件鞅差序列性质、复空间的几何性质等. 在整个叙述中, 随机过程的概率性质、函数空间的分析性质与值空间的几何性质是有机结合在一起的, 所得结果在现代概率与现代分析的多种领域里都具有重要意义.

本书内容属于概率论、调和分析与泛函分析的交叉学科领域, 因此可作为相关专业的研究生、本科生与数学工作者的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

鞅与 Banach 空间几何学/刘培德 著. —北京: 科学出版社, 2007
(现代数学基础丛书; 110)
ISBN 978-7-03-019028-4
I. 鞅… II. 刘… III. ①鞅-研究 ②空间几何-研究 IV. O211.6 O18
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 076539 号

责任编辑: 范庆奎 潘继敏 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007 年 6 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2007 年 6 月第一次印刷 印张: 28 1/2
印数: 1—3 000 字数: 543 000

定价: 62.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

《现代数学基础丛书》编委会

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨 乐

2003年8月

前　言

鞅与 Banach 空间几何学是自 20 世纪六七十年代以来, Banach 空间理论、鞅论与调和分析相互交叉渗透形成的新的学科分支, 本书将介绍这一分支的基本思想方法和主要成果.

概率论与抽象空间的结合可以追溯到现代概率论确立的早期. Kolmogorov 1935 年就曾研究过取值于 Banach 空间的随机变量的特征泛函, Mouvier 1953 年研究过 Banach 空间值随机序列的大数定律. 然而自 20 世纪六七十年代以来的研究把随机变量的概率性质、解析函数或调和函数的分析性质与 Banach 空间的几何性质有机地结合起来, 将研究推进到一个高潮.

鞅与 Banach 空间几何理论的结合是有其内在原因的. 比如 1966 年 Rieffel 定义了 Banach 空间中凸集的一个几何概念 —— 可凹性, 后来证明可凹性原来与空间的 Radon-Nikodym (RN) 性质等价, 证明这一结论的工具就是鞅, 它显示了 B 值鞅理论不同于实值鞅的独立的价值. 之后 B 值随机过程的概率性质与 Banach 空间的几何性质之间相互依存、相互制约的关系成为人们关注的一个中心. 国际上一些著名的概率学家与分析学家率先开展研究并且取得了系统的成果, 它们在概率与分析两方面都有重要价值. 举例来说, Pisier 用鞅方法重新证明了 Enflo 的超自反空间具有等价一致凸范数定理; Edgar 证明了凸集的 RN 性质等价于 Choquet 端点表现性质; Hoffmann-Jørgensen 与 Pisier 证明了独立增量鞅满足大数定律与值空间的 p 型等价; Burkholder 证明了 ξ 凸性等价于鞅变换算子的有界性; Burkholder, Bourgain 还证明了在向量值函数空间上 Hilbert 变换的有界性与值空间的无条件鞅差序列性质等价; 这都是一些突出的事例. 值得注意的是这些定理或者直接以鞅为研究对象, 或者以鞅为工具. 鞅方法在这一理论的发展中成为系统的和卓有成效的研究方法.

Banach 空间几何学中鞅论与调和分析的联系是本书内容的又一个重要方面. Doob 等从 20 世纪 40 年代以来的研究工作无疑是随机过程与调和分析理论结合的典范, 正是这一结合产生了富有特色的分支——鞅空间理论. 近几十年来这一理论得到迅速发展并且已经有了系统的总结, 可参见 Dellacherie 与 Mayer, Garsia 或 Long 的专著. 之后人们把无穷维空间的几何结构引入这一领域, 发展了 B 值鞅的相应理论. Pisier 关于一致凸空间的鞅不等式, Burkholder 关于 B 值鞅变换的工作都是这方面的范例. 事实证明, 其中的不等式与空间上算子的属性都与值空间的几何性质密切相关. 近年来关于 B 值鞅空间的理论受到广泛关注, 有关结论表明, 它不仅扩宽了经典鞅论的内容, 解释了某些在经典范围内无法解释的现象, 还派生出

了 “Banach 空间的概率论”、“Banach 空间的局部理论”、“向量值调和分析” 等新的研究领域和研究课题. 20 世纪 80 年代中期前苏联数学家 Bukhvalov 与 Danilevich 在考察向量值解析函数的边界性质时又发现了复空间与实空间不同的几何结构, 由此引发了对于复空间几何学的研究, 一些特殊类型的鞅在其中起到了关键作用.

上述事实还说明与多种学科的广泛联系是这一分支的重要特色. 概率论中的随机过程理论、极限理论、随机分析理论, Banach 空间的算子理论、几何理论, 调和分析中的函数空间理论、加权理论与内插空间理论、奇异积分算子理论等都与之有程度不同的联系. 可以说多种学科发展的需要促进了这一分支的发展.

本书内容分为 8 章. 第 1 章为预备知识, 介绍向量值函数的积分和条件期望; 第 2 章是关于 B 值鞅的收敛性与空间的 RN 性质的关系; 第 3 章讲解凸集的几何理论, 主要是可凹性, 端点与暴露点的表现定理, 以及共轭空间中类似的结果; 第 4 章是 Banach 空间的型和余型, 独立增量序列的极限理论及其在绝对可和算子、局部理论方面的应用; 第 5 章是超自反空间的几何学, 介绍 Enflo-Pisier 的等价赋范定理和 p 光滑空间中鞅的大数定律; 第 6 章系统介绍 B 值鞅的不等式与鞅空间, 其中有关 p 均方算子的不等式把 Banach 空间的几何性质与鞅空间理论有机联系在一起; 第 7 章介绍 UMD 空间与 B 值鞅变换理论及其在奇异积分算子、调和分析理论中的应用; 第 8 章叙述关于复空间的几何学, 包括 ARN 性质、复凸性、AUMD 性质及其鞅特征. 最后作为附录, 介绍了关于随机变量的独立性与条件独立性的知识.

本书假定读者具有概率论和泛函分析方面的初步知识. 书中尽量给出定理的详细证明, 但有时仍不得不把某些定理只作必要的介绍或者不加证明地拿来使用 (指明了参考文献), 这样做也是为了尽可能减少篇幅. 书末列出了丰富的参考文献, 提供给希望进一步了解或研究有关问题的读者.

本书部分内容曾于 1993 年出版过一次, 此次再版做了较大的改动与调整, 主要是简化了某些内容, 吸取了近年来该领域新的研究成果, 增加了一章讲述复空间的几何学, 并且尽可能地改正了文字上的错漏. 注意到该领域不断发展的状况, 这样做是必要的.

最后, 我想借此机会表达对王梓坤院士、胡迪鹤教授和许全华教授 (法国) 由衷的感谢, 在我从事有关课题的研究中和本书出版过程中他们都给予了无私的帮助和有力的支持! 还要感谢阳名珠、吴从炘、马吉溥、定光桂、步尚全、程立新、钟怀杰、郭铁信等教授给予的许多关心和支持! 此外, 本书曾长期作为研究生教材使用, 一些博士和硕士在听课过程中曾提出宝贵意见, 特别是侯友良、吐尔德别克、魏文展、于林、左红亮等为改进本书内容作出了努力, 这里谨致谢忱!

在此我还想对已故的李国平院士、陈希孺院士和龙瑞麟研究员表示深切的缅怀. 李先生直至耄耋之年都在关注着本项研究工作; 陈先生生前曾任我院名誉院

长，他极力推荐了本书的再版；龙先生 (曾任中国科学院数学研究所所长) 邀我与之合作使我受益良多, 可惜英年早逝于任上.

本书所涉及的内容曾长期作为国家基金委自然科学基金研究课题, 此次出版又得到国家科学技术学术著作出版基金的资助, 这里一并表示谢忱!

由于学识所限, 书中难免会有错漏与不妥之处, 诚望读者批评指正.

著 者

2006 年 3 月

目　录

第 1 章　向量测度与积分

本书所叙述的内容与向量测度和积分有着紧密的联系, 因此系统地了解关于向量测度和向量值函数积分的知识是必要的. 实际上两者在理论上和应用上都有它们各自独立的意义.

作为本书的预备知识, 我们将首先介绍向量测度的基本性质, 然后转入向量值函数的可测性与 Bochner 积分, 同时引入向量测度的 Radon-Nikodym 导数. 最后讨论向量值函数的条件期望及有关属性.

1.1 向量测度

设 Ω 是一个集合, 由 Ω 的某些子集构成的集族 Σ 称为一个代数. 若:

(i) $\varnothing, \Omega \in \Sigma$;

(ii) 当 $A \in \Sigma$ 时, 余集 $A^c = \Omega \backslash A \in \Sigma$;

(iii) 当 $A, B \in \Sigma$ 时, $A \cup B \in \Sigma$.

称 Σ 是 σ 代数. 若此外 $A_n \in \Sigma$ 时, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$. 设 Γ 是 Ω 的子集族, 包含 Γ 的最小 σ 代数称为由 Γ 生成的 σ 代数, 记为 $\sigma(\Gamma)$. 特别地, 在度量空间或一般拓扑空间中, 由全体开集生成的 σ 代数称为 Borel σ 代数. Borel σ 代数中的每个集合称为 Borel 集.

定义 1　设 X 是 Banach 空间, Σ 是一个代数, $F: \Sigma \to X$ 是一个映射.

(i) 称 F 是向量测度, 若 $\forall A, B \in \Sigma$, $A \cap B = \varnothing$, 则

$$F(A \cup B) = F(A) + F(B). \tag{1.1}$$

(ii) 称 F 是可数可加的, 若 $\forall A_n \in \Sigma$, $A_n \cap A_m = \varnothing$ $(m \neq n)$ 并且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ 时,

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(A_n), \tag{1.2}$$

其中级数以 X 中的范数收敛.

(iii) 若 $E \in \Sigma$, 称

$$\|F\|(E) = \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|F(A)\| \tag{1.3}$$

是 F 在 E 上的变差, 其中 $\pi = \{A_1, \cdots, A_n\}$ 是 E 的分划, 即 $A_i \in \Sigma, A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j), \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = E$, 称 $\|F\|(\Omega)$ 是 F 在 Ω 上的全变差. 若 $\|F\|(\Omega) < \infty$, 称 F 是有界变差的.

例 1　设 Σ 是 $[0,1]$ 中全体 Borel集构成的 σ 代数, μ 是 Σ 上非负的有限测度, $\mu(\Omega) < \infty$. $T : L_1[0,1] \to X$ 是线性算子. 定义 $F : \Sigma \to X, F(A) = T(\chi_A)$, 则 F 是 (X 值) 向量测度. 容易验证, 若 T 是有界的, 则 F 是可数可加的有界变差测度.

定理 1　设 Σ 是 σ 代数, 则 Σ 上的每个有界变差向量测度 F 是可数可加的. 此时 $\|F\| : \Sigma \to R$ 也是 (实值) 可数可加测度.

证明　设 $A_n \in \Sigma$ 互不相交, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$, 由定义

$$\sum_{n=1}^{k} \|F(A_n)\| \leqslant \|F\| \left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n \right) \leqslant \|F\|(\Omega) < \infty,$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|F(A_n)\|$ 是收敛的. 于是

$$\left\| F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) - F\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n \right) \right\| \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \|F(A_n)\| \to 0, \quad k \to \infty,$$

所以 (1.2) 成立, F 是可数可加的.

设 $A, B \in \Sigma, A \cap B = \varnothing$, 若 π 是 $A \cup B$ 的分划, 则 $\pi \cap A$ 是 A 的分划, $\pi \cap B$ 是 B 的分划, 于是

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \pi} \|F(E)\| &= \sum_{E \in \pi} \|F(E \cap (A \cup B))\| \\ &\leqslant \sum_{E \in \pi} \|F(E \cap A)\| + \sum_{E \in \pi} \|F(E \cap B)\| \\ &\leqslant \|F\|(A) + \|F\|(B). \end{aligned}$$

反过来, A 的每个分划 π_1 和 B 的每个分划 π_2 并起来是 $A \cup B$ 的分划 π, 所以

$$\sum_{E \in \pi_1} \|F(E)\| + \sum_{E \in \pi_2} \|F(E)\| = \sum_{E \in \pi} \|F(E)\| \leqslant \|F\|(A \cup B).$$

由此知道

$$\|F\|(A) + \|F\|(B) \leqslant \|F\|(A \cup B).$$

这说明 $\|F\| : \Sigma \to R$ 是可加的, 至于其可数可加性的证明与上面关于 F 的证明类似.

设 Σ 是 Ω 上的 σ 代数, 若 μ 是 Σ 上的非负有限测度, 则称 (Ω, Σ, μ) 是测度空间. 特别地, 若 $\mu(\Omega)=1$, 称 (Ω, Σ, μ) 是概率空间, μ 是概率测度. 注意可以将 Σ 视为一个度量空间. 实际上, 若定义

$$d(A,B)=\mu(A\Delta B), \quad \forall A,B\in\Sigma,$$

这里 $A\Delta B$ 是 A 与 B 的对称差, 并且将 $\mu(A\Delta B)=0$ 的集合 A,B 视为同一元, 记如此的集合类为 $\tilde{\Sigma}$, 其中的元素记为 $\tilde{A}$, 我们有

引理 1 $(\tilde{\Sigma}, d)$ 是完备度量空间.

证明 记 χ_A, χ_B 是 A,B 的特征函数(A,B 分别取自于 $\tilde{A}$, $\tilde{B}$), 则

$$d(\tilde{A},\tilde{B})=\int_\Omega |\chi_A-\chi_B|\mathrm{d}\mu \tag{1.4}$$

是 $\tilde{\Sigma}$ 上的度量. 容易知道, 若 $\tilde{A}_n$ 是其中的 Cauchy 序列, 则 χ_{A_n} 是 L_1 中的 Cauchy 序列. 由 L_1 的完备性, χ_{A_n} 有子序列 a.e. 收敛于一个函数 ξ, $\xi=0$ 或 1, 不计 0 测度集, ξ 是某个集合 A 的特征函数. 于是

$$d(\tilde{A}_n,\tilde{A})=\int_\Omega |\chi_{A_n}-\chi_A|\mathrm{d}\mu\to 0. \tag{1.5}$$

定义 2 设 X 是 Banach 空间, (Ω, Σ, μ) 是测度空间, F: $\Sigma\to X$ 是向量测度, 称 F 关于 μ 是绝对连续的, 记为 $F\ll\mu$. 若

$$\lim_{\mu(E)\to 0}\|F(E)\|=0, \tag{1.6}$$

称向量测度族 $F_\lambda:\Sigma\to X(\lambda\in\Lambda)$ 关于 μ 等度绝对连续, 若

$$\lim_{\mu(E)\to 0}\sup_{\lambda\in\Lambda}\|F_\lambda(E)\|=0. \tag{1.7}$$

定理 2(Vitali-Hahn-Saks) 设 $F_n:\Sigma\to X$ 是向量测度序列并且 $\forall E\in\Sigma$, $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(E)$ 存在. 若 $F_n\ll\mu$, 则 F_n 关于 μ 等度绝对连续.

证明 考虑引理 1 中提到的空间 $\tilde{\Sigma}$, $\forall\varepsilon>0$, 记

$$\Sigma_{mn}=\{A\in\tilde{\Sigma}:\|F_m(A)-F_n(A)\|\leqslant\varepsilon\}, \quad \Sigma_p=\bigcap_{m,n\geqslant p}\Sigma_{mn}.$$

易知 Σ_{mn},Σ_p 都是闭集并且 $\forall E\in\Sigma$, 对于充分大的 p, $E\in\Sigma_p$. 换句话说 $\tilde{\Sigma}=\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}\Sigma_p$.

$\tilde{\Sigma}$ 是完备的, 由 Baire 性质, 存在 p_0 使得 Σ_{p_0} 在 $\tilde{\Sigma}$ 中包含内点, 即存在 A_0 和 $r>0$ 使得每个 $E\in\tilde{\Sigma}$, 只要 $d(E,A_0)<r$, 就有 $E\in\Sigma_{p_0}$, 即

$$\|F_m(A)-F_n(A)\|\leqslant\varepsilon, \quad m,n\geqslant p_0.$$

对于 $F_1,\cdots,F_{p_0}$, 存在 $\delta>0$ 使得 $\mu(B)<\delta$ 时, $\|F_n(B)\|<\varepsilon(1\leqslant n\leqslant p_0)$.

现在 $\forall E\in\tilde{\Sigma}$, 若 $\mu(E)<\min\{\delta,r\}$, 则 $E=(A_0\cup E)\backslash(A_0\backslash E)$, 显然

$$(A_0\cup E)\Delta A_0\subset E,\quad (A_0\backslash E)\Delta A_0\subset E,$$

从而

$$d(A_0\cup E,A_0)\leqslant\mu(E),\quad d(A_0\backslash E,A_0)\leqslant\mu(E),$$

于是当 $n\geqslant p_0$ 时,

$$\begin{aligned}\|F_n(E)\|&\leqslant\|F_n(A_0\cup E)\|+\|F_n(A_0\backslash E)\|\\&\leqslant\|F_{p_0}(A_0\cup E)\|+\|F_{p_0}(A_0\backslash E)\|\\&\quad+\|F_n(A_0\cup E)-F_{p_0}(A_0\cup E)\|\\&\quad+\|F_n(A_0\backslash E)-F_{p_0}(A_0\backslash E)\|\\&\leqslant 4\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{\mu(E)\to 0}\sup\limits_{n\in N}\|F_n(E)\|=0$.

推论 1　在定理 2 的条件下, 若 $F(E)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(E),\forall E\in\Sigma$, 则 $F\ll\mu,F$ 是可数可加的.

证明　由等度连续性, $F\ll\mu$. 有限可加性是容易得到的, 若 A_n 互不相交, 则

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)-\sum_{n=1}^{k}F(A_n)=F\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty}A_n\right).$$

由于 $\mu\left(\bigcup\limits_{n=k+1}^{\infty}A_n\right)\to 0$ 时, $\left\|F\left(\bigcup\limits_{n=k+1}^{\infty}A_n\right)\right\|\to 0$, 可数可加性成立.

定理 3(Pettis)　设 (Ω,Σ,μ) 是测度空间, $F:\Sigma\to X$ 是可数可加向量测度, 则 $F\ll\mu$, 当且仅当 $\forall E\in\Sigma,\mu(E)=0$ 时, $F(E)=0$.

证明　必要性显然, 现证充分性.

首先这对于实测度 (不必非负) 成立. 实际上, 若对于某个测度 ν 不成立, 则 $\exists\varepsilon_0>0,A_n\in\Sigma,\mu(A_n)<2^{-n}$, 但 $\|\nu\|(E)>\varepsilon_0$. 取 $E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$, 则

$$\mu(E)\leqslant\mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m\right)\leqslant\sum_{m=n}^{\infty}\mu(A_m)\leqslant 2^{-n+1}\to 0,$$

故 $\mu(E)=0$. 但

$$\|\nu\|(E)=\lim_{n\to\infty}\|\nu\|\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m\right)\geqslant\limsup\|\nu\|(A_n)\geqslant\varepsilon_0.$$

这与 $\nu \ll \mu$ 矛盾.

对于向量测度 $F:\Sigma \to X$, 考虑测度族 $\{x^*F : x^* \in X^*, \|x^*\| \leqslant 1\}$, 只需证明它的等度连续性. 若反设此事不成立, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0, x_n^* \in X^*$ 和 $A_n \in \Sigma$, 使得 $\|x_n^*\| \leqslant 1, \mu(A_n) < 2^{-n}$, 但 $|x_n^* F(A_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

设 Σ_0 是由 $\{A_n : n \geqslant 1\}$ 生成的 σ 代数, 易知 $\forall E \in \Sigma, n \geqslant 1$, $\mu(E) = 0$, 则 $x_n^* F(E) = 0$. 于是 $x_n^* F \ll \mu|_{\Sigma_0}, \mu|_{\Sigma_0}$ 是 μ 在 Σ_0 上的限制.

对于 A_1, 由 $|x_n^* F(A_1)| \leqslant \|F(A_1)\| < \infty$, 取子列 x_{1k}^* 使极限 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{1k}^* F(A_1)$ 存在; 对于 A_2, 由 $|x_{1k}^* F(A_2)| \leqslant \|F(A_2)\| < \infty$, 取 x_{1k}^* 的子列 x_{2k}^* 使 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}^* F(A_2)$ 存在 $\cdots\cdots$. 应用对角线方法得到 x_n^* 的子列 x_{kk}^*, 对于 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{kk}^* F(A_n)$ 存在, $\forall n \geqslant 1$. 由于 Σ_0 是由 $\{A_n : n \geqslant 1\}$ 生成的, 所以 $\forall E \in \Sigma$, 上述极限存在.

记 $X_0 = \overline{\operatorname{span}}\{F(E) : E \in \Sigma_0\}$, X_0 是可分闭子空间. Vitali-Hahn-Saks 定理保证了 $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} \sup\limits_{k\in N} |x_{kk}^* F(E)| = 0$, 这与 $|x_n^* F(A_n)| \geqslant \varepsilon_0$ 矛盾. 定理证毕.

推论 2 设 (Ω, Σ, μ) 是测度空间, $F:\Sigma \to X$ 是有界变差测度, 若 $F \ll \mu$, 则 $\|F\| \ll \mu$.

设 Γ 是代数, $\Sigma = \sigma(\Gamma)$, 称测度 $\overline{F}:\Sigma \to X$ 是 $F:\Gamma \to X$ 的延拓, 若 $\forall A \in \Gamma, \overline{F}(A) = F(A)$.

定理 4 设 Γ 是代数, $\Sigma = \sigma(\Gamma), F:\Gamma \to X$ 是向量测度, X^* 是 X 的共轭. 若 $\forall x^* \in X^*, x^*F$ 是可数可加的并且存在非负测度 $\mu:\Gamma \to [0,\infty)$ 使得 $F \ll \mu$, 则存在 F 的唯一可数可加延拓 $\overline{F}:\Sigma \to X$.

证明 由实测度的延拓定理, $\mu:\Gamma \to [0,\infty)$ 有唯一的到 Σ 的延拓, 记为 $\bar{\mu}$. 考虑引理 1 中定义的空间 $\bar{\Sigma}$, 由 $\Sigma = \sigma(\Gamma), \Gamma$ 在 Σ 中稠密并且 $\forall A, B \in \Gamma$, 有

$$F(A) - F(B) = F(A\backslash A \cap B) - F(B\backslash A \cap B).$$

由于 $A\backslash A \cap B, B\backslash A \cap B \subset A\Delta B$ 以及 $F \ll \mu$, $F:\Gamma \to X$ 在由 $\bar{\mu}$ 确定的度量 $\bar{\mu}(A\Delta B)$ 之下一定是一致连续的, 从而有唯一延拓 $\overline{F}:\Sigma \to X$. $\overline{F}$ 的有限可加性和 $\bar{\mu}$ 的连续性说明 $\overline{F}$ 是可数可加的. 证毕.

下面是向量测度的 Lebesgue 分解定理. 这里只引用而不予证明.

定理 5 设 $F:\Gamma \to X$ 是代数 Γ 上的可数可加向量测度, $\mu:\Gamma \to [0,\infty)$ 是可数可加非负测度, 则存在唯一分解 $F = F_c + F_s$, 即

$$F(E) = F_c(E) + F_s(E), \quad \forall E \in \Gamma,$$

其中 F_c, F_s 都是可数可加的并且 $F_c \ll \mu$, $x^*F_s \perp \mu, \forall x^* \in X^*$. 若 F 是有界变差的, 则 F_c, F_s 都是有界变差的并且 $\|F_s\| \perp \mu$, 此外

$$\|F\|(E) = \|F_c\|(E) + \|F_s\|(E), \quad \forall E \in \Gamma.$$

1.2 可测函数

设 (Ω, Σ, μ) 是测度空间, 称其中的 σ 代数 Σ 是完备的, 若当 $A \in \Sigma, \mu(A)=0$ 时, $\forall B \subset A, B \in \Sigma$. 我们知道任何 σ 代数都可以完备化成为完备 σ 代数.

定义 1　设 (Ω, Σ, μ) 是测度空间, X 是 Banach 空间, X^* 是 X 的共轭.

(1) 称 $f: \Omega \to X$ 是简单函数, 若 $f=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$, 这里 $x_i \in X, \{A_i\}$ 是 Ω 的一个分划;

(2) 称 f 强可测, 若存在简单函数序列 f_n, 使得 $f_n \to f$ a.e., 通常简称强可测函数为可测函数;

(3) 称 f 弱 w 可测, 若 $\forall x^* \in X^*, x^* f$ 可测;

(4) 称 f 具有几乎可分值, 若存在 0 测度集 Q, 使得 $f(\Omega \backslash Q)=\{f(\omega): \omega \in \Omega \backslash Q\}$ 在 X 中可分.

下面结论是容易证明的：

(i) 若 f, g 可测, $\alpha, \beta \in \Phi$, 则 $\alpha f+\beta g$ 可测;

(ii) 若 f 可测, g 是标量值可测函数, 则 $g f$ 可测;

(iii) 若 f 可测, $x_0 \in X$, 则 $\|f(\omega)-x_0\|$ 是实值可测函数;

(iv) 每个可测函数弱可测;

(v) 每个可测函数具有几乎可分值.

例如, 对于结论 (v) 可证明如下：

若 f 可测, 则有简单函数序列 f_n, 使得 $\|f_n(\omega)-f(\omega)\| \to 0$, a.e.. 设 Q 是不收敛的点集, $\mu(Q)=0$. 显然

$$f(\Omega \backslash Q) \subset \overline{\operatorname{span}}\{f_n(\omega): \omega \in \Omega \backslash Q, n \in N\}$$

是 X 的可分子空间.

定义 2　设 (Ω, Σ, μ) 是测度空间, f_n, f 是可测函数.

(1) 称 f_n 依测度收敛于 f, 若 $\forall \sigma>0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mu\{\omega:\|f_n(\omega)-f(\omega)\| \geqslant \sigma\}=0;$$

(2) 称 f_n 几乎处处 (a.e.) 收敛于 f, 若存在 $Q \in \Sigma, \mu(Q)=0$ 使得

$$\forall \omega \in \Omega \backslash Q, \quad \|f_n(\omega)-f(\omega)\| \to 0;$$

(3) 称 f_n 弱几乎处处 (w-a.e.) 收敛于 f, 若存在 $Q \in \Sigma, \mu(Q)=0$, 使得

$$\forall x^* \in X^*, \quad \omega \in \Omega \backslash Q, \quad x^* f_n(\omega) \to x^* f(\omega).$$

定理 1　(i) 若 $f_n \to f$ a.e., 则 f_n 依测度收敛于 f;

(ii) 若 f_n 依测度收敛于 f, 则存在子列 $f_{n_k} \to f$ a.e..

证明与实值情况类似.

定理 2 设 (Ω, Σ, μ) 是完备测度空间, X 是 Banach 空间, 则下面条件等价:

(i) $f: \Omega \to X$ 可测;

(ii) f 有几乎可分值并且对于 X 中每个开集 $O, f^{-1}(O) \in \Sigma$;

(iii) f 有几乎可分值并且对于 X 中每个 Borel 集 E, $f^{-1}(E) \in \Sigma$;

(iv) f 有几乎可分值并且 $\forall x \in X$, $\|f(\omega) - x\|$ 是实可测函数.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 设 f 可测, 若 $f = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$ 是简单函数, $x_i \in X, A_i \in \Sigma$, 则对于任一开集 $O \subset X$, $f^{-1}(O) = \bigcup\limits_{x_i \in O} A_i \in \Sigma$.

对于一般的可测函数 f, 取简单函数序列 $f_n \to f$ a.e., 则下面式子在至多相差一个 0 测度集的范围内成立:

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} f_m^{-1}(O). \tag{2.1}$$

Σ 是完备的, 故 $f^{-1}(O) \in \Sigma$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 由下面等式得到:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n). \tag{2.2}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv). 因为 $\forall x \in X, \|f(\omega) - x\|$ 是实函数, $S_r(x) = \{y : \|x - y\| \leqslant r\}$ 是 Borel 集, 故 $\{\omega : \|f(\omega) - x\| \leqslant r\} = f^{-1}(S_r(x)) \in \Sigma$, 这说明 $\|f(\omega) - x\|$ 是可测函数.

(iv) $\Rightarrow$ (i). f 有几乎可分值, 不妨设 $Q \in \Sigma$, $\mu(Q) = 0$, $f(\Omega \backslash Q)$ 可分. 设 $\{x_n\}$ 是在 $f(\Omega \backslash Q)$ 中稠密的, 由 (iv), $\|f(\omega) - x_n\|$ 可测.

$\forall k \in N$, 令 $E_n = \left\{\omega \in \Omega \backslash Q : \|f(\omega) - x_n\| < k^{-1}\right\}$, 则 $E_n \in \Sigma$. 定义

$$g_k(\omega) = \begin{cases} x_n, \ \omega \in E_n \backslash \bigcup\limits_{i<n} E_i, & n = 1, 2, \cdots, \\ 0, \quad 其他, \end{cases}$$

则 $\|g_k(\omega) - f(\omega)\| < k^{-1}$ a.e., $g_k(\omega)$ 取可数多个值, g_k 可以写成

$$g_k(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{k_i} \chi_{A_{k_i}}, \tag{2.3}$$

其中 $A_{k_i} \in \Sigma$, $A_{k_i} \cap A_{k_j} = \varnothing (i \neq j)$, 故 $\mu\left(\bigcup\limits_{i=m}^{\infty} A_{k_i}\right) \to 0$. 取 m_k 使得 $\mu\left(\bigcup\limits_{i=m_k+1}^{\infty} A_{k_i}\right) <$

k^{-1}, 令 $f_k(\omega)=\sum_{i=1}^{m_k} x_{k_i}\chi_{A_{k_i}}$, 则

$$\|f_k(\omega)-f(\omega)\|<k^{-1},\quad \omega\in\bigcup_{i=1}^{m_k}A_{k_i}. \tag{2.4}$$

至多相差一个 0 测度集. 从而简单函数序列 $f_k\to f$ a.e., f 可测.

注意, 若考虑取可数多个值的函数序列, 则上述最后的证明可以加强为除去一个 0 测度集之外一致收敛于 f. 实际上 g_k 即是这样的函数列. 于是我们有

定理 3　$f:\Omega\to X$ 是可测的当且仅当存在可数值可测函数列 f_n, 除去一个 0 测度集以外, f_n 一致收敛于f.

函数的可测性明显的是与 σ 代数 Σ 有关的, 所以有时以 $\sigma(f)$ 记使 f 可测的最小 σ 代数. 对于可测函数族 $\{f_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$, 以 $\sigma(f_\lambda:\lambda\in\Lambda)$ 记使每个 f_λ 都可测的最小 σ 代数. 此外, 对于可测和 w 可测的关系, 我们将看到值域的可分性是关键的.

例 1　设 (Ω,Σ,μ) 是 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度空间, $l_2[0,1]$ 是满足 $\sum_{t\in[0,1]}\xi_t^2<\infty$ 的函数 $\xi=(\xi_t)$ 的全体. Q 是 Ω 中的非可测集.

定义 $f:\Omega\to l_2[0,1], f(\omega)=(\xi_t(\omega)), 0\leqslant t\leqslant 1, \omega\in\Omega$, 其中当 $t\notin Q$ 或 $t\in Q$, $t\neq\omega$ 时, $\xi_t(\omega)=0$; 当 $t\in Q$ 并且 $t=\omega$ 时, $\xi_t(\omega)=1$. 对于每个 $0\leqslant t\leqslant 1, \xi_t(\omega)$ 是 Ω 上的可测函数. 对于每个 $x^*\in l_2[0,1]^*$, 由 Riesz 表现定理, 至多除去一点, $x^*f(t)=0$. x^*f 可测, 从而 f是w 可测的. 但

$$\|f(\omega)\|=(\sum_{t\in[0,1]}|\xi_t(\omega)|^2)^{1/2}=\begin{cases}0, & \omega\notin Q.\\ 1, & \omega\in Q.\end{cases}$$

它是 Q 的特征函数, 故不可测. 由定理 2(iv), f 不是 w 可测的.

定理 4(Pettis)　设 (Ω,Σ,μ) 是完备测度空间, 则 $f:\Omega\to X$ 可测, 当且仅当 fw 可测并且有几乎可分值.

证明　必要性是明显的, 现证充分性. 设 $f(\Omega\backslash Q)$ 是可分的, $\mu(Q)=0$. 若 $\{x_n\}$ 是 $f(\Omega\backslash Q)$ 的可数稠密集, 由 Hahn-Banach 定理, 取 $x_n^*\in X^*$, 使得 $\|x_n^*\|=1, x_n^*x_n=\|x_n\|$. 实际上有 $\|x_n\|=\sup_{m\geqslant 1}|x_m^*x_n|$, 并且

$$\|f(\omega)\|=\sup_m|x_m^*f(\omega)|,\quad \omega\in\Omega\backslash Q, \tag{2.5}$$

从而 $\|f(\omega)\|$ 是可测的. 类似讨论知 $\|f(\omega)-x\|\ (\forall x\in X)$ 可测. 定理 2(iv) 说明 f 是可测的.

推论 1　若 X 是可分 Banach 空间, 则可测与 w 可测等价.

定理 5 设 (Ω, Σ, μ) 是完备测度空间, 则:

(i) 可测函数序列的依测度收敛极限函数可测.

(ii) 可测函数序列的弱 a.e. 收敛极限函数可测.

证明 (i) 由定理 1(ii) 得出. 为证 (ii), 若 f_n 可测并且 $w-$a.e. 收敛于 f. 由 (i) 知, f w 可测. 为证明 f 可测, 只须证明 f 有几乎可分值. 假设 $Q_n \in \Sigma, \mu(Q_n) = 0$, 使得 $f_n(\Omega \backslash Q_n)$ 是可分的. 记 $Q = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$, 则 $\mu(Q) = 0$ 并且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega \backslash Q_n)$ 可分, 从而 $\overline{\text{span}} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega \backslash Q_n)$ 可分. 但对于凸集来说, w 闭集等于范数闭集, 所以

$$f(\Omega \backslash Q) \subset \overline{\text{span}} \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega \backslash Q_n).$$

定理得证.

1.3 Bochner 积分

设 (Ω, Σ, μ) 是完备测度空间, X 是 Banach 空间.

定义 1 称可测函数 $f: \Omega \to X$ 在 Bochner 意义下关于 μ 可积, 若存在简单函数序列 f_n 使得

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \mathrm{d}\mu = 0, \tag{3.1}$$

此时对于任何 $A \in \Sigma$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n(\omega)\mathrm{d}\mu$ 存在, 记为 $\int_A f(\omega)\mathrm{d}\mu$. 特别地称 $\int_{\Omega} f(\omega)\mathrm{d}\mu$ 是 f 在 Ω 上的 Bochner 积分.

容易验证, 积分值不会随着简单函数列的选取而改变.

定理 1 可测函数 $f: \Omega \to X$ μ 可积当且仅当 $\int_{\Omega} \|f(\omega)\|\mathrm{d}\mu < \infty$.

证明 若 f 可积, 简单函数列 f_n 满足 (3.1), 记 $f_n(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{k_n} x_{n_i} \chi_{A_{n_i}}$, 由于

$$\int_{\Omega} \|f_n(\omega)\|\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k_n} \|x_{n_i}\| \mu(A_{n_i})$$

是有限的. 从不等式

$$\int_{\Omega} \|f(\omega)\|\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{\Omega} \|f(\omega) - f_n(\omega)\|\mathrm{d}\mu + \int_{\Omega} \|f_n(\omega)\|\mathrm{d}\mu$$

立即得出左端的有限性.

反之, 若左端是有限的, 由 1.2 节定理 3 的推论, f 是一列可数值函数 f_n 的一致极限 (除去一个 0 测度集). 不妨设 $f_n(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_{n_i} \chi_{A_{n_i}}, x_{n_i} \in X, A_{n_i} \in \Sigma, A_{n_i} \cap A_{n_j} = \varnothing\ (i \neq j)$ 使得

$$\|f_n(\omega) - f(\omega)\| \leqslant \varepsilon_n, \text{ a.e.,} \tag{3.2}$$

并且 $\varepsilon_n \to 0$. 则 $\forall n$, 由 $\|f_n(\omega)\|$, $\|f(\omega)\|$ 的积分定义和 (3.1) 得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\|x_{n_i}\|\mu(A_{n_i}) &= \int_{\Omega}\|f_n(\omega)\|\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int_{\Omega}\|f(\omega)\|\mathrm{d}\mu + \varepsilon_n\mu(\Omega) < \infty.\end{aligned}$$

取 $k_n \in N$, 使得 $\sum\limits_{i=k_n+1}^{\infty}\|x_{n_i}\|\mu(A_{n_i}) < \varepsilon_n$, 并且记 $f_n'(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{k_n} x_{n_i}\chi_{A_{n_i}}$, 则 f_n' 是简单函数序列并且

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\|f_n'(\omega) - f(\omega)\|\mathrm{d}\mu &\leqslant \int_{\Omega}\|f_n'(\omega) - f_n(\omega)\|\mathrm{d}\mu + \int_{\Omega}\|f_n(\omega) - f(\omega)\|\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \sum_{i=k_n+1}^{\infty}\|x_{n_i}\|\mu(A_{n_i}) + \varepsilon_n\mu(\Omega) \leqslant (1+\mu(\Omega))\varepsilon_n,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Omega}\|f_n'(\omega) - f(\omega)\|\mathrm{d}\mu = 0$, f 是可积的.

下面结论是不难得出的:

(i) 若 f, g 关于 μ 可积, α, β 为标量, 则 $\alpha f + \beta g$ 也可积并且

$$\int_{\Omega}(\alpha f + \beta g)\mathrm{d}\mu = \alpha\int_{\Omega} f\mathrm{d}\mu + \beta\int_{\Omega} g\mathrm{d}\mu;$$

(ii) 若 f, g 都可测, $\|f(\omega)\| \leqslant \|g(\omega)\|$ a.e., 则 g 可积时, f 也可积;

(iii) 若 f 可积, $\{A_n\}$ 是 Σ 中一列互不相交的集合序列, 则

$$\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} f(\omega)\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f(\omega)\mathrm{d}\mu; \tag{3.3}$$

(iv) 若 f 可积, 则

$$\left\|\int_{\Omega} f(\omega)\mathrm{d}\mu\right\| \leqslant \int_{\Omega}\|f(\omega)\|\mathrm{d}\mu. \tag{3.4}$$

实际上, (3.3) 可由标量情况的相应式子得来. 对于 (3.4), 当 f 可积时, $\forall x^* \in X^*$, 标量值函数 $x^*f(\omega)$ 可积, 并且若简单函数列 f_n 满足 (3.1), 则

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} x^*f(\omega)\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} x^*f_n(\omega)\mathrm{d}\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} x^*\int_{\Omega} f_n(\omega)\mathrm{d}\mu = x^*\int_{\Omega} f(\omega)\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

特别地, 由 Hahn-Banach 延拓定理, 取 $x^* \in X^*, \|x^*\| = 1$ 使得

$$x^* \int_\Omega f(\omega) \mathrm{d}\mu = \left\| \int_\Omega f(\omega) \mathrm{d}\mu \right\|,$$

则

$$\left\| \int_\Omega f(\omega) \mathrm{d}\mu \right\| = x^* \int_\Omega f(\omega) \mathrm{d}\mu = \int_\Omega x^* f(\omega) \mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega \|f(\omega)\| \, \mathrm{d}\mu.$$

定理 2 设 (Ω, Σ, μ) 是测度空间, $f : \Omega \to X$ 关于 μ 可积, 定义向量测度 $F : \Sigma \to X, F(E) = \displaystyle\int_E f(\omega) \mathrm{d}\mu$, 则

(i) F 是可数可加向量测度, 并且 $F \ll \mu$;

(ii) F 是有界变差的, 并且 $\|F\| (E) = \displaystyle\int_E \|f(\omega)\| \mathrm{d}\mu, \forall\, E \in \Sigma$;

(iii) F 有相对紧值域, 即 $F(\Sigma) = \{F(E) : \forall E \in \Sigma\}$ 是相对紧集.

证明 1° F 的可数可加性即上面基本结论中所说的 (iii). 由 (3.4) 和 Lebesgue 积分的绝对连续性得到 $F \ll \mu$.

2° 设 π 是 Ω 到 Σ 的任一分划,

$$\sum_{A \in \pi} \|F(A)\| = \sum_{A \in \pi} \left\| \int_A f(\omega) \mathrm{d}\mu \right\| \leqslant \sum_{A \in \pi} \int_A \|f(\omega)\| \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \|f(\omega)\| \mathrm{d}\mu,$$

从而 $\|F\| (\Omega) \leqslant \displaystyle\int_\Omega \|f(\omega)\| \mathrm{d}\mu$. 这也说明 F 是有界变差的.

另一方面, 设 f_n 是 f 的积分定义中的简单函数列, $\forall \varepsilon > 0$, 取 n_0 使

$$\int_\Omega \|f(\omega) - f_{n_0}(\omega)\| \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

设 $f_{n_0} = \displaystyle\sum_{i=1}^k x_i \chi_{A_i}, x_i \in X, \{A_i\}$ 是 Ω 的分划. 记 $\pi_0 = \{A_1, \cdots, A_k\}$, 对于比 π_0 更细的分划 π 和 $A \in \pi$, 容易验证

$$\left\| \int_A f_{n_0}(\omega) \mathrm{d}\mu \right\| = \int_A \|f_{n_0}(\omega)\| \mathrm{d}\mu.$$

由全变差的定义, 取 π 比 π_0 细, 并且使 $\|F\| (\Omega) - \displaystyle\sum_{A \in \pi} \|F(A)\| < \varepsilon$, 则

$$\left| \|F\| (\Omega) - \int_\Omega \|f_{n_0}(\omega)\| \, \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \left| \|F\| (\Omega) - \sum_{A \in \pi} \left\| \int_A f(\omega) \mathrm{d}\mu \right\| \right|$$

$$
\begin{aligned}
&+\left|\sum_{A\in\pi}\left\|\int_A f(\omega)\mathrm{d}\mu\right\|-\int_\Omega\|f_{n_0}(\omega)\|\,\mathrm{d}\mu\right|\\
&\leqslant\varepsilon+\sum_{A\in\pi}\left\|\int_A(f(\omega)-f_{n_0}(\omega))\mathrm{d}\mu\right\|\\
&\leqslant\varepsilon+\int_\Omega\|f(\omega)-f_{n_0}(\omega)\|\mathrm{d}\mu<2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

特别地,

$$\int_\Omega\|f_{n_0}(\omega)\|\mathrm{d}\mu\leqslant\|F\|(\Omega)+2\varepsilon,$$

ε 是任意的, 从而

$$\int_\Omega\|f(\omega)\|\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\|f_n(\omega)\|\mathrm{d}\mu\leqslant\|F\|(\Omega),$$

由此得到 (ii). 把 Ω 换为 E, 证明仍适用.

3° 注意若 $f:\Omega\to X$ 是 μ 可积的, $g:\Omega\to R$ 是 μ 可测标量值函数, $g\in L_\infty$, 则 gf 是 μ 可积的. 定义算子 $T:L_\infty\to X, T(g)=\int_\Omega gf\mathrm{d}\mu$, 由于

$$\|T(g)\|\leqslant\int_\Omega|g(\omega)|\ \|f(\omega)\|\,\mathrm{d}\mu\leqslant\|g\|_\infty\int_\Omega\|f(\omega)\|\,\mathrm{d}\mu,$$

T 是有界线性算子. 若 f_n 是简单函数, 则 T 是有限秩算子. 取 f_n 是 f 的积分定义中的简单函数列, 对于每个 f_n 都定义算子

$$T_n:L_\infty\to X,\quad T_n(g)=\int_\Omega gf_n\mathrm{d}\mu,$$

则

$$\|T(g)-T_n(g)\|\leqslant\int_\Omega|g|\ \|f-f_n\|\,\mathrm{d}\mu\leqslant\|g\|_\infty\int_\Omega\|f-f_n\|\,\mathrm{d}\mu,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T-T_n\|=\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega\|f-f_n\|\,\mathrm{d}\mu=0$, T 是紧算子. 特别地,

$$F(\Sigma)\subset\{T(\chi_E):E\in\Sigma\}\subset\{T(g):\|g\|_\infty\leqslant 1\}.$$

所以 $F(\Sigma)$ 是相对紧集.

定理 3　设 X,Y 是 Banach 空间, $T:X\to Y$ 是有界线性算子, $f:\Omega\to X$ 是可积的, 则 Tf 可积并且

$$T\int_\Omega f(\omega)\mathrm{d}\mu=\int_\Omega Tf(\omega)\mathrm{d}\mu. \tag{3.5}$$

证明 设 f_n 是 f 的积分定义中的简单函数列, 则 Tf_n 是简单 Y 值函数列并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \|Tf_n(\omega)-Tf(\omega)\|\mathrm{d}\mu \leqslant \lim_{n\to\infty}\|T\|\int_\Omega \|f_n(\omega)-f(\omega)\|\mathrm{d}\mu=0.$$

于是 Tf 可积, 并且由 T 的连续性,

$$\begin{aligned}\int_\Omega Tf(\omega)\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega Tf_n(\omega)\mathrm{d}\mu\\ &=\lim_{n\to\infty}T\int_\Omega f_n(\omega)\mathrm{d}\mu = T\int_\Omega f(\omega)\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

定理 4

(i) 设 $f,g:\Omega\to X$ 是可积的, 并且 $\forall\ E\in\Sigma$,

$$\int_E f(\omega)\mathrm{d}\mu=\int_E g(\omega)\mathrm{d}\mu,$$

则 $f(\omega)=g(\omega)$, a.e.;

(ii) 对于每个 $E\in\Sigma,\mu(E)>0,\dfrac{1}{\mu(E)}\displaystyle\int_E f(\omega)\mathrm{d}\mu\in\overline{\mathrm{co}}\,f(E)$.

证明

1° 设 $F(E)=\displaystyle\int_E (f(\omega)-g(\omega))\mathrm{d}\mu,\forall\ E\in\Sigma$, 由定理 2(ii),

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|f(\omega)-g(\omega)\|\mathrm{d}\mu &= \|F\|(\Omega)\\ &=\sup_\pi\sum_{E\in\pi}\left\|\int_E f(\omega)\mathrm{d}\mu-\int_E g(\omega)\mathrm{d}\mu\right\|=0,\end{aligned}$$

所以 $f(\omega)=g(\omega)$, a.e..

2° 若所说的式子不成立, 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $x^*\in X^*$ 和 $r\in R$ 使得

$$x^*\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f(\omega)\mathrm{d}\mu\right)<r\leqslant x^*f(\omega),\quad \omega\in E, \tag{3.6}$$

两端在 E 上积分得出矛盾.

$$\int_E x^*f(\omega)\mathrm{d}\mu<r\mu(E)\leqslant\int_E x^*f(\omega)\mathrm{d}\mu.$$

现在让我们考虑可积函数的空间.

设 $1 \leqslant p < \infty$, 若可测函数 $f: \Omega \to X$ 满足 $\int_\Omega \|f(\omega)\|^p \mathrm{d}\mu < \infty$, 则称 f 是 p 方可积的. p 方可积的 X 值函数全体记为 $L_p(\mu, X)$. 类似地使 $\|f(\omega)\|$ 本质有界的可测函数全体记为 $L_\infty(\mu, X)$. 视 a.e. 相等的函数为同一元并且采用范数

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f(\omega)\|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} \|f(\omega)\|, \quad p = \infty,$$

则 $L_p(\mu, X)$ 成为 Banach 空间. 标量值的 $L_p(\mu, X)$ 记为 $L_p(\mu)$.

若 $f, f_n \in L_p(\mu, X)$ 并且 $\|f_n - f\|_p \to 0$, 则称 f_n p 方平均收敛于 f. 像 Lebesgue 积分的情况一样, 我们有

定理 5　若 f_n p 方平均收敛于 f, 则 f_n 依测度收敛于 f.

定理 6(Lebesgue)　设 $1 \leqslant p < \infty, f_n \in L_p(\mu, X)$, 若存在函数 $g \in L_p(\mu)$ 使得 $\|f_n(\omega)\| \leqslant g(\omega)$ a.e., $n \geqslant 1$, 并且 f_n 依测度收敛于 f, 则 f_n p 方平均收敛于 f.

证明与实值情况相同.

定义 2　设 $f_\lambda: \Omega \to X(\lambda \in \Lambda)$ 是一族可测函数, 称这族函数是一致可积的, 若

$$\lim_{c \to +\infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_{\{\|f_\lambda\| > c\}} \|f_\lambda(\omega)\| \mathrm{d}\mu = 0. \tag{3.7}$$

定理 7　$\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是一致可积函数族当且仅当以下两条件成立:

(i) $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} \int_\Omega \|f_\lambda(\omega)\| \mathrm{d}\mu < \infty$;

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ 使得 $\forall\, E \in \Sigma, \mu(E) < \delta$ 时

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \int_E \|f_\lambda(\omega)\| \mathrm{d}\mu < \varepsilon. \tag{3.8}$$

证明　1° 设 $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 一致可积, 若 c 足够大使得

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \int_{\{\|f_\lambda\| > c\}} \|f_\lambda(\omega)\| \mathrm{d}\mu \leqslant 1,$$

记 $E_{\lambda c} = \{\|f_\lambda\| > c\}$, 则

$$\int_\Omega \|f_\lambda(\omega)\| \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega \setminus E_{\lambda c}} \|f_\lambda(\omega)\| \mathrm{d}\mu + \int_{E_{\lambda c}} \|f_\lambda(\omega)\| \mathrm{d}\mu \leqslant c + 1,$$

由此得出 (i). 为了得到 (ii), 注意

$$\begin{aligned} \int_E \|f_\lambda(\omega)\| \mathrm{d}\mu &= \int_{(\Omega \setminus E_{\lambda c}) \cap E} \|f_\lambda(\omega)\| \mathrm{d}\mu + \int_{E_{\lambda c} \cap E} \|f_\lambda(\omega)\| \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant c\mu(E) + \int_{E_{\lambda c}} \|f_\lambda(\omega)\| \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$, 先取 $c > 0$, 使第二项关于 λ 一致小于 $\varepsilon/2$. 对于 $E, \mu(E) < \varepsilon/2c$, 则有

$$\int_E \|f_\lambda(\omega)\| \mathrm{d}\mu \leqslant c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

$2°$ 若 (i), (ii) 成立, 不妨设 $M = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda} \int_\Omega \|f_\lambda(\omega)\| \mathrm{d}\mu$. 由于

$$\mu(E_{\lambda c}) \leqslant \frac{1}{c} \int_{E_{\lambda c}} \|f_\lambda\| \mathrm{d}\mu \leqslant \frac{M}{c} \to 0, \quad c \to +\infty,$$

关于 $\lambda \in \Lambda$ 一致成立, $\forall \delta > 0$, 存在 $K > 0$, 使当 $c \geqslant K$ 时, $\mu(E_{\lambda c}) < \delta$ 关于 λ 一致成立, 从而由 (ii),

$$\int_{E_{\lambda c}} \|f_\lambda(\omega)\| \mathrm{d}\mu < \varepsilon, \quad \forall\, \lambda \in \Lambda,$$

即 (4.6) 成立.

定理 8 若 $f_n \in L_1(\mu, X)$, 则 $\|f_n - f\|_1 \to 0$ 当且仅当 f_n 依测度收敛于 f 并且 $\{f_n : n \geqslant 1\}$ 一致可积.

证明 若 $\|f_n - f\|_1 \to 0$, 定理 5 说明 f_n 依测度收敛于 f. 此外 $\sup\limits_{n \in N} \|f_n\|_1 < \infty$. 对于 $\varepsilon > 0$, 取 $n_0 \in N$, 使得 $n \geqslant n_0$ 时 $\|f_n - f\|_1 < \varepsilon$. 由于 f 可积, 故存在 $\delta > 0$, 使得 $E \in \Sigma$, $\mu(E) < \delta$ 时, $\int_E \|f(\omega)\| \mathrm{d}\mu < \varepsilon$, 从而当 $n \geqslant n_0$ 时,

$$\int_E \|f_n(\omega)\| \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E \|f(\omega)\| \mathrm{d}\mu + \|f_n - f\|_1 < 2\varepsilon.$$

由于有限个可积函数 $\{f_i : 1 \leqslant i < n_0\}$ 一致可积, 当 δ 足够小时, 上式对于任何 $n \geqslant 1$ 成立. 由定理 7 知, $\{f_n : n \geqslant 1\}$ 一致可积.

反之, 由于 $\{f_n : n \geqslant 1\}$ 有子列 $f_{n_k} \to f$ a. e., 由 Fatou 引理知道 f 可积. 以下暂记 n_k 为 k, 设 $E_{kc} = \{\|f_k\| \geqslant c\}$, $E_c = \{\|f\| \geqslant c\}$, 则

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|f_k - f\| \,\mathrm{d}\mu &= \int_{(\Omega \backslash E_{kc}) \cap (\Omega \backslash E_c)} \|f_k - f\| \mathrm{d}\mu + \int_{E_{kc} \cup E_c} \|f_k - f\| \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int_{(\Omega \backslash E_{kc}) \cap (\Omega \backslash E_c)} \|f_k - f\| \mathrm{d}\mu + \int_{E_{kc} \cup E_c} (\|f\| + \|f_k\|) \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

由一致可积性, $\lim\limits_{c \to \infty} \sup\limits_k \mu(E_{kc}) = 0$, 又由 f 的可积性, $\lim\limits_{c \to \infty} \mu(E_c) = 0$. 故可取 c 足够大, 使右端第二项小于 $\varepsilon/2$. 对于第一项应用控制收敛定理, 当 k 充分大时, 该项小于 $\varepsilon/2$, 从而 $\|f_{n_k} - f\|_1 \to 0$. 由于此结论对于 f_n 的每个子序列都适用, 最后得出 $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

尽管 Bochner 积分有许多与 Lebesgue 积分类似的性质, 但进一步的研究显示出二者的差别, 这些差别是由于值空间的特殊性质造成的.

回忆实测度的 Radon-Nikodym (RN) 定理：对于测度空间 (Ω,Σ,μ) 和有界变差测度 $\nu:\Sigma\to R$, 若 $\nu\ll\mu$, 则存在函数 $f:\Omega\to R$ 使得

$$\nu(E)=\int_E f(\omega)\mathrm{d}\mu,\quad \forall\ E\in\Sigma.$$

此时记 $f=\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$, 称 f 为 ν 关于 μ 的 RN 导数. 将 R 换为一般 Banach 空间 X, 类似的结果能否成立? 下面例子表明对于 $X=c_0$ 上述定理不能成立.

例 1 设 (Ω,Σ,μ) 是 $[0,1)$ 上的 Lebesgue 测度空间. 令

$$E_1=\left[0,\frac{1}{2}\right),E_2=\left[\frac{1}{2},1\right);$$
$$E_3=\left[0,\frac{1}{4}\right),E_4=\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),E_5=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right),E_6=\left[\frac{3}{4},1\right);$$
$$E_7=\left[0,\frac{1}{8}\right),\cdots\cdots$$

定义 $\nu:\Sigma\to c_0$,

$$\nu(E)=(\mu(E\cap E_1),\mu(E\cap E_2),\cdots,\mu(E\cap E_n),\cdots).$$

注意 $\forall E\in\Sigma$, $\mu(E\cap E_n)\to 0$, 故 $\nu(E)\in c_0$. 直接验证可知:

1° $\nu(E)$ 是可数可加的;

2° $\|\nu(E)\|=\sup\limits_n\mu(E\cap E_n)\leqslant\mu(E)$, 所以 $\nu\ll\mu$;

3° $\|\nu\|(E)=\sup\limits_\pi\sum\limits_{A\in\pi}\|\nu(A)\|\leqslant\mu(\Omega)=1,\nu$ 是有界变差的.

若存在 $f:\Omega\to c_0$ 使得 $\nu(E)=\displaystyle\int_E f(\omega)\mathrm{d}\mu,\forall E\in\Sigma$. 不妨设 c_0 上的第 n 个坐标泛函是 x_n^*, 则

$$x_n^*\int_E f(\omega)\mathrm{d}\mu=\int_E x_n^*f(\omega)\mathrm{d}\mu=x_n^*\nu(E)=\mu(E\cap E_n),\quad \forall\ E\in\Sigma.$$

$x_n^*f(\omega)$ 是 $f(\omega)$ 对应的第 n 个坐标, 此时必有 $x_n^*f(\omega)=\chi_{E_n}$, 从而

$$f(\omega)=(\chi_{E_1},\chi_{E_2},\cdots).$$

但对于 $[0,1)$ 中任一开集 B, 有无穷多个 $n,\chi_{E_n}(\omega)=0$, 同时有无穷多个 $n,\chi_{E_n}(\omega)=1(\forall\ \omega\in B)$. 所以 $f(\omega)\notin c_0$, 矛盾.

定义 3 称 Banach 空间 X 关于测度空间 (Ω, Σ, μ) 具有 RN 性质：若对于 Σ 上的任何 μ 连续有界变差向量测度 F, 存在 $f \in L_1(\mu, X)$ 使得

$$F(E) = \int_E f(\omega)\mathrm{d}\mu, \quad \forall\, E \in \Sigma. \tag{3.9}$$

称 f 是 F 关于 μ 的 RN 导数, 记为 $f = \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\mu}$. 称 X 具有 RN 性质, 若 X 关于任一测度空间具有 RN 性质.

上面例子表明 c_0 不具有 RN 性质.

定义 4 称线性算子 $T : L_1(\mu) \to X$ 是可表现的, 若存在可测函数 $g : \Omega \to X$, $\|g\|_\infty < \infty$, 使得

$$T(f) = \int_\Omega fg\mathrm{d}\mu, \quad \forall\, f \in L_1(\mu). \tag{3.10}$$

定理 9 设 X 是 Banach 空间, X 具有 RN 性质当且仅当每个有界线性算子 $T : L_1(\mu) \to X$ 是可表现的, 其中 μ 是任一测度.

证明 必要性. 设 X 具有 RN 性质, $T : L_1(\mu) \to X$ 是有界线性算子. 令 $F(E) = T(\chi_E), E \in \Sigma$, 则 $\|F(E)\| \leqslant \|T\| \ \|\chi_E\|_1 = \|T\|\,\mu(E)$. 由此知 F 是有界变差可数可加测度并且是 μ 连续的, 故存在 $g \in L_1(\mu, X)$ 使得对于任何简单函数 $f : \Omega \to R$,

$$T(f) = \int_\Omega fg\mathrm{d}\mu. \tag{3.11}$$

为证明 $g \in L_\infty(\mu, X)$, 注意由 1.1 节推论 2, $\|F\|\,(E)$ 是可数可加测度并且

$$\|F\|\,(E) = \sup_\pi \sum_{A\in\pi} \|F(A)\| \leqslant \|T\|\,\mu(E). \tag{3.12}$$

由实值情况的 RN 定理 $\dfrac{\mathrm{d}\,\|F\|}{\mathrm{d}\mu} \leqslant \|T\|$. 但由 $\|F\|\,(E) = \displaystyle\int_E \|g\|\,\mathrm{d}\mu$ 知道 $\|g\| = \dfrac{\mathrm{d}\,\|F\|}{\mathrm{d}\mu}$, 于是 $\|g\|_\infty \leqslant \|T\|$. 通过极限得出 $\forall f \in L_1(\mu)$, (3.11) 成立.

充分性. 设 T 是可表现的. 对于有界变差 μ 连续测度 $F : \Sigma \to X, \|F\|$ 可数可加 μ 连续, 从而存在 $\xi = \dfrac{\mathrm{d}\,\|F\|}{\mathrm{d}\mu} \in L_1(\mu)$. $\forall n \geqslant 1$, 令 $E_n = \{\omega : n-1 \leqslant \xi < n\}$, 并且定义 $T_n(\chi_E) = F(E_n \cap E)$, 则对于简单函数 $f = \displaystyle\sum_{i=1}^k a_i\chi_{A_i}$, $T_n f = \displaystyle\sum_{i=1}^k a_i T_n \chi_{A_i} = \displaystyle\sum_{i=1}^k a_i F(E_n \cap A_i)$. 从而

$$\begin{aligned}\|T_n(f)\| &\leqslant \sum_{i=1}^{k}|a_i| \ \|F\|(E_n\cap A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k}|a_i|\int_{E_n\cap A_i}\xi \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant n\sum_{i=1}^{k}|a_i|\,\mu(E_n\cap A_i) = n\int_{E_n}|f|\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{3.13}$$

由简单函数在 $L_1(\mu)$ 中的稠密性, (3.13) 对任何 $f \in L_1(\mu)$ 成立. 定理条件说明 T_n 是可表现的, 即存在 $g_n \in L_\infty(\mu, X)$, 使得

$$T_n(f) = \int_{E_n} f g_n \mathrm{d}\mu, \quad \forall\, f \in L_1(u).$$

换句话说, $F(E_n \cap A) = \int_{E_n\cap A} g_n \mathrm{d}\mu$. 取 $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \chi_{E_n}$, 则一方面,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\|g\|\mathrm{d}\mu &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}\|g\|\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\|F\|(E_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}\xi\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega}\xi\mathrm{d}\mu < \infty,\end{aligned}$$

另一方面, $\forall E \in \Sigma$,

$$F(E) = \lim_{n\to\infty} F\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \lim_{n\to\infty}\int_{E\cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i} g\mathrm{d}\mu = \int_E g\mathrm{d}\mu.$$

X 具有 RN 性质.

例 2　$L_1(\mu)$ 不具有 RN 性质, 其中 μ 是 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度. 实际上, 设 $F : \Sigma \to L_1(\mu), F(E) = \chi_E$, 则 $\|F\|(E) = \mu(E)$, 从而 F 是有界变差和 μ 连续的. 若存在 Bochner 可积函数 $g : \Omega \to L_1(\mu)$ 使得

$$F(E) = \int_E g\mathrm{d}\mu, \quad \forall E \in \Sigma.$$

定义算子 $T : L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)$, $Tf = \int_{\Omega} fg\mathrm{d}\mu, \forall\, f \in L_\infty(\mu)$. 由定理 2, $F(\Sigma) = \{T(\chi_E) : E \in \Sigma\}$ 是 $L_1(\mu)$ 中的相对紧集. 但 $\{T(\chi_E) : E \in \Sigma\}$ 中存在序列 $\{\chi_{E_n} : n \geqslant 1\}$, 使得

$$\mu(E_n) = \mu(\Omega)/2, \quad \mu(E_m \Delta E_n) = \mu(\Omega)/4, \quad m \neq n,$$

从而 $m \neq n$ 时,

$$\|T(\chi_{E_m}) - T(\chi_{E_n})\|_1 = \|\chi_{E_m} - \chi_{E_n}\|_1 = \mu(E_m \cap E_n) \geqslant 1/4.$$

这与相对紧性矛盾.

1.4 条件期望

当 (Ω,Σ,μ) 是概率空间时, 通常称每个关于 μ 可积的函数 f 为一个随机变量, 简记为 R.V.f. 称 f 在 Ω 上的积分为 f 的期望, 记为 Ef.

定义 1 设 (Ω,Σ,μ) 是完备概率空间, B 是 Σ 的子 σ 代数, f 关于 μ 可积. 称 $g:\Omega\to X$ 是 f 关于 B 的条件期望, 若 g 关于 B 可测, 并且

$$\int_E g\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu,\quad \forall E\in B, \tag{4.1}$$

此时记 $g=E(f\,|B)$.

由定义和 1.3 节定理 4, 若把仅在零测度集上不同的函数视为同一元, 则当条件期望存在时, 它是唯一确定的. 文献中有时将 $E(f|\sigma(h))$ 记为 $E(f\,|h)$, 这里 $\sigma(h)$ 是使 h 可测的最小 σ 代数. 今后对于 a.e. 成立的等式或不等式, 常常省去 a.e. 字样.

例 1 对于实值函数 $f\in L_1(\mu)$, 条件期望总是存在的. 例如, 若 B 是 Σ 的子 σ 代数, 令

$$F(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu,\quad \forall E\in B,$$

则 $F(E)$ 是有限测度并且关于 μ 绝对连续, 由实值情况的 RN 定理, 存在 $g=\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\mu}$, g 关于 B 可测并且 $F(E)=\displaystyle\int_E g\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu, \forall E\in B$. g 即是 f 关于 B 的条件期望.

明显地, 若 X 具有 RN 性质, 以上论证对于每个 $f\in L_1(\mu,X)$ 也成立. 但实际上马上我们会看到条件期望的存在性并不依赖于 RN 性质.

首先, 有几个简单结论可以直接从定义得出:

(i) 若 $f\equiv c$, 则 $E(f\,|B)=c$;

(ii) 若 $E(f\,|B),E(g\,|B)$ 存在, $\alpha,\beta\in C$, 则

$$E(\alpha f+\beta g\,|B)=\alpha E(f\,|B)+\beta E(g\,|B); \tag{4.2}$$

(iii) 设 X,Y 是 Banach 空间, $T:X\to Y$ 是有界线性算子,$f\in L_1(\mu,X)$, 则 $E(Tf\,|B)$ 存在并且

$$E(Tf\,|B)=TE(f\,|B); \tag{4.3}$$

(iv) $E(E(f\,|B))=Ef$; (4.4)

(v) 若 $B=\{\varnothing,\Omega\}$, 则 $E(f\,|B)=Ef$;

(vi) 对于实值函数, 若 $f(\omega)\geqslant 0$. 则 $E(f\,|B)\geqslant 0$, 从而若 $f(\omega)\leqslant g(\omega)$, 则 $E(f\,|B)\leqslant E(g\,|B)$;

(vii) 若 f 关于 σ 代数 B 独立, 则 $E(f\,|B)=Ef$.

关于 (i) 的证明, 只须在定义 (4.1) 中取 $E=\Omega$ 即得之. 关于 (vii) 的证明并不困难, 但我们将它留在附录中.

现在我们讨论条件期望的存在性.

引理 1(Jensen)　若 $\varphi:(\alpha,\beta)\to R$ 是连续凸函数, $f:\Omega\to(\alpha,\beta)$ 是可积函数并且 $E\varphi(f)$ 存在, 则

$$\varphi(E(f\,|B))\leqslant E(\varphi(f)\,|B). \tag{4.5}$$

证明　注意此时存在两列实数 $a_n,b_n\in R$, 使得 $\varphi(t)=\sup\limits_{n\in N}(a_nt+b_n)$, 于是

$$\varphi(f(\omega))\geqslant a_nf(\omega)+b_n.$$

两端关于 B 取条件期望, 则

$$E(\varphi(f)\,|B)\geqslant a_nE(f\,|B)+b_n,$$

从而

$$E(\varphi(f)\,|B)\geqslant\sup_{n\in N}(a_nE(f\,|B)+b_n)=\varphi(E(f\,|B)).$$

定理 1　设 $B\subset\Sigma$ 是子 σ 代数, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则 $\forall f\in L_p(\mu,X)$,

(i) $E(f\,|B)$ 存在;

(ii) $\|E(f\,|B)\|\leqslant E(\|f\|\,|B)$, a.e.; $\qquad$ (4.6)

(iii) $\|E(f\,|B)\|_p\leqslant\|f\|_p$. $\qquad$ (4.7)

证明　当 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\chi_{A_i}$ 是简单函数时, 由定义直接得到

$$E(f\,|B)=\sum_{i=1}^{n}x_iE(\chi_{A_i}\,|B).$$

对于函数 $\varphi(t)=t^p$, $t\geqslant 0$, $1\leqslant p<\infty$, 根据 Jensen 不等式,

$$\begin{aligned}\|E(f\,|B)\|_p^p&=\int_\Omega\|E(f\,|B)\|^p\mathrm{d}\mu\leqslant\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|E(\chi_{A_i}\,|B)\right)^p\mathrm{d}\mu\\&=\int_\Omega(E(\|f\|\,|B))^p\mathrm{d}\mu\leqslant\int_\Omega E(\|f\|^p\,|B)\mathrm{d}\mu=\int_\Omega\|f\|^p\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

对于 $p=\infty$ 容易直接验证成立.

1° 现在若 $f\in L_1(\mu,X)$, 取简单函数列 f_n, $\|f_n-f\|_1\to 0$, 则

$$\|E(f_n\,|B)-E(f_m\,|B)\|_1\leqslant\|f_n-f_m\|_1\to 0.$$

$\{E(f_n\,|B):n\geqslant 1\}$ 是 $L_1(\mu,X)$ 中的 Cauchy 序列, $L_1(\mu,X)$ 完备, 不妨设

$$g=\lim_{n\to\infty}E(f_n\,|B)(\text{以 } L_1 \text{ 范数}),$$

则 g 关于 B 可测. 又 $\forall E \in B$,

$$\int_E g \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E E(f_n | B) \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu.$$

g 即是 f 关于 B 的条件期望.

2° 任取 $x^* \in X^*, \|x^*\| = 1$, 由性质 (iii) 和引理 1,

$$|x^* E(f | B)| = |E(x^* f | B)| \leqslant E(|x^* f| \ \ |B) \leqslant E(\|f\| \ \ |B),$$

然后

$$\|E(f | B)\| = \sup_{\|x^*\|=1} |x^* E(f | B)| \leqslant E(\|f\| \ \ |\mathrm{B}).$$

3° $\forall f \in L_p(\mu, X)$, 已经得出 $g = E(f | B)$ 存在, 实际上 $g \in L_1(\mu, X)$. 从 (4.6) 和引理 2 得到

$$\begin{aligned} \|E(f|B)\|_p^p &\leqslant \|E(\|f\||B)\|_p^p = E(E(\|f\||B)^p) \\ &\leqslant E(E(\|f\|^p|B)) = E\|f\|^p = \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

此即 (4.7).

(4.7) 通常称为条件期望的收缩性质. 实际上当把关于某个 σ 代数 B 的条件期望看成一个算子时, 它恰是从 $L_p(\mu, \Sigma, X)$ 到 $L_p(\mu, B, X)$ 的线性, 保持常数不变的收缩算子, 从而是连续算子. 下面定理的 (ii) 还说明它是幂等的.

定理 2 设 B, B_1, B_2 是 Σ 的子 σ 代数, $f \in L_p(\mu, X)$, 则

(i) 若 $g : \Omega \to R$ 关于 B 可测并且 $gf \in L_1(\mu, X)$, 则

$$E(gf | B) = gE(f | B). \tag{4.8}$$

当 g 为向量值函数, f 为实值函数时同样的结论成立. 特别地, 若 f 关于 B 可测, 则 $E(f | B) = f$.

(ii) 若 $B_1 \subset B_2$, 则

$$E(E(f | B_2) | B_1) = E(f | B_1). \tag{4.9}$$

证明 1° 若 $g = \chi_E, E \in B$, 则 $\forall A \in B, A \cap E \in B$,

$$\int_A gf \mathrm{d}\mu = \int_{A\cap E} f \mathrm{d}\mu = \int_{A\cap E} E(f | B) \mathrm{d}\mu = \int_A gE(f | B) \mathrm{d}\mu.$$

注意到 $gE(f | B)$ 关于 B 可测, 从而 (4.8) 成立. 过渡到简单函数再到极限即得出所要的结论.

2° 对于任何 $A \in B_1 \subset B_2$, 由条件期望的定义,

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int_A E(f | B_2) \mathrm{d}\mu = \int_A E(E(f | B_2) | B_1) \mathrm{d}\mu,$$

所以 (4.9) 成立.

定理 3　若 $f \in L_p(\mu, X), g \in L_q(\mu, X^*)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p < \infty$, 则条件 Hölder 不等式成立,

$$E(|fg| \ |B) \leqslant E(\|f\|^p |B)^{1/p} E(\|f\|^q |B)^{1/q}. \tag{4.10}$$

证明　记 $E_1 = \{\omega : E(\|f\|^p |B) = 0\}$, $E_2 = \{\omega : E(\|g\|^q |B) = 0\}$, 则 $E_1, E_2 \in B$. 对于 E_1, 由通常的 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}\int_{E_1} |E(fg|B)| \mathrm{d}\mu &\leqslant \int_{E_1} |fg| \mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int_{E_1} \|f\|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int_{E_1} \|g\|^q \mathrm{d}\mu\right)^{1/q} \\ &= \left(\int_{E_1} E(\|f\|^p |B) \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int_{E_1} E(\|g\|^q |B) \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/q} = 0,\end{aligned}$$

恰与右端函数的积分相等. 同样地对于 E_2, 结论仍成立. 于是在 E_1 或 E_2 上, (4.10) 成立. 记 $A = \Omega \backslash (E_1 \cup E_2)$, 则在 A 上, 由 Yong 不等式,

$$\frac{\|f\|}{E(\|f\|^p |B)^{1/p}} \cdot \frac{\|g\|}{E(\|g\|^q |B)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p} \frac{\|f\|^p}{E(\|f\|^p |B)} + \frac{1}{q} \frac{\|g\|^q}{E(\|g\|^q |B)},$$

两端取条件期望得到

$$E\left(\frac{|fg|}{E(\|f\|^p |B)^{1/p} E(\|g\|^q |B)^{1/q}} \chi_A \, |B\right) \leqslant \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \chi_A = \chi_A.$$

换句话说, 在 A 上有

$$E(|fg| \ |B) \leqslant E(\|f\|^p |B)^{1/p} E(\|g\|^q |B)^{1/q},$$

与上面合在一起得出 (4.10).

定理 4　若 f_n 是非负可测函数序列并且单调上升, $f_n \uparrow f$ a.e., 则 $E(f_n |B) \uparrow E(f |B)$, a.e..

证明　由条件期望的性质, $E(f_n |B)$ 非负且单调递增, 不妨设 $E(f_n |B) \uparrow h$, a.e.. 由单调收敛定理,$\forall \ A \in B$,

$$\begin{aligned}\int_A h \mathrm{d}\mu &= \int_A \lim_{n\to\infty} E(f_n |B) \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A E(f_n |B) \mathrm{d}\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \mathrm{d}\mu = \int_A f \mathrm{d}\mu = \int_A E(f |B) \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

从而 $h = E(f |B)$.

定理 5(Fatou 引理)　若 $f_n \geqslant 0$ 为可测实函数, 则

$$E(\liminf_{n\to\infty} f_n |B) \leqslant \liminf_{n\to\infty} E(f_n |B). \tag{4.11}$$

证明 记 $g_n = \inf\limits_{m \geqslant n} f_m$, $f = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$, 则 $g_n \uparrow f$, $g_n \geqslant 0$, 由定理 4,

$$\begin{aligned} E(\liminf_{n\to\infty} f_n \,|B) &= E(\lim_{n\to\infty} g_n \,|B) = \lim_{n\to\infty} E(g_n \,|B) \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} E(f_n \,|B), \quad \text{a.e..} \end{aligned}$$

定理 6 若可测函数 $f_n \to f$ a.e., $g \in L_1(\mu)$, $\|f_n(\omega)\| \leqslant g(\omega)$ a.e., 则

$$E(f_n \,|B) \to E(f \,|B), \quad \text{a.e..} \tag{4.12}$$

证明 记 $h_n = \sup\limits_{m \geqslant n} \|f_m - f\|$, $h_n' = \sup\limits_{m \geqslant n} E(\|f_m - f\| \ |B)$. 显然, $0 \leqslant h_n \leqslant 2g$, h_n, h_n' 均为单调下降函数序列. 记其极限分别为 h 和 h', 由定理条件 $h = 0$, a.e., 从而 $Eh_n \to 0$. 另一方面由 Fatou 引理,

$$0 \leqslant Eh' = \liminf_{n\to\infty} Eh_n' \leqslant \liminf_{n\to\infty} Eh_n = 0.$$

所以 $h' = 0$, a.e..

对于后面鞅的收敛定理, 下面结论具有启发性.

定理 7(Levy) 设 $\{B_n, n \geqslant 1\}$ 是一列递增子 σ 代数, $\Sigma = \sigma\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right)$, 则 $\forall f \in L_1(\mu, X)$, $E(f \,|B_n)$ 点态并且以 $L_1(\mu, X)$ 范数收敛于 f.

证明 记 $f_n = E(f \,|B_n)$, 考虑 $L_1(\mu, X)$ 的线性子空间

$$K = \{f \in L_1(\mu, X); f\text{满足所说条件}\}.$$

我们将证明实际上 $K = L_1(\mu, X)$.

首先, K 在 $L_1(\mu, X)$ 中稠密. 实际上, 若 $f \in L_1(\mu, B_n, X)$ 并且 $k \geqslant n$, 则 $E(f \,|B_k) = f$, 所以 $f \in K$. 由此 $K \supset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_1(\mu, B_n, X)$. 但后者在 $L_1(\mu, X)$ 中稠密, 例如, 对于每个 $x\chi_A \in L_1(\mu, X)$(从而每个简单函数) 有序列 $f_k \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_1(\mu, B_n, X)$ 使得 $\|f_k - x\chi_A\|_1 \to 0 (k \to \infty)$. 此事由下面方法得出: 由 $\Sigma = \sigma\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right)$, 取 $A_k \in B_{n_k}$ 使得 $\mu(A_k \Delta A) \to 0$. 令 $f_k = x\chi_{A_k}$, 则

$$\|f_k - x\chi_A\|_1 \leqslant \|x\| \, \mu(A_k \Delta A) \to 0 \ .$$

其次, K 是 $L_1(\mu, X)$ 的闭子空间. 对于 $f \in L_1(\mu, X)$ 和 $\varepsilon > 0$, 取 $g \in L_1(\mu, B_{n_0}, X)$, 使得 $\|f - g\|_1 < \varepsilon/2$. 当 $n \geqslant n_0$ 时, $E(g \,|B_n) = g$, 则

$$\|f_n - f\|_1 \leqslant \|E(f \,|B_n) - E(g \,|B_n)\|_1 + \|E(g \,|B_n) - f\|_1 \leqslant 2\|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

这说明 f 满足 (ii).

取 $g \in K$, 则对于 $m, n \in N$,

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\| \leqslant & \|E(f\,|B_n) - E(g\,|B_n)\,\| + \|E(g\,|B_n) - E(g\,|B_m)\,\| \\ & + \|E(g\,|B_m) - E(f\,|B_m)\,\| \\ \leqslant & 2\sup_{n\geqslant 1} h_n + \|E(g\,|B_n) - E(g\,|B_m)\,\|,\end{aligned} \tag{4.13}$$

其中 $h_n = E(\|f-g\|\ \ |B_n)$, 剩下只须证明 $h_n \to 0$.

h_n 关于 B_n 可测, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 取

$$A_1 = \{\omega : h_1(\omega) > \varepsilon\},$$

$$\cdots\cdots$$

$$A_k = \{\omega : h_1(\omega) \leqslant \varepsilon, \cdots, h_{k-1}(\omega) \leqslant \varepsilon, h_k(\omega) > \varepsilon\}, \cdots,$$

则 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$, $A_k \in B_k\ (k \geqslant 1)$, 并且

$$\begin{aligned}\mu\{\omega : \sup_{k\leqslant n} h_k(\omega) > \varepsilon\} &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \frac{h_k}{\varepsilon} \mathrm{d}\mu = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \|f-g\|\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|f-g\|_1 .\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$, 得到 $\mu\{\omega : \sup\limits_{k\geqslant 1} h_k(\omega) > \varepsilon\} \leqslant \|f-g\|_1/\varepsilon$. 对于 $\delta > 0$, 取 $g \in K$, 使得 $\|f-g\|_1 < \delta\varepsilon$, 则

$$\mu\{\omega : \sup_{k\geqslant 1} h_k(\omega) > \varepsilon\} \leqslant \delta,$$

于是 $h_n \to 0$. 总之 f_n a.e. 收敛, 其极限与 $L_1(\mu, X)$ 范数极限仅在零测度集上不同, 所以 $f \in K$. 证毕.

第 1 章评注:

本章几节的基本内容可以在 Diestel 与 Uhl 的专著 [78] 中找到, 只不过有些定理的证明我们改为更为简便的方法. 关于条件期望的定义和基本属性甚至可以在通常关于随机过程或鞅论的书中找到, 例如, 文献 [75]、[161], 这里的内容是它们的向量值类比.

1.1 节定理 2, 我们改为用纲推理的方法证明. 对于 1.2 节中强弱可测函数的关系, 可分性是将二者区分开来的关键. 1.3 节关于函数族一致可积性的定理 7、8 是标量值情况的类比, 标量值的定理见文献 [161]. 1.4 节定理 1 说明虽然 RN 定理可以保证条件期望的存在性, 但条件期望的存在是 "无条件的", 即它不依赖于空间的任何特殊性质. 定理 2、3 也见文献 [161]. 定理 7 在两方面具有启发性, 即一方面它是正则鞅的典型, 另一方面是关于鞅收敛的一系列定理的源头和动机.

第 2 章　鞅收敛性与空间的 RN 性质

对于本书来说，鞅既是我们研究的对象又是一种工具，因此弄清鞅的基本性质尤为重要．我们将首先引入鞅的概念，讨论鞅的收敛性，鞅在停时变换下的属性，即选样定理和停止定理．在这一过程中我们将研究鞅的收敛性与 RN 性质的关系．特别地，我们还将借助于实值下鞅给出若干空间的 RN 性质的判定．最后将讨论比鞅更广泛的随机序列，即渐近鞅和拟鞅的收敛性．

2.1　鞅及其收敛定理

设 (Ω,Σ,μ) 是概率空间，Λ 是一个定向集，$(B_\lambda,\lambda\in\Lambda)$ 是 Σ 的递增子 σ 代数族．即当 $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$，$\lambda_1\leqslant\lambda_2$ 时，$B_{\lambda_1}\subset B_{\lambda_2}$．函数族 $(f_\lambda,\lambda\in\Lambda)$ 称为与 $(B_\lambda,\lambda\in\Lambda)$ 适应的过程，若 $\forall\lambda\in\Lambda, f_\lambda$ 关于 B_λ 可测．

定义 1　适应过程$(f_\lambda,B_\lambda,\lambda\in\Lambda)$ 称为 $L_p(\mu,X)$ 鞅，若每个 $f_\lambda\in L_p(\mu,X)$ 并且对于任何 $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$，当 $\lambda_1\leqslant\lambda_2$ 时，

$$E(f_{\lambda_2}\,|B_{\lambda_1})=f_{\lambda_1}. \tag{1.1}$$

在许多情况下，我们将讨论定向集是非负整数集合的鞅．此时式 (1.1) 等价于 $\forall m\geqslant n, E(f_m\,|B_n)=f_n$．

例 1　设 (Ω,Σ,μ) 是概率空间，X 是 Banach 空间，$f\in L_p(\mu,X)$，B_n 是 Σ 的递增子 σ 代数序列，$f_n=E(f\,|B_n)$，则 $(f_n,B_n,n\geqslant 0)$ 是鞅．

实际上由条件期望的性质，$\forall m\geqslant n$，

$$E(f_m\,|B_n)=E(E(f\,|B_m)\,|B_n)=E(f\,|B_n)=f_n.$$

1.4 节定理 7 证明了这种鞅是 $L_1(\mu,X)$ 范数收敛的，后面将证明每个 $L_1(\mu,X)$ 范数收敛鞅都将具有这种形式．

若 π_n 是 Ω 的一列逐步加细的分划，$f\in L_p(\mu,X)$，定义

$$f_n=\sum_{A\in\pi_n}\frac{1}{\mu(A)}\int_A f\mathrm{d}\mu\chi_A,\quad 约定\frac{0}{0}=0. \tag{1.2}$$

记由 π_n 的各子集生成的 σ 代数是 $\sigma(\pi_n)$，则 $(f_n,\sigma(\pi_n),n\geqslant 0)$ 是鞅，这可以由直接计算得到．

例 2 空间 X 中的每个无穷树对应一个 $L_1(\mu, X)$ 鞅. X 中的序列 $(x_n, n \geqslant 1)$ 称为无穷树, 若 $\forall n \geqslant 1, x_n = (x_{2n} + x_{2n+1})/2$. 令 μ 是 $[0,1)$ 中的 Lebesgue 测度, 记

$$A_1^1 = [0,1)\,, A_2^2 = \left[0, \frac{1}{2}\right)\,, A_2^3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right)\,, \cdots,$$

$$A_k^i = \left[\frac{i - 2^{k-1}}{2^{k-1}}, \frac{i - 2^{k-1} + 1}{2^{k-1}}\right), \quad k = 1, 2, \cdots, \quad i = 2^{k-1}, \cdots, 2^k - 1,$$

定义

$$f_k = \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k - 1} x_i \chi_{A_k^i}, \quad B_k = \sigma(A_k^i; 2^{k-1} \leqslant i < 2^k),$$

则 $(f_k, B_k, k \geqslant 1)$ 是鞅.

例 3 若 $(\xi_n, n \geqslant 1)$ 是相互独立的零均值实随机变量, $f_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$, $B_n = \sigma(\xi_i : 1 \leqslant i \leqslant n)$, 则 $(f_n, B_n, n \geqslant 1)$ 是鞅.

这是由于 $\forall n \geqslant 1$,

$$E(f_{n+1} | B_n) = f_n + a_{n+1} E(\xi_{n+1} | B_n) = f_n + a_{n+1} E\xi_{n+1} = f_n.$$

例 4 考虑由两点 $\{-1,1\}$ 构成的离散度量空间. $\Omega = \{-1,1\}^N$ 是其乘积空间. 每个 $\omega \in \Omega$ 是一个无穷序列, 它的每个坐标上的数字是 -1 或 1. Ω 实际上是一个紧群. 设 Σ 是 Ω 的全体子集构成的 σ 代数, 在 Σ 上定义如下的概率测度 (Haar 测度)μ:

若 δ_{-1}, δ_1 分别是在 -1 和 1 的 Dirac 质量, 即 $\delta_i(j) = \delta_{ij}, i, j = -1, 1$, 令

$$\mu = \left(\frac{\delta_{-1} + \delta_1}{2}\right)^{\otimes N}. \tag{1.3}$$

我们记集合

$$A_{i_1, \cdots, i_n} = \{(i_1, \cdots, i_n, \omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \cdots) : \omega_k = \pm 1, k > n\},$$

这里 $i_1 = \pm 1, \cdots, i_n = \pm 1$. 考虑 σ 代数序列,

$$B_0 = \{\varnothing, \Omega\}, \quad B_n = \sigma(A_{i_1, \cdots, i_n} : i_1 = \pm 1, \cdots, i_n = \pm 1).$$

由定义, B_n 是由 2^n 个集合生成的 σ 代数, $\Sigma = \sigma\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right)$. 此时 (Ω, Σ, μ) 是概率空间.

若 $X = c_0$, 定义 $f_n : \Omega \to c_0, \omega = \omega_1, \omega_2, \cdots$ 时,

$$f_n(\omega) = (\omega_1, \cdots, \omega_n, 0, \cdots),$$

$f_0 \equiv 0$, 则 $f_n(\omega) \in c_0$. 由于 f_n 仅依赖于前 n 个坐标, f_n 关于 B_n 可测.

对于任何 $A_{i_1,\cdots,i_n} \in B_n, A_{i_1,\cdots,i_n} = A_{i_1,\cdots,i_n,-1} \cup A_{i_1,\cdots,i_n,1}$, 由于 f_{n+1} 在后面两个集合上均取常值, 依次记三者为 A, A_{-1}, A_1, 则

$$\begin{aligned}\int_A f_{n+1}\mathrm{d}\mu &= \int_{A_{-1}} f_{n+1}\mathrm{d}\mu + \int_{A_1} f_{n+1}\mathrm{d}\mu \\ &= 2^{-(n+1)}(i_1,\cdots,i_n,-1,0,\cdots) + 2^{-(n+1)}(i_1,\cdots,i_n,1,0,\cdots) \\ &= 2^{-n}(i_1,\cdots,i_n,0,\cdots) = \int_A f_n\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

A 是 B_n 中任一基本集合, 其他集合都可表示为它们的并, 故上式对于 B_n 中任一元成立. $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是鞅.

定义 2 设 $(f_\lambda, B_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ 是 $L_p(\mu, X)$ 鞅, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

(1) 若 $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} \|f_\lambda\|_p < \infty$, 称此鞅是 $L_p(\mu, X)$ 有界的;

(2) 若存在 $f \in L_p(\mu, X)$ 使得 $f_\lambda = E(f\,|B_\lambda)$, 称此鞅是正则的.

定理 1 设 $(f_\lambda, B_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ 是鞅, $1 \leqslant p < \infty$, 则 f_λ 以 $L_p(\mu, X)$ 范数收敛当且仅当 $(f_\lambda, B_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ 是正则的.

证明 必要性. 若 $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} \|f_\lambda - f\|_p = 0$, 设 $g_\lambda = E(f\,|B_\lambda)$. 由定义, $\forall \lambda_0 \in \Lambda$, 当 $\lambda \geqslant \lambda_0$ 时, $E(f_\lambda\,|B_{\lambda_0}) = f_{\lambda_0}$, 从而

$$\|f_{\lambda_0} - g_{\lambda_0}\|_p = \|E(f_\lambda\,|B_{\lambda_0}) - E(f\,|B_{\lambda_0})\|_p \leqslant \|f_\lambda - f\|_p \to 0.$$

于是 $f_{\lambda_0} = g_{\lambda_0}$a.e., 即 $f_{\lambda_0} = E(f\,|B_{\lambda_0}), \lambda_0 \in \Lambda$.

充分性. 在 $p = 1$ 的情况, 由 Levy 定理得出. 在 $p > 1$ 的情况, 由于 $f \in L_p(\mu, X)$, $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 一致可积, 从而得出 $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} \|f_\lambda - f\|_p = 0$.

引理 1(极大引理) 设 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是 $L_1(\mu, X)$ 鞅,

$$f^*(\omega) = \sup_{n\geqslant 0} \|f_n(\omega)\| \tag{1.4}$$

是 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 的极大函数, 则 $\forall \lambda > 0$,

$$\lambda\mu\{f^* > \lambda\} \leqslant \sup_{n\geqslant 0} \|f_n\|_1 . \tag{1.5}$$

证明 记 $A_n = \{\omega : f_n^* > \lambda\}$, 其中 $f_n^*(\omega) = \sup\limits_{0\leqslant i\leqslant n} \|f_i(\omega)\|$. 又记

$$\begin{aligned}&A^{(0)} = \{\omega : \|f_0(\omega)\| > \lambda\}, \\ &\cdots\cdots \\ &A^{(k)} = \{\omega : \|f_1(\omega)\| \leqslant \lambda, \cdots, \|f_{k-1}(\omega)\| \leqslant \lambda, \|f_k(\omega)\| > \lambda\},\end{aligned}$$

则 $A_n=\bigcup_{k=0}^{n}A^{(k)}$ 并且 $A^{(i)}\cap A^{(j)}=\varnothing(i\neq j)$. 从而

$$\lambda\mu(A_n)=\lambda\sum_{k=0}^{n}\mu(A^{(k)})\leqslant\sum_{k=0}^{n}\int_{A^{(k)}}\|f_k\|\mathrm{d}\mu$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{n}\int_{A^{(k)}}E(\|f_n\|\ |B_k)\,\mathrm{d}\mu\leqslant\|f_n\|_1\leqslant\sup_{n\geqslant0}\|f_n\|_1\,.$$

令 $n\to\infty$, 即得到所要的结论.

定理 2　若鞅 $(f_n,B_n,n\geqslant0)$ 依 $L_1(\mu,X)$ 范数收敛, 则必 a.e. 收敛.

证明　注意当 m 固定时, $(f_n-f_m,B_n,n\geqslant m)$ 仍是鞅, 由极大引理, $\forall\lambda>0$,

$$\mu(\sup_{n\geqslant m}\|f_n-f_m\|>\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}\sup_{n\geqslant m}\|f_n-f_m\|_1\,.$$

对于 $\lambda>0,\varepsilon>0$, 取 n_0 使当 $m,n\geqslant n_0$ 时, $\|f_n-f_m\|_1<\varepsilon\lambda$, 则

$$\mu(\sup_{n\geqslant m}\|f_n-f_m\|>\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}\cdot\varepsilon\lambda=\varepsilon.$$

由此易知 f_n 是 a.e. 收敛的.

定理 3(Chatterji)　设 $(f_n,B_n,n\geqslant0)$ 是 $L_1(\mu,X)$ 有界鞅,

$$F(A)=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\mathrm{d}\mu,\qquad A\in\bigcup_{n\geqslant0}B_n.\tag{1.6}$$

若 $F=F_{\mathrm{c}}+F_{\mathrm{s}}$ 是 F 的 Lebesgue 分解, 则 f_n a.e. 收敛于一可积函数当且仅当 F_{c} 关于 μ 具有 RN 导数 f 并且此时

$$\lim_{n\to\infty}f_n=E(f\,|B_\infty),\qquad \text{a.e..}\tag{1.7}$$

这里 $B_\infty=\sigma\Big(\bigcup_{n\geqslant0}B_n\Big)$.

证明　充分性. 若 $f\in L_1(\mu,X)$ 是 F_{c} 关于 μ 的 RN 导数, 不妨假定对于 F_{c} 已作了延拓, 即

$$F_{\mathrm{c}}(A)=\int_A f\mathrm{d}\mu,\qquad A\in B_\infty,$$

记 $f_n'=E(f\,|B_n)$, 则 $(f_n',B_n,n\geqslant1)$ 是正则鞅. 由 Levy 定理, $f_n'\to E(f|\ B_\infty)$　a.e.. 令 $h_n=f_n-f_n'$, 则 $(h_n,B_n,n\geqslant0)$ 也是鞅. 只需证明 $h_n\to0$ a.e..

由鞅性质, 对于每个 $A\in B_n$,

$$\int_A h_n\mathrm{d}\mu=\int_A f_n\mathrm{d}\mu-\int_A f_n'\mathrm{d}\mu=\int_A f_n\mathrm{d}\mu-\int_A f\mathrm{d}\mu$$
$$=F(A)-F_{\mathrm{c}}(A)=F_{\mathrm{s}}(A).$$

由 $\{f_n\}$ 的 $L_1(\mu,X)$ 有界性, F 是有界变差的, 从而 F_c, F_s是有界变差的. 但 F_s 与 μ 互为奇异, 故 $\forall\, \delta>0, 0<\varepsilon<1$, 存在 $A\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$, 使得

$$\mu(\Omega\backslash A)+\|F_s\|(A)<\varepsilon\delta/2. \tag{1.8}$$

若 $A\in B_{n_0}$, 由极大引理的证明,

$$\begin{aligned}\mu(\sup_{m\geqslant n\geqslant n_0}\|h_n\|>\varepsilon)&=\mu(\{\sup_{m\geqslant n\geqslant n_0}\|h_n\|>\varepsilon\}\cap A)\\&\quad+\mu(\{\sup_{m\geqslant n\geqslant n_0}\|h_n\|>\varepsilon\}\backslash A)\\&<\frac{1}{\varepsilon}\int_A\|h_m(\omega)\|\,\mathrm{d}\mu+\varepsilon\delta/2\\&\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\|F_s\|(A)+\varepsilon\delta/2<\delta,\end{aligned} \tag{1.9}$$

令 $m\to\infty$, 得到 $\mu(\sup\limits_{n\geqslant1}\|h_n\|>\varepsilon)<\delta$. ε,δ 是任意的, 故 $h_n\to0$, a.e., 从而 $f_n\to E(f|\,B_\infty)$ a.e..

必要性. 若 $f_n\to g$ a.e., 并且 $g\in L_1(\mu,X)$, 则 g 关于 B_∞ 可测, 记 $f_n'=E(g\,|B_n), h_n=f_n-f_n'$, 则 $(h_n,B_n,n\geqslant0)$ 是 $L_1(\mu,X)$ 有界鞅. 令

$$H_1(A)=\lim_{n\to\infty}\int_A h_n\mathrm{d}\mu,\qquad A\in\bigcup_{n\in N}B_n. \tag{1.10}$$

记 $H_1=H_{11}+H_{12}$ 是 H_1 关于 μ 的 Lebesgue 分解. $H_{11}\ll\mu, H_{12}$ 与 μ 互为奇异. 对于每个 $x^*\in X^*$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_A x^*h_n\mathrm{d}\mu&=\lim_{n\to\infty}\int_A x^*(f_n-f_n')\mathrm{d}\mu\\&=x^*H_{11}(A)+x^*H_{12}(A).\end{aligned}$$

其中 $x^*H_{11}\ll\mu$, 记 $h_{x^*}=\dfrac{\mathrm{d}x^*H_{11}}{\mathrm{d}\mu}$. 由充分性部分的证明, $x^*h_n\to h_{x^*}$, 由 Levy 定理, $f_n'\to g$, 从而 $f_n-f_n'\to0$ a.e. 由此又知 $h_{x^*}\to0$ a.e., 故 $H_n\equiv0, H_1=H_{12}$ 与 μ 奇异.

若令 $G_1(A)=\displaystyle\int_A g\mathrm{d}\mu,\ A\in\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$, 则当 n 足够大时,

$$\begin{aligned}F(A)&=\int_A f_n\mathrm{d}\mu=\int_A g\mathrm{d}\mu+\int_A(f_n-g)\mathrm{d}\mu\\&=\int_A g\mathrm{d}\mu+\int_A(f_n-f_n')\mathrm{d}\mu=G_1(A)+H_1(A).\end{aligned}$$

显然 $G_1 \ll \mu$, 由 Lebesgue 分解的唯一性, $G_1 = F_c$, $H_1 = F_s$, 并且 g 是 F_c 关于 μ 的 RN 导数. 此时

$$\lim_{n\to\infty} f_n = g = E(g|B_\infty), \text{ a.e.}.$$

推论　若 X 具有 RN 性质, 则每个 $L_1(\mu, X)$ 有界鞅 a.e. 收敛.

证明　令 $F(A) = \lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n \mathrm{d}\mu, A \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. 若 $F = F_c + F_s$ 是 F 关于μ 的 Lebesgue 分解. 由于 $L_1(\mu, X)$ 有界性, F 是有界变差的, 从而 F_c 是有界变差的, $F_c \ll \mu$. X 的 RN 性质保证了 F_c 关于 μ 具有 RN 导数. 于是定理 3 保证了 f_na.e. 收敛.

定理 1、定理 3 分别称为鞅的平均收敛定理和点态收敛定理.

称无穷树 (x_n) 是有界的, 若 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|x_n\| < \infty$. 称 (x_n) 是 δ 树, 若 $\forall n \geqslant 1$,

$$\min\{\ \|x_n - x_{2n}\|,\ \|x_n - x_{2n+1}\|\ \} \geqslant \delta > 0. \tag{1.11}$$

定理 4　(i) 含有有界无穷 δ 树的 Banach 空间不具有 RN 性质;

(ii) c_0 不具有 RN 性质. 若 X 含有与 c_0 同构的子空间, 则 X 不具有 RN 性质; 特别地, $c, C[a,b], l^\infty, L^\infty[a,b]$ 都不具有 RN 性质.

(iii) $L^1[0,1]$ 不具有 RN 性质.

证明　1° 考虑例 2 中定义的鞅 $(f_k, B_k, k \geqslant 1)$. 若 (x_n) 是有界无穷 δ 树, 则 $\sup\limits_{k\geqslant 1}\|f_k\|_\infty \leqslant \sup\limits_{n\geqslant 1}\|x_n\| < \infty$. 同时,

$$\|f_k(\omega) - f_{k+1}(\omega)\| \geqslant \min\{\ \|x_n - x_{2n}\|,\ \|x_n - x_{2n+1}\|\ \} \geqslant \delta > 0,$$

f_k 不是 a.e. 收敛的. 由定理 3 知道 X 不具有 RN 性质.

2° 例 4 中定义的鞅 $(f_n, B_k, k \geqslant 1)$ 是 c_0 值的, $L_1(\mu, X)$ 有界但不是 a.e. 收敛的. 从而 c_0 不具有 RN 性质. 由定义知道, 当子空间不具有 RN 性质时, 全空间不会具有 RN 性质.

其实, 很容易构造出 c_0 中的有界无穷 δ 树, 例如

$$\begin{aligned}
&x_1 = (1, 0, \cdots),\\
&x_2 = (1, 1, 0, \cdots), x_3 = (1, -1, 0, \cdots),\\
&x_4 = (1, 1, 1, 0, \cdots), x_5 = (1, 1, -1, 0, \cdots),\\
&x_6 = (1, -1, 1, 0, \cdots), x_7 = (1, -1, -1, 0, \cdots),\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

3° 1.4 节已经提到 $L^1[0,1]$ 不具有 RN 性质. 实际上容易构造出 $L^1[0,1]$ 中的有界无穷 δ 树. 例如, 取例 2 中的 A_k^i, 定义 $x_k^i = 2^{k-1}\chi_{A_k^i}, i = 2^{k-1}, \cdots, 2^k - 1, k \geqslant 1$. 则

$$\|x_1 - x_2\| = \int_0^1 |\chi_{[0,1]} - 2\chi_{[0,1/2]}| \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1,$$

类似地,

$$\|x_n - x_{2n}\| = \|x_n - x_{2n+1}\| = 1,$$

所以 (x_k^i) 是 $L^1[0,1]$ 中的有界无穷 1 树. 由 (i) 知, $L^1[0,1]$ 不具有 RN 性质.

在测度空间 (Ω, Σ, μ) 中, 集合 $A \in \Sigma$ 称为一个原子, 若 $\mu(A) > 0$ 并且任何 $E \in \Sigma, E \subset A$, 或者 $\mu(E) = 0$, 或者 $\mu(E) = \mu(A)$. μ 称为是纯原子测度, 若 Ω 是一些原子的并. μ 称为无原子的测度, 若 Σ 中不含任何原子. 对于一个测度 μ, 必存在 $\Omega_0 \in \Sigma$ 使得 $\mu|_{\Omega_0 \cap \Sigma}$ 是纯原子的, $\mu|_{(\Omega \setminus \Omega_0) \cap \Sigma}$ 是无原子的, 并且

$$\mu = \mu|_{\Omega_0 \cap \Sigma} + \mu|_{(\Omega \setminus \Omega_0) \cap \Sigma} . \tag{1.12}$$

容易验证一个 Σ 可测函数 f 在 Σ 原子上一定取常值. 现在我们对于纯原子测度有一个简单的事实.

定理 5 任一 Banach 空间 X 关于纯原子测度具有 RN 性质.

证明 若 (Ω, Σ, μ) 是纯原子测度空间, 其原子全体为 $A_n (n \geqslant 1)$. 若 $F: \Sigma \to X$ 是 μ 连续的有界变差测度, 定义函数

$$f(\omega) = \sum_{n=1} \frac{F(A_n)}{\mu(A_n)} \chi_{A_n}(\omega). \tag{1.13}$$

对于每个 $A \in \Sigma, A$ 必为某些 A_n 的并集, 则

$$\int_A f(\omega) \mathrm{d}\mu = \sum_{A_n \subset A} \int_{A_n} \frac{F(A_n)}{\mu(A_n)} \chi_{A_n} \mathrm{d}\mu = \sum_{A_n \subset A} F(A_n) = F(A).$$

f 是 F 关于 μ 的 RN 导数. 结论得证.

定理 6 (Chatterji) Banach 空间 X 具有 RN 性质当且仅当下列条件之一对于所有 $L_1(\mu, X)$ 鞅 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 成立:

(i) 若 $\sup\limits_{n \in N} \|f_n\|_1 < \infty$, 则 f_n a.e. 收敛;

(ii) 若 $\sup\limits_{n \in N} \|f_n\|_1 < \infty$, 则 f_n 弱 a.e. 收敛;

(iii) 若对于某个 $c > 0, \sup\limits_{n \in N} \|f_n\|_\infty \leqslant c$, 则 f_n a.e. 收敛;

(iv) 若对于某个 $c > 0, \sup\limits_{n \in N} \|f_n\|_\infty \leqslant c$, 则 f_n 弱 a.e. 收敛;

(v) 若 $(f_n, n \geqslant 0)$ 一致可积, 则 f_n 依 L_1 范数收敛.

证明 不失一般性, 设 $\sigma\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \Sigma$. 当 X 具有 RN 性质时, 上面推论说明 (i) 成立. (i) $\Rightarrow$ (ii) 显然成立. 现证 (ii) $\Rightarrow$ (v).

设 $(f_n, n \geqslant 0)$ 一致可积, 则 $\sup\limits_{n\in N}\|f_n\|_1 < \infty$, (ii) 保证了存在可测函数 f, f_n a.e. 弱收敛于 f, 于是 $\|x^*f_n - x^*f\|_1 \to 0$. 由定理 1, $x^*f_n = E(x^*f\,|B_n)$,$\forall\, x^* \in X^*$. 由于 $(f_n, n \geqslant 0)$ 是鞅, 记 $F(A) = \lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n \mathrm{d}\mu$, 则

$$F(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu, \quad \forall A \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

$\{f_n\}$ 的 L_1 有界性说明 F 在 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ 上是有界变差的, 这说明 f 是 Bochner 可积的, 故 $f_n = E(f\,|B_n)$. 由定理 1, f_n 是 L_1 收敛的.

由 (v), 设 $F : \Sigma \to X$ 是有界变差测度, $F \ll \mu$. 考虑从 Ω 到 Σ 的逐步加细的分划序列 π_n, 使得 $\sigma\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\sigma(\pi_n)\right) = \Sigma$(为了我们的目的, 总可假设 Σ 满足此条件). 定义

$$f_n = \sum_{A\in\pi_n} \frac{F(A)}{\mu(A)}\chi_A, \tag{1.14}$$

我们已经知道 $(f_n, \sigma(\pi_n), n \geqslant 0)$ 是鞅. 直接验证知 f_n 一致可积. (v) 保证了 f_n L_1 范数收敛于 f. 由于

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n \mathrm{d}\mu, \quad A \in \bigcup_{n=N} \sigma(\pi_n),$$

从而在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sigma(\pi_n)$ 上, $F(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu$. 由延拓定理知道此式在整个 Σ 上成立, f 即是 F 关于 μ 的 RN 导数. 故 X 具有 RN 性质.

(ii) $\Rightarrow$ (iii),(ii) $\Rightarrow$ (iv) 都显然成立, (iv) $\Rightarrow$ (v) 的证明类似于 (ii) $\Rightarrow$ (v). 剩下只需证明由 (iii) 也可推出 X 具有 RN 性质. 实际上容易知道, 当 (iii) 对于某个 c 成立时, (iii) 对于任意 c 均成立. 设 $F : \Sigma \to X$ 是有界变差且 μ 连续测度. 此时 $\|F\| : \Sigma \to [0, \infty)$ 是可数可加且 μ 连续实值测度, 记 $g = \dfrac{\mathrm{d}\|F\|}{\mathrm{d}\mu}$, 先假定对于 $k > 0$,

$$\mu\{\omega : g(\omega) \leqslant k\} = 1. \tag{1.15}$$

此时 $\forall A \in \Sigma, \|F\|(A) \leqslant k\mu(A)$. 仍像 (1.14) 一样定义 f_n, 则 $\|f_n\|_\infty \leqslant k$, (v) 保证了 $f_n \to f$ a.e., 并且 $\|f_n - f\|_1 \to 0$. 由上面证明知道 f 是 F 关于 μ 的 RN 导数.

若 F 不满足 (1.15), 取 $A_k = \{\omega : g(\omega) \leqslant k\}$, 注意 $g \in L_1$, 故 $A_k \subset A_{k+1}, \Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. 设 $F_k(A) = F(A \cap A_k)$, 则

$$\|F_k\|(A) = \|F\|(A \cap A_k) \leqslant k\mu(A \cap A_k) \leqslant k\mu(A), \quad \forall\, A \in \Sigma.$$

由上述证明, 存在 $f_k \in L_1(\mu, X)$, 使得

$$F_k(A) = \int_A f_k \mathrm{d}\mu, \quad A \in \Sigma.$$

同时至多相差一个零测度集, 我们有

$$f_k(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \Omega \setminus A_k, \\ f'_k(\omega), & \omega \in A'_k, k \geqslant k'. \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} \int_\Omega \|f_k - f'_k\| \mathrm{d}\mu &= \int_{\Omega \setminus A'_k} \|f_k\| \mathrm{d}\mu = \|F_k\| (\Omega \setminus A'_k) \\ &= \|F\| (A_k \cap (\Omega \setminus A'_k)) \leqslant \|F\| (\Omega \setminus A'_k). \end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{k,k' \to \infty} \|f_k - f'_k\|_1 = 0, \{f_k\}$ 是 $L_1(\mu, X)$ 中的 Cauchy 序列. 不妨设 $\|f_k - f\|_1 \to 0$, 则 $f \in L_1(\mu, X)$ 并且 $\forall\, A \in \Sigma$,

$$F(A) = \lim_{k \to \infty} F(A \cap A_k) = \lim_{k \to \infty} \int_A f_k \mathrm{d}\mu = \int_A f \mathrm{d}\mu.$$

定理 7 设 X 是 Banach 空间, 则

(i) X 具有 RN 性质当且仅当 X 的每个可分闭子空间具有 RN 性质;

(ii) 若 $Y \sim X$(即 Y 与 X 同构), 则 X, Y 同时具有 (或不具有)RN 性质;

(iii) 若 $X = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \oplus X_n \right)_{l_p}$ $(1 \leqslant p < \infty)$, 其中每个 X_n 具有 RN 性质, 则 X 具有 RN 性质, 这里

$$X = \{x = (x_n);\ x_n \in X_n, \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p \right)^{1/p} < \infty\};$$

(iv) 若 X 具有 RN 性质, 则 $L_p(\mu, X)(1 < p < \infty)$ 也具有 RN 性质.

证明 1° 必要性显然, 现证充分性. 设 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是取值于 X 的 $L_1(\mu, X)$ 有界鞅, 由于每个 f_n 具有几乎可分值, 设 $Q \in \Sigma, \mu(Q) = 0$, 每个 f_n 在 $\Omega \setminus Q$ 上都有可分值. 记

$$E = \overline{\mathrm{span}}\{f_n(\omega) : \omega \in \Omega \setminus Q, n \geqslant 1\},$$

则 E 是 X 的可分子空间. 实际上允许在零测度集上不相同,$(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 可视为取值于 E 的鞅. 由假设 E 具有 RN 性质, 故 f_n a.e. 收敛. 定理 6 说明 X 具有 RN 性质.

2° 设 $T : X \to Y$ 是同构映射, T 是到上的并且

$$a\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant b\|x\|, \quad \forall x \in X,$$

$a, b > 0$ 为常数. 此时对于每个 Y 值鞅 $(f_n, B_n, n \geqslant 0), (T^{-1}f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是 X 值鞅. $\sup\limits_{n\in N} \|f_n\|_1 < \infty$ 时, $\sup\limits_{n\in N} \|T^{-1}f_n\|_1 < \infty$; $T^{-1}f_n$ a.e. 收敛时, f_n a.e. 收敛. 因此 X 具有 RN 性质时, Y 具有 RN 性质. 反过来的证明也一样.

3° 设每个 X_n 具有 RN 性质, $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是 X 值鞅. 不妨设 $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|f_n\|_p \leqslant c$. 注意

$$\forall \omega \in \Omega, \quad f_n(\omega) = (f_n^{(1)}(\omega), f_n^{(2)}(\omega), \cdots),$$

对于每个 $i \geqslant 1$, $(f_n^{(i)}, B_n, n \geqslant 0)$ 是 X_i 值鞅并且 $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|f_n^{(i)}\|_p < \infty$, 于是由定理 6, $f_n^{(i)} \to f^{(i)}$ a.e. 记 $f(\omega) = (f^{(1)}(\omega), f^{(2)}(\omega), \cdots)$, 我们证明 $f(\omega) \in X$, a.e., 并且 $f \in L_p(\mu, X)$. 实际上 $\forall\, m \geqslant 1$,

$$(f_n^{(1)}(\omega), \cdots, f_n^{(m)}(\omega), 0, \cdots) \to (f^{(1)}(\omega), \cdots, f^{(m)}(\omega), 0, \cdots),$$

从而几乎处处有

$$\sum_{i=1}^{m} \left\|f^{(i)}(\omega)\right\|_{X_i}^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left\|f_n^{(i)}(\omega)\right\|_{X_i}^p.$$

应用 Fatou 引理和控制收敛定理得到

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_\Omega \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left\|f^{(i)}(\omega)\right\|_{X_i}^p \mathrm{d}\mu \leqslant \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \left\|f^{(i)}(\omega)\right\|_{X_i}^p \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left\|f_n^{(i)}(\omega)\right\|_{X_i}^p \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \|f_n^i(\omega)\|_{X_i}^p \mathrm{d}\mu \leqslant c^p.
\end{aligned}$$

现在, 由于 $f_n^{(i)} L_p(\mu, X)$ 收敛于 $f^{(i)}$, 由定理 1, $E(f^{(i)}|B_n) = f_n^{(i)}$, 从而 $E(f\,|B_n) = f_n$. $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是正则的, 由 Levy 定理, f_n a.e. 收敛. 由定理 6, X 具有 RN 性质.

4° 设 X 具有 RN 性质, $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是以 (Ω', Σ', μ') 为测度空间取值于 $L_p(\mu, X)$ 的鞅并且

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in N} \|f_n\|_p &= \sup_{n\in N} \Big(\int_{\Omega'} \|f_n(\omega')\|_{L_p(\mu,X)}^p \mathrm{d}\mu'\Big)^{1/p} \\
&= \sup_{n\in N} \Big(\int_{\Omega'} \int_\Omega \|f_n(\omega', \omega)\|_X^p \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\mu'\Big)^{1/p} < \infty, \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

其中 $f_n(\omega') = f_n(\omega', \omega) \in X, \omega' \in \Omega', \omega \in \Omega$, 由鞅性质

$$E(f_{n+1}(\omega')\,|B_n') = f_n(\omega').$$

因此对几乎所有 $\omega \in \Omega, f_n(\omega', \omega)$ 是 X 值鞅. (1.16) 说明对几乎所有 $\omega \in \Omega$, 它是 $L_p(\mu', X)$ 有界的. X 具有 RN 性质, 由定理 1, 存在 $f(\omega', \omega) \in L_p(\mu', X)$ 使得

$$\int_{\Omega'} \|f_n(\omega', \omega) - f(\omega', \omega)\|^p \, d\mu' \to 0. \tag{1.17}$$

另一方面, Chatterji 定理说明, 对于几乎所有 $\omega' \in \Omega'$ 和 $\omega \in \Omega$,

$$\|f_n(\omega', \omega) - f(\omega', \omega)\|_X \to 0. \tag{1.18}$$

必要时改变各个函数在一个零测度集上的值, 由 $f_n(\omega', \omega)$ 关于 ω 的可测性, $f(\omega', \omega)$ 关于 μ 可测. 实际上 (1.17) μ − a.e. 成立, 即

$$\int_{\Omega'} \|f_n(\omega', \omega)\|^p \, \mathrm{d}\mu' \to \int_{\Omega'} \|f(\omega', \omega)\|^p \, \mathrm{d}\mu', \quad \mu - \text{a.e..}$$

由 Fatou 引理和 (1.16),

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\int_{\Omega'} \|f(\omega', \omega)\|^p \mathrm{d}\mu' \mathrm{d}\mu &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega}\int_{\Omega'} \|f_n(\omega', \omega)\|^p \, \mathrm{d}\mu' \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \sup_{n\in N} \|f_n\|_p < \infty.\end{aligned}$$

即 $f(\omega') = f(\omega', \omega) \in L_p(\mu, X)$.

最后, 式 (1.16) 表明 $f_n(\omega')$ 是一致可积的, 再由 (1.18) 得出

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega'} \|f_n(\omega', \omega) - f(\omega', \omega)\|_X \, \mathrm{d}\mu d\mu' \to 0$$

或 $\|f_n(\omega') - f(\omega')\|_1 \to 0$, 从而 $f(\omega') \in L_p(\mu, X)$ 并且 $f_n(\omega') \to f(\omega')$, μ − a.e.. 于是 $L_p(\mu, X)$ 具有 RN 性质.

2.2 停时与鞅

停时作为一种“随机指标”在鞅论中频繁使用, 让我们先给出定义.

定义 1 设 (Ω, Σ, μ) 是概率空间, $(B_n, n \geqslant 0)$ 是递增子 σ 代数序列. 称映射 $\tau : \Omega \to N \cup \{\infty\}$ 是一个停时, 若 $\{\omega : \tau(\omega) \leqslant n\} \in B_n, \forall n \geqslant 1$. 当 $\mu(\tau = \infty) = 0$ 时, 称 τ 为有限停时. 当 $\sup \tau(\omega) < \infty$ 时, 称 τ 为有界停时. 有界停时的全体记为 T.

由于 $(B_n, n \geqslant 0)$ 是递增的, 定义中的 $\{\omega : \tau(\omega) \leqslant n\} \in B_n$ 可以换为 $\{\omega : \tau(\omega) = n\} \in B_n$. 此外, 若规定 $\tau \leqslant \sigma$ 当且仅当 $\tau(\omega) \leqslant \sigma(\omega)$ a.e., 则 “$\leqslant$” 是 T 或全体停时集合上的半序, 从而使之成为定向集.

定理 1 设 $(B_n, n \geqslant 0)$ 是递增子 σ 代数序列, 则

(i) $\tau(\omega) \equiv k$ 是停时 ($\forall\, k \in N$);

(ii) τ, σ 是停时, 则 $\tau \wedge \sigma, \tau \vee \sigma, \tau + \sigma$ 是停时;

(iii) τ_k 是停时 ($k \geqslant 1$), 则 $\sup\limits_{k \geqslant 1} \tau_k$, $\inf\limits_{k \geqslant 1} \tau_k$ 是停时.

证明　1° $\{\tau = n\} = \begin{cases} \varnothing, & n \neq k, \\ \Omega, & n = k, \end{cases}$ 故 $\{\tau = n\} \in B_n$.

2° 由下列诸式可知:

$$\{\tau \wedge \sigma \leqslant n\} = \{\tau \leqslant n\} \cup \{\sigma \leqslant n\} \in B_n,$$
$$\{\tau \vee \sigma \leqslant n\} = \{\tau \leqslant n\} \cap \{\sigma \leqslant n\} \in B_n,$$
$$\{\tau + \sigma = n\} = \bigcup_{i=1}^{n-1} (\{\tau = i\} \cap \{\sigma = n - i\}) \in B_n.$$

3° 注意 B_n 是 σ 代数, 故

$$\{\sup_{k \geqslant 1} \tau_k \leqslant n\} = \bigcap_{k \geqslant 1} \{\tau_k \leqslant n\} \in B_n,$$
$$\{\inf_{k \geqslant 1} \tau_k \leqslant n\} = \bigcup_{k \geqslant 1} \{\tau_k \leqslant n\} \in B_n.$$

定义 2　设 τ 是停时, 称下面集族是与 τ 相应的 σ 代数.

$$B_\tau = \{A \in \Sigma : A \cap \{\tau = n\} \in B_n, n \geqslant 0\}. \tag{2.1}$$

直接验证可知 B_τ 确为 σ 代数, 函数 $\tau(\omega)$ 是 B_τ 可测的.

定理 2　设 τ, σ 是停时,

(i) $\tau \leqslant \sigma$, 则 $B_\tau \subset B_\sigma$;

(ii) $\{\tau = \sigma\}, \{\tau < \sigma\}, \{\tau \leqslant \sigma\}$ 均同时属于 B_τ 和 B_σ;

(iii) 若 $A \in B_\tau$, 则 $\tau_A = \tau \chi_A + \infty \chi_{A^c}$ 是停时.

证明　1° 对于每个 $A \in B_\tau$, 由定义 $A \cap \{\tau \leqslant n\} \in B_n$. 此时 $A \cap \{\sigma \leqslant n\} = A \cap \{\tau \leqslant n\} \cap \{\sigma \leqslant n\} \in B_n$, 所以 $A \in B_\sigma$, 即 $B_\tau \subset B_\sigma$.

2° 由

$$\{\tau = \sigma\} \cap \{\tau = n\} = \{\sigma = n\} \cap \{\tau = n\} \in B_n,$$
$$\begin{aligned}\{\tau < \sigma\} \cap \{\tau = n\} &= \{\sigma > n\} \cap \{\tau = n\} \\ &= \{\sigma \leqslant n\}^c \cap \{\tau = n\} \in B_n,\end{aligned}$$
$$\{\tau < \sigma\} \cap \{\sigma = n\} = \{\tau < n\} \cap \{\sigma = n\} \in B_n,$$
$$\{\tau \leqslant \sigma\} = \{\tau < \sigma\} \cup \{\tau = \sigma\}.$$

第一式说明 $\{\tau=\sigma\}\in B_\tau$. 将 $\{\tau=n\}$ 换为 $\{\sigma=n\}$, 则知 $\{\tau=\sigma\}\in B_\sigma$. 第二式说明 $\{\tau<\sigma\}\in B_\tau$, 第三式说明 $\{\tau<\sigma\}\in B_\sigma$. 最后的式子说明 $\{\tau\leqslant\sigma\}\in B_\tau\cap B_\sigma$.

3° (iii) 的结论由 $\{\tau_{\mathrm{A}}=n\}=\{\tau=n\}\cap A\in B_n$ 得到.

定理 3 设 $(f_n,B_n,n\geqslant 0)$ 是适应过程, $\tau\in T$, 则 $f_\tau(\omega)=f_{\tau(\omega)}(\omega)$ 是关于 B_τ 可测的函数. 若此时令 $B_\infty=\sigma(\bigcup\limits_{n\geqslant 0}B_n)$, f_∞ 是 B_∞ 可测的任一函数, 则上述 τ 可以是任一停时.

证明 事实上,

$$f_\tau(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(\omega)\chi_{(\tau=n)}+f_\infty(\omega)\chi_{(\tau=\infty)}. \tag{2.2}$$

对于 Banach 空间 X 中的开集 O,

$$\{\omega:f_\tau(\omega)\in O\}\cap\{\tau=n\}=\{\omega:f_n(\omega)\in O\}\cap\{\tau=n\}\in B_n,$$

$$\{\omega:f_\tau(\omega)\in O\}\cap\{\tau=\infty\}=\{\omega:f_\infty(\omega)\in O\}\cap\{\tau=\infty\}\in B_\infty.$$

于是由定义 $\{\omega:f_\tau(\omega)\in O\}\in B_\tau$. O 是任一开集, 故 f_τ 关于 B_τ 可测.

例 1 设 A 是 Banach 空间 X 的 Borel 子集. $(f_n,B_n,n\geqslant 0)$ 是适应序列, 令

$$\tau(\omega)=\inf\{n:f_n(\omega)\in A\},\quad \inf\varnothing=\infty, \tag{2.3}$$

则 τ 是停时. 这可由下面式子得知:

$$\{\tau=n\}=\{f_n\in A\}\backslash\bigcup_{i=0}^{n-1}\{f_i\notin A\}\in B_n,$$

$$\{\tau=\infty\}=\bigcap_{n=0}^{\infty}\{f_n\notin A\}.$$

定理 4 设 $(f_n,B_n,n\geqslant 0)$ 是 $L_1(\mu,X)$ 鞅, 则

(i) $\forall\tau,\sigma\in T$, 当 $\sigma\leqslant\tau$ 时, $E(f_\tau|B_\sigma)=f_\sigma$;

(ii) 若 $\{f_n,B_n,n\geqslant 0\}$ 是正则鞅, $f_n=E(f|B_n)$, $f_\infty=E(f|B_\infty)$, 则对于任何停时 $\sigma\leqslant\tau$ 上式成立.

证明 1° $\forall\tau,\sigma\in T$, 不妨取 $m\geqslant\max\{\tau,\sigma\}$. 若 $A\in B_\sigma$, 则 $A\in B_\tau$, 从而 $\forall n\geqslant 0, A\cap\{\sigma=n\}\in B_n, A\cap\{\tau=n\}\in B_n$, 于是

$$\int_A f_\sigma\mathrm{d}\mu=\sum_{n=0}^{m}\int_{A\cap\{\sigma=n\}}f_n\mathrm{d}\mu=\sum_{n=0}^{m}\int_{A\cap\{\sigma=n\}}f_m\mathrm{d}\mu=\int_A f_m\mathrm{d}\mu.$$

类似地, $\int_A f_\tau \mathrm{d}\mu = \int_A f_m \mathrm{d}\mu$, 故 $\int_A f_\sigma \mathrm{d}\mu = \int_A f_\tau \mathrm{d}\mu, \forall A \in B_\sigma$. 即

$$E(f_\tau \,|B_\sigma) = f_\sigma.$$

2° 设 $f \in L_1(\mu, X)$, 对于任一停时 τ, 若 $A \in B_\tau$, 则

$$\begin{aligned}\int_A f_\tau \mathrm{d}\mu &= \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{A\cap\{\tau=n\}} f_n \mathrm{d}\mu + \int\limits_{A\cap\{\tau=\infty\}} f_\infty \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{A\cap\{\tau=n\}} E(f\,|B_n)\mathrm{d}\mu + \int\limits_{A\cap\{\tau=\infty\}} E(f|B_\infty)\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{A\cap\{\tau=n\}} f\mathrm{d}\mu + \int\limits_{A\cap\{\tau=\infty\}} f\mathrm{d}\mu = \int_A f\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

故有 $E(f\,|B_\tau) = f_\tau$. 注意由 Levy 定理, 正则鞅$f_n \to E(f|B_\infty)$a.e., 所以上面第二个等号成立. 现在上式两端同时关于 B_σ 取条件期望得到

$$E(f_\tau \,|B_\sigma) = E(E(f\,|B_\tau)\,|B_\sigma) = E(f\,|B_\sigma) = f_\sigma.$$

在第一种情况, 有 $E\,\|f_\tau\| = E\,\|E(f_m\,|B_\tau)\| \leqslant E\,\|f_m\| < \infty$. 在第二种情况, $E\,\|f_\tau\| = E\,\|E(f\,|B_\tau)\| \leqslant E\,\|f\| < \infty$. 从而 $f_\tau \in L_1(\mu, X)$.

定理 5　设 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是鞅, 则

(i) $\sup\limits_{n\in N} \|f_n\|_1 < \infty$ 当且仅当 $\sup\limits_{\tau\in T} \|f_\tau\|_1 < \infty$;

(ii) 对于单调增加停时序列 $\tau_n \in T, (f_{\tau_n}, B_{\tau_n}, n \geqslant 0)$ 是鞅, 若 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是正则的, 对于任何 $\tau_n, (f_{\tau_n}, B_{\tau_n}, n \geqslant 0)$ 也是正则鞅;

(iii) 对于任何停时 $\tau, (f_{\tau\wedge n}, B_{\tau\wedge n}, n \geqslant 1)$ 是鞅;

(iv) 适应可积序列 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是鞅, 当且仅当 $Ef_\tau =$const.

通常称 (ii) 为选样性质, 称 (iii) 为停止性质.

证明　1° $\forall\, \tau \in T$, 取 $m \geqslant \tau$, 则 $E(f_m\,|B_\tau) = f_\tau$. 故 $\|f_\tau\|_1 = \|E(f_m\,|B_\tau)\|_1 \leqslant \|f_m\|_1$, 由此得出 (i).

2° 由定理 4 得到 (ii). 若 $f_m = E(f\,|B_m)$, $f \in L_1(\mu, X)$, 则 $\forall \tau_n \in T$, 取 $m \geqslant \tau_n$, 上式两端关于 B_{τ_n} 取条件期望得到 $E(f_{\tau_{n+1}}\,|B_{\tau_n}) = f_{\tau_n}$. 又

$$f_{\tau_n} = E(f_m\,|B_{\tau_n}) = E(E(f\,|B_m)\,|B_{\tau_n}) = E(f\,|B_{\tau_n})\ .$$

故 $(f_{\tau_n}, B_{\tau_n}, n \geqslant 0)$ 是正则的.

3° (iii) 是 (ii) 的特例.

4° 必要性是显然的. 现设 $Ef_\tau = x$ 并且 $\sigma \leqslant \tau$. $\forall A \in B_\sigma$, 定义 $\mu = \sigma\chi_A + \tau\chi_{\Omega\setminus A}$, 则 $\mu \in T$,

$$\begin{aligned} x = Ef_\mu &= \int_A f_\sigma \mathrm{d}\mu + \int_{\Omega\setminus A} f_\tau \mathrm{d}\mu \\ &= \int_A f_\sigma \mathrm{d}\mu + Ef_\tau - \int_A f_\tau \mathrm{d}\mu = \int_A f_\sigma \mathrm{d}\mu + x - \int_A f_\tau \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

故 $\int_A f_\sigma \mathrm{d}\mu = \int_A f_\tau \mathrm{d}\mu$. A 可以是 B_σ 中任一集合, 故 $E(f_\tau | B_\sigma) = f_\sigma$. 特别地, 取 $\tau = m$, $\sigma = n$ 即为鞅等式.

作为停时的应用, 我们证明关于鞅的局部收敛定理.

对于 $A, B \in \Sigma$, 记 $B \subset A$ a.e., 若 $\mu(B\setminus A) = 0$. 当 $A \subset B$ a.e., 并且 $B \subset A$ a.e. 时, 记 $A = B$ a.e..

定理 6 若 X 具有 RN 性质, $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是鞅, 记 $\mathrm{d}^* = \sup\|f_n - f_{n-1}\|$, $(f_{-1} \equiv 0)$. 则当 $E\mathrm{d}^* < \infty$ 时, $\{f^* < \infty\} = \{f_n\text{收敛}\}$ a.e..

证明 对于 $\lambda > 0$, 令

$$\tau = \inf\{n : \|f_n\| > \lambda\}, \tag{2.4}$$

则 τ 是停时, 由停止定理, $\{f_{\tau\wedge n}, B_{\tau\wedge n}, n \geqslant 1\}$ 是鞅. 现在,

$$\begin{aligned} \|f_{\tau\wedge n}\| &= \|f_n\|\chi_{\{\tau>n\}} + \|f_\tau\|\chi_{\{\tau\leqslant n\}} \\ &\leqslant \lambda\chi_{\{\tau>n\}} + (\|f_{\tau-1}\| + \|f_\tau - f_{\tau-1}\|)\chi_{\{\tau\leqslant n\}} \\ &\leqslant \lambda + \mathrm{d}^*\chi_{\{\tau\leqslant n\}}, \quad \tau < \infty, \\ \|f_{\tau\wedge n}\| &= \|f_n\| \leqslant \lambda, \quad \tau = \infty. \end{aligned}$$

总之 $E\|f_{\tau\wedge n}\| \leqslant \lambda + E\mathrm{d}^* < \infty$. $(f_{\tau\wedge n}, B_{\tau\wedge n}, n \geqslant 1)$ 是 $L_1(\mu, X)$ 有界鞅, X 的 RN 性质保证了 $f_{\tau\wedge n}$ a.e. 收敛. 特别地, 在 $\{\tau = \infty\}$ 上 $f_{\tau\wedge n} = f_n$, 所以 f_n 在 $\{\tau = \infty\} = \{f^* \leqslant \lambda\}$ 上 a.e. 收敛. 但

$$\{f^* < \infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f^* \leqslant k\}.$$

由此知道 f_n 在 $\{f^* < \infty\}$ 上 a.e. 收敛, $\{f^* < \infty\} \subset \{f_n\text{收敛}\}$, a.e..

相反的包含关系是明显的.

2.3 实值下鞅的应用

实值鞅有两个推广的类型：上鞅和下鞅, 二者又统称为半鞅. 利用它们可以给出某些 Banach 空间的鞅收敛定理从而判定这些空间的 RN 性质.

定义 1 实值适应序列 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 称为下鞅, 若 $E(f_{n+1}|B_n) \geqslant f_n, \forall n \geqslant 0$, 如果相反的不等式成立, 称其为上鞅.

若 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是在 Banach 空间 X 中取值的鞅, 根据鞅性质

$$\|f_n\| = \|E(f_{n+1}|B_n)\| \leqslant E(\|f_{n+1}\| \ |B_n)\,,$$

于是 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是正的实值下鞅.

对于实值下鞅, 若 $\varphi: R \to R$ 是增加凸函数. 由 Jensen 不等式,

$$\varphi(f_n) \leqslant \varphi(E(f_{n+1}|B_n)) \leqslant E(\varphi(f_{n+1}) \ |B_n)\,.$$

于是当 $E|\varphi(f_n)| < \infty$ 时, $(\varphi(f_n), B_n, n \geqslant 0)$ 是下鞅. 若 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是非负下鞅, 取 $\varphi(t) = t^p$, $(t \geqslant 0, p \geqslant 1)$, 则 $(f_n^p, B_n, n \geqslant 0)$ 是下鞅. 特别地, 当 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是鞅时, $(|f_n|^p, B_n, n \geqslant 0)$ 是下鞅.

设 (a,b) 是一有限区间, $x_1, \cdots, x_n$ 是 n 个实数, 记

$$\begin{aligned}
&k_1 = \min\{k : 0 < k \leqslant n, x_k \leqslant a\},\\
&k_2 = \min\{k : k_1 < k \leqslant n, x_k \geqslant b\},\\
&\cdots\cdots\\
&k_{2j-1} = \min\{k : k_{2j-2} < k \leqslant n, x_k \leqslant a\},\\
&k_{2j} = \min\{k : k_{2j-1} < k \leqslant n, x_k \geqslant b\}.
\end{aligned}$$

若 k_{i_0} 是满足以上定义的最后一个下标, 记此后的 $k_i = n+1$. 称使 $k_{2h} < n+1$ 的最大自然数 h 是 $x_1, \cdots, x_n$ 由下而上穿越区间 (a,b) 的次数. 当把 $x_1, \cdots, x_n$ 换为 n 个函数 $f_1(\omega), \cdots, f_n(\omega)$ 时, $H_n = H_n(\omega)$ 也与 ω 有关. 每个 $k_i = k_i(\omega)$ 也与 ω 有关.

引理 1(Doob 上穿不等式) 设 $H_n(\omega)$ 是下鞅 $(f_i, B_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$ 由下而上穿越区间 (a,b) 的次数, 则

$$EH_n(\omega) \leqslant \frac{1}{b-a} E(f_n - a)^+. \tag{3.1}$$

证明 定义

$$i_k = \begin{cases} 0, & 若 k \leqslant k_1 \text{ 或者} k_{2j-1} < k \leqslant k_{2j},\\ 1, & 若 k_{2j} < k \leqslant k_{2j+1}. \end{cases}$$

当 k_{2H_n} 或 k_{2H_n+1} 有定义时都有

$$\sum_{k=1}^{n-1} i_{k+1}(x_{k+1} - x_k) \leqslant (a-b)H_n + (x_n - a)^+.$$

将 $x_1,\cdots,x_n$ 换为 $f_1(\omega),\cdots,f_n(\omega)$ 并且两端积分, 得到

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\{i_{k+1}=1\}} (f_{k+1}-f_k)\mathrm{d}\mu \leqslant (a-b)EH_n + E(f_n-a)^+. \tag{3.2}$$

集合 $\{i_{k+1}=1\}$ 是关于 B_k 可测的. 实际上,

$$\{i_{k+1}=1\} = \bigcup_{1\leqslant j\leqslant[\frac{k}{2}]} (\{k_{2j}(\omega)<k+1\}\backslash\{k_{2j+1}(\omega)<k+1\}),$$

i_{k+1} 由 $f_1,\cdots,f_k$ 确定, 从而关于 B_k 可测. 这说明 (3.2) 左端的积分有意义. 根据下鞅定义得出 (3.2) 左端非负, 从而得出 (3.1).

定理 1(Doob) L_1 有界下鞅 a.e. 收敛于一个可积函数.

证明 设 A 是 f_n 不收敛点的全体, 往证 $\mu(A)=0$.

取 a,b 为任意有理数, $a<b$, 定义

$$A_{ab} = \{\omega : \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega) \leqslant a < b \leqslant \limsup_{n\to\infty} f_n(\omega)\}, \tag{3.3}$$

则 $A=\bigcup\limits_{a,b} A_{ab}$. 若 $\omega\in A_{ab}$, 由 H_n 的定义 $H_n(\omega)\uparrow H(\omega)=\infty$. 故 $A_{ab}\subset\{H(\omega)=\infty\}$. 根据 Fatou 引理和式 (3.1),

$$\begin{aligned} EH &\leqslant \sup_{n\in N} EH_n \leqslant \frac{1}{b-a}\sup_{n\in N} E(f_n-a)^+ \\ &\leqslant \frac{1}{b-a}(\sup_{n\in N}\|f_n\|_1 + |a|) < \infty. \end{aligned} \tag{3.4}$$

所以 $H\in L_1, \mu(H=\infty)=0$. 从而 $\mu(A_{ab})=0, \mu(A)=0$. 不妨设 $f_n\to f$ a.e., 仍由 Fatou 引理得出 f 的可积性,

$$E|f| \leqslant \liminf_{n\to\infty} E|f_n| \leqslant \sup_{n\in N}\|f_n\|_1 < \infty.$$

定理 2(Doob 分解) 每个下鞅 $(f_n,B_n,n\geqslant 0)$ 有分解 $f_n=g_n+A_n$, 其中 $(g_n,B_n,n\geqslant 0)$ 是鞅, A_n 关于 B_{n-1} 可测并且 $0=A_0\leqslant A_1\leqslant\cdots$, 这种分解是唯一的 $(B_{-1}=\{\varnothing,\Omega\})$. 此时 f_n L_1 收敛当且仅当 $(g_n,B_n,n\geqslant 0)$ 正则并且 $A_\infty=\lim\limits_{n\to\infty} A_n\in L_1$.

证明 1° 定义 $A_0=0$,

$$A_n = \sum_{i=2}^{n} (E(f_i\,|B_{i-1}) - f_{i-1}), \quad n\geqslant 1, \tag{3.5}$$

则 A_n 关于 B_{n-1} 可测. 由 f 的下鞅性质, $A_1 \geqslant 0 = A_0$. 从而

$$A_n = A_{n-1} + (E(f_n|B_{n-1}) - f_{n-1}) \geqslant A_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

令 $g_n = f_n - A_n \ (n \geqslant 1)$, 由 $(A_n, n \geqslant 0)$ 的可料性,

$$\begin{aligned} E(g_n|B_{n-1}) &= E(f_n|B_{n-1}) - A_n \\ &= (E(f_n|B_{n-1}) - f_{n-1} - A_n) + f_{n-1} \\ &= -A_{n-1} + f_{n-1} = g_{n-1}, \end{aligned}$$

$(g_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是鞅.

若另有分解 $f_n = g'_n + A'_n, g'_n, A'_n$ 的性质如同 g_n 和 A_n, 则

$$f_{n+1} - f_n = g_{n+1} - g_n + A_{n+1} - A_n,$$

两边关于 B_n 取条件期望, $E(f_{n+1} - f_n \,|B_n) = A_{n+1} - A_n$. 同样的此式对于 $(A'_n, n \geqslant 0)$ 也成立. 从而 $A_{n+1} - A_n = A'_{n+1} - A'_n$, 但 $A_0 = A'_0 = 0$. 故 $A_n = A'_n (n \geqslant 1)$. 于是 $g_n = f_n - A_n = f_n - A'_n = g'_n (n \geqslant 1)$.

若 $(g_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是正则鞅, $g_n = E(g\,|B_n), n \geqslant 0, g \in L_1$ 并且 $A_\infty \in L_1$. 由 Levy 定理知道 $\|g_n - g\|_1 \to 0$, 又 $0 \leqslant A_n \leqslant A_\infty$. 由 Lebesgue 控制收敛定理, $\|A_n - A_\infty\|_1 \to 0$, 从而 $f_n = g_n + A_n \ L_1$ 收敛.

反之, 若 $f_n \ L_1$ 收敛于 f, 注意到 A_n 非负, 故 $g_n \leqslant f_n$ 以及 $g_n^+ \leqslant f_n^+$. 从而

$$\sup_{n \in N} Eg_n^+ \leqslant \sup_{n \in N} Ef_n^+ \leqslant \sup_{n \in N} \|f_n\|_1 < \infty, \tag{3.6}$$

注意对于下鞅, $E\,|g_n| = Eg_n^+ + Eg_n^- = 2Eg_n^+ - Eg_n = 2Eg_n^+ - Eg_1$, 故 (3.6) 意味着 $\sup\limits_{n \in N} \|g_n\|_1 < \infty$. 现在 $A_n = f_n - g_n \leqslant f_n^+ - g_n$, 由 Fatou 引理,

$$EA_\infty \leqslant \sup_{n \in N} EA_n \leqslant \sup_{n \in N} Ef_n^+ - Eg_n = \sup_{n \in N} Ef_n^+ - Eg_1 < \infty.$$

所以 $A_\infty \in L_1$, 并且

$$\|g_n - (f - A_\infty)\|_1 \leqslant \|f_n - f\|_1 + \|A_n - A_\infty\|_1 \to 0,$$

$g_n \ L_1$ 收敛. 所以作为鞅, $(g_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是正则的.

定理 3　设 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是下鞅, 则

(i) $\forall \tau, \sigma \in T, \sigma \leqslant \tau, \ \ f_\sigma \leqslant E(f_\tau\,|B_\sigma)$;

(ii) (选样性质) 若 $\tau_n \in T, \{\tau_n\}$ 是增加的, $(f_{\tau_n}, B_{\tau_n}, n \geqslant 0)$ 是下鞅;

(iii) (停止性质) $\forall\tau$, $(f_{\tau\wedge n}, B_{\tau\wedge n}, n\geqslant 0)$ 是下鞅;

(iv) 适应过程 $(f_n, B_n, n\geqslant 0)$ 是下鞅当且仅当 $(Ef_\tau, \tau\in T)$ 随 τ 递增.

证明

1° 设 $n_0\geqslant\max\{\tau,\sigma\}$, 则

$$E|f_\sigma| = \sum_{i=1}^{n_0}\int_{\{\sigma=i\}}|f_i(\omega)|\mathrm{d}\mu\leqslant\sum_{i=1}^{n_0}\|f_i\|_1<\infty,$$

故 $f_\sigma\in L_1$. 同样地, $f_\tau\in L_1$. 由定理 2, 作分解 $f_n = g_n + A_n(n\geqslant 0)$, 显然对于任何停时 $\tau, f_\tau = g_\tau + A_\tau$ 并且 $A_\tau\geqslant A_\sigma$, 从而

$$E(f_\tau|B_\sigma) = E(g_\tau|B_\sigma) + E(A_\tau|B_\sigma)\geqslant g_\sigma + A_\sigma = f_\sigma.$$

2° 由 (i) 直接得到 (ii), (iii). 对于 (iv), 必要性是明显的. 类似于 2.2 节定理 5(iv) 的证明方法用于下鞅得到充分性. 定理证毕.

对于鞅或者下鞅 $f = (f_n, B_n, n\geqslant 0)$, 记

$$f_n^*(\omega) = \sup_{0\leqslant k\leqslant n}|f_k(\omega)|,\quad f^*(\omega) = \sup_{n\geqslant 1}f_n^*(\omega),$$

称 f^* 是 f 的极大函数. 对于 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 称 $\|f\|_p = \sup\limits_{0\leqslant n<\infty}\|f_n\|_p$ 是 f 的 p 范数.

定理 4 设 f 是非负下鞅, 则

(i)
$$\lambda\mu(f_n^*>\lambda)\leqslant\int_{\{f_n^*>\lambda\}}f_n\mathrm{d}\mu,\ \forall\,\lambda>0, \tag{3.7}$$

并且

$$\lambda\mu(f^*>\lambda)\leqslant\|f\|_1; \tag{3.8}$$

(ii) 若 $1<p<\infty$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, 则

$$\|f^*\|_p\leqslant q\|f\|_p; \tag{3.9}$$

(iii)
$$\|f^*\|_1\leqslant\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}(1+\sup_{n\geqslant 1}E(|f_n|\log^+|f_n|)), \tag{3.10}$$

其中 $\log^+ a = \begin{cases}\log a, & a\geqslant 1;\\ 0, & 0<a<1.\end{cases}$

证明 1° 取 $\tau_\lambda = \inf\{n: f_n(\omega)>\lambda\}$, 则

$$\begin{aligned}\lambda\mu\{\tau_\lambda\leqslant n\} &= \lambda\sum_{i=1}^{n}\mu\{\tau_\lambda = i\}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{\{\tau_\lambda=i\}}f_i\mathrm{d}\mu\\ &\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{\{\tau_\lambda=i\}}f_n\mathrm{d}\mu = \int_{\{\tau_\lambda\leqslant n\}}f_n\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

实际上, $\{\tau_\lambda \leqslant n\} = \{f_n^* > \lambda\}$, 故 (3.7) 成立. 令 $n \to \infty$, 便得到 (3.8).

2° 为证明 (ii), 让我们先应用 Fubini 定理得到一个等式. 设 $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是连续增加函数, $\Phi(0) = 0$. 则对于非负函数 h,

$$E\Phi(h) = \int_\Omega \int_0^h \mathrm{d}\Phi(\lambda)\mathrm{d}\mu = \int_0^\infty \int_\Omega \chi_{\{h>\lambda\}}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\Phi(\lambda)$$
$$= \int_0^\infty \mu\{h > \lambda\}\mathrm{d}\Phi(\lambda). \tag{3.11}$$

现在由 1° 的证明,

$$\lambda E\chi_{\{f_n^*>\lambda\}} = \lambda\mu\{f_n^* > \lambda\} \leqslant E(f_n\chi_{\{f_n^*>\lambda\}}), \quad \lambda > 0, n \geqslant 0.$$

在 (3.11) 中以 $\Phi(t) = t^p$ 代入, 则

$$Ef_n^{*p} = \int_0^\infty \mu\{f_n^* > \lambda\}\mathrm{d}\lambda^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}E\chi_{\{f_n^*>\lambda\}}\mathrm{d}\lambda$$
$$\leqslant p\int_0^\infty \lambda^{p-2}E(f_n\chi_{\{f_n^*>\lambda\}})\mathrm{d}\lambda = \frac{p}{p-1}\int_\Omega f_n\mathrm{d}\mu\int_0^\infty \chi_{\{f_n^*>\lambda\}}\mathrm{d}\lambda^{p-1}$$
$$= q\int_\Omega f_n(f_n^*)^{p-1}\mathrm{d}\mu \leqslant q\left\|f_n\right\|_p \left\|f_n^*\right\|_p^{p/q}.$$

后者应用了 Hölder 不等式. 由此得到 $\left\|f_n^*\right\|_p \leqslant q\left\|f_n\right\|_p$. 令 $n \to \infty$, 得到 (3.9).

3° 在 (3.11) 中取 $\Phi(t) = (t-1)^+$, 则 $\Phi(t) = \int_0^t \chi_{\{s\geqslant 1\}}\mathrm{d}s$. 由 (3.9) 和 (3.11),

$$E(f_n^* - 1) \leqslant E(f_n^* - 1)^+ = \int_0^\infty \mu\{f_n^* > \lambda\}\mathrm{d}\Phi(\lambda)$$
$$\leqslant \int_0^\infty \frac{\chi_{\{\lambda\geqslant 1\}}}{\lambda}\int_{\{f_n^*>\lambda\}} f_n\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda$$
$$= \int_\Omega f_n\int_1^{f_n^*}\frac{1}{\lambda}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f_n\log^+ f_n^*\mathrm{d}\mu.$$

注意对于 $a > 0, b > 0, a\log^+ b \leqslant a\log^+ a + be^{-1}$, 故由上式得出

$$Ef_n^* \leqslant 1 + E(|f_n|\log^+|f_n|) + e^{-1}Ef_n^*,$$

由此即得 (3.10).

下面我们来确定一些空间的 RN 性质.

定理 5(Scalora)　设 $(f_n, B_n, n\geqslant 0)$ 是取值于自反空间X 的鞅, 并且 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\left\|f_n\right\|_1 < \infty$, 则存在可测函数 f, 使得 $f_n \to f$,w- a.e..

证明 f_n 强可测, 故不妨设 $f_n(\Omega\backslash A_n)$ 可分, 其中 $\mu(A_n)=0\ (n\geqslant 0)$. $(\|f_n\|, B_n, n\geqslant 0)$ 是下鞅并且 L_1 有界, 由定理 1 知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n(\omega)\|$ a.e. 存在. 不妨设 $\|f_n(\omega)\|$ 在 $\Omega\backslash A_\infty$ 上极限处处存在, 其中 $\mu(A_\infty)=0$. 记 $A=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}A_n\cup A_\infty$ 并且令 $E=\overline{\operatorname{span}}\{f_n(\omega):\omega\in\Omega\backslash A, n\geqslant 0\}$,$E$ 是 X 的可分闭子空间, 从而是自反空间, 同时 E^* 可分.

对于每个 $x^*\in E^*, (x^*f_n, B_n, n\geqslant 0)$ 是 L_1 有界鞅, 由定理 1, 存在函数 $Z_{x^*}, x^*f_n\to Z_{x^*}$a.e. 设例外集为 $A_{x^*_k}, \mu(A_{x^*})=0$. E^* 可分, 不妨设 $\{x^*_k: k\geqslant 1\}$ 在 E^* 中稠密. 对于每个 x^*_k, 除去例外集 $A_{x^*_k}, x^*_kf_n\to Z_{x^*_k}$ 处处成立. 记 $B=A\cup\left(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}A_{x^*_k}\right)$, 则 $\mu(B)=0$. 于是 $f_n(\omega)$ 在 $\Omega\backslash B$ 上是 w-Cauchy 序列.

自反空间是 w 序列完备的. 故存在 $f(\omega)\in E, f(\omega)=w-\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\omega)$. 作为函数 $f:\Omega\to E, f$ 是 f_n 关于 E^* 的 w- a.e. 极限, f 是可测的 (1.2 节定理 5). 又 $x^*\in X^*, x^*|_E\in E^*$, 所以实际上, 在 X 中 $f_n\to f, w$-a.e..

由 Chatterji 定理知道, 这里的收敛性实际上是 (强)a.e. 收敛的.

由证明过程知道下面推论成立.

推论 1 定理 6 中的空间换为 w 序列完备, 共轭空间 X^* 可分的 Banach 空间, 结论仍然成立.

推论 2 自反空间具有 RN 性质, 共轭空间可分的弱序列完备空间具有 RN 性质.

定理 6 若 X 是可分共轭空间, $(f_n, B_n, n\geqslant 0)$ 是 X 值鞅, $\sup\limits_{n\in N}\|f_n\|_1<\infty$, 则存在可测函数 f, 使得 $f_n\to f$ a.e..

证明 此定理的证明与定理 5 相仿.

1° 设 $X=Y^*, X$ 可分, 从而 Y 可分. Y 中存在可数稠密集$\{y_k\}$, 定义

$$Q_n(y)=f_n(\omega)y,\quad \forall\, y\in Y. \tag{3.12}$$

类似于定理 5 的证明, 至多除去一个零测度集 A, $\{Q_n\}$ 在整个空间 Y 上收敛, 即 $f_n(\omega)$ 是几乎处处 w^* Cauchy 的.

2° 我们证明当 $\omega\in\Omega\backslash A$ 时, 存在 $f(\omega)\in X$, 使得 $f_n(\omega)y\to f(\omega)y$. 实际上, 固定 $\omega\in\Omega\backslash A$, 对于 $\forall\, y\in Y$, 定义 $l(y)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\omega)y, l(y)$ 关于 y 是线性的, 由于 $\{\|f_n(\omega)\|, n\geqslant 0\}$ 有界, 故

$$|l(y)|=\lim_{n\to\infty}|f_n(\omega)y|\leqslant\sup_{n\in N}\|f_n(\omega)\|\ \ \|y\|.$$

于是 $l\in Y^*$, 记 $l=f(\omega)\in X$, 便得出所说的结论.

3° 容易知道 f 是可测的. 剩下需要证明上述序列的 w^* 收敛实际上是 (强)a.e.

收敛的. 为此只须修正 Chatterji 定理, 即把其中的 w 改为 w^* 收敛. 这样做的合理性可直接验证.

推论 3(Dunford-Pettis) 可分共轭空间具有 RN 性质.

定理 7(Uhl) (i) 若 X 的每个可分子空间同构于可分共轭空间的子空间, 则 X 具有 RN 性质;

(ii) 若 X 的每个可分子空间有可分共轭, 则 X^* 具有 RN 性质.

证明 (i) 是上述推论的明显结论. 现证 (ii), 若 Y 是 X^* 的可分子空间, 只须证明 Y 同构于可分共轭空间的子空间. 设 $\{y_n : n \geqslant 1\}$ 是空间 Y 的单位球面 $S(Y)$ 中的可数稠密子集, $\{x_{ni}, i \geqslant 1\} \subset X$ 并且 $\|x_{ni}\| \leqslant 1$, $\lim\limits_{i\to\infty} y_n(x_{ni}) = \|y_n\| = 1$, 则对于每个 $y \in Y$,

$$\|y\| = \sup\{y(x) : x \in W, \|x\| \leqslant 1\},$$

其中 $W = \overline{\text{span}}\{x_{ni} : n, i \geqslant 1\}$. 映射 $y \to y|_W$ 是 Y 到 W^* 的子空间的等距同构. 由假设 W^* 可分. 由 (i) 知, W^* 具有 RN 性质. 所以 Y 有 RN 性质. Y 是 X^* 的任一可分子空间, 从而 X^* 具有 RN 性质.

推论 4 对于任何指标集 $\Gamma, l_1(\Gamma)$ 具有 RN 性质.

证明 $l_1(\Gamma)$ 的每个可分子空间本身是共轭空间 l_1 的子空间. 结论由定理 7 (i) 得到.

定理 8(Kuo) 设 X 是 Banach 空间, 其共轭空间是某个弱紧生成(WCG) 空间 Y 的子空间, 则 X^* 具有 RN 性质.

特别地, 每个 WCG 的共轭空间具有 RN 性质.

证明 由定理 7(ii), 只须证明对于 X 的每个可分闭子空间 Z, Z^* 是可分的. 若 Z 是这样的空间, 取 Z 的单位球面中的稠密集 $\{z_n, n \geqslant 1\}$, 设 $\{e_n, n \geqslant 1\}$ 是 l_1 的标准基. 定义线性算子 $T : l_1 \to Z, T(e_i) = z_i, i \geqslant 1$. T 是 l_1 到 Z 上的连续线性算子. 由开映射定理知 T 是开的, 从而 $T^* : Z^* \to l_\infty$ 是同构. 因为 Z 是 X 的子空间, 所以 $Z^* = QX^*, Qx^* = x^*|_z$. 于是 $T^*Q : X^* \to l_\infty$ 是有界线性算子. 但 l_∞ 是内射 Banach 空间 (l_∞ 是内射空间, 若对于任何 Banach 空间 X 和 X 的任何子空间 Y, 有界线性算子 $T : Y \to l_\infty$ 有到 X 的有界线性延拓). 现在 X^* 是 Y 的子空间, 故可将 T^*Q 延拓为从 Y 到 L_∞ 的有界线性算子, 仍记为 T^*Q. 由于连续线性算子把 w 紧集映射为 w 紧集, 所以 $T^*Q(Y)$ 是 l_∞ 中的 w 紧集. 由于 l_∞ 中的 w 紧集是 w^* 紧集并且是可度量化的, 于是 w 可分, 从而范数可分, 即 $T^*Q(Y)$ 是范数可分的. $T^*(Z^*) \subset T^*Q(Y)$, 于是 $T^*(Z^*)$ 和 $Z^* = (T^*)^{-1}(T^*(Z^*))$ 可分.

定理得证.

定理 9(Chatterji) 若 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是在 Banach 空间 X 的弱紧集 K 中取值的鞅, 则 f_n a.e. 收敛.

证明 由 Krein-Smulian 定理, 可设 K 是闭凸集或绝对闭凸集. 不失一般性, 假设 K 是属于 X 的某个可分子空间的. 这保证了 X 的共轭空间中有 X 的可数确定集, 即存在 $x_k^*, \|x_k^*\| = 1$, $\|x\| = \sup\limits_{k\geqslant 1} |x_k^*(x)|, \forall\, x \in X$.

由于 w 紧集是 w 闭集和 w 序列闭集, 因此 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 可以看成在一个 w 序列完备并且共轭空间可分的 Banach 空间中取值的鞅. 由推论 2, 这种空间具有 RN 性质. 又弱紧集有界, 从而 f_nL_1 有界, 故 a.e. 收敛.

引理 2 设 X 是 Banach 空间, X_n 是 X 的闭子空间且具有 RN 性质, $T_n: X \to X_n$ 是一列有界线性算子. 若 T_n 满足:

(i) $T_nT_{n+1} = T_{n+1}T_n = T_n$;

(ii) $\forall x \in X, \lim\limits_{n\to\infty} T_nx = x$;

(iii) 若 $\{y_n, n \geqslant 1\} \subset X$ 是有界序列并且 $T_ny_{n+1} = y_n$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在, 则 X 具有 RN 性质.

证明 设 $F: \Sigma \to X$ 是有界变差 μ 连续向量测度. 由 (ii) 和 X_n 的 RN 性质, $\forall\, A \in \Sigma$,

$$F(A) = \lim_{n\to\infty} T_nF(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \mathrm{d}\mu, \tag{3.13}$$

其中 $f_n(\omega) \in X_n$. T_n 是有界算子, 从而 $T_nF(A)$ 是有界变差 μ 连续测度, 故存在 $f_n \in L_1(\mu, X_n)$. 由 (i) 对于任何 $A \in \Sigma$,

$$\int_A f_n \mathrm{d}\mu = T_nF(A) = T_nT_{n+1}F(A) = T_n \int_A f_{n+1}\mathrm{d}\mu = \int_A T_nf_{n+1}\mathrm{d}\mu,$$

于是 $f_n = T_nf_{n+1}$ a.e.. 为了说明 f_n 的有界性, 考虑实测度 $\|F\|: \Sigma \to R$. 记 $g = \dfrac{\mathrm{d}\|F\|}{\mathrm{d}\mu}$, 则 $g \in L_1$. 取集合 $B_k, B_k \subset B_{k+1}$, $k \geqslant 1, \Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k, g$ 在每个 B_k 上有界. 例如, $g(\omega) \leqslant M_k, \omega \in B_k$, 从而 $\|F\|(A \cap B_k) \leqslant M_k\mu(A \cap B_k)$. 此时必有 $\|f_n(\omega)\| \leqslant M_k, \omega \in B_k, n \geqslant 1$. 由 (iii), 在 B_k 上, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$, a.e.. 实际上, 在整个 Ω 上, 极限 a.e. 成立, f 可测. 由控制收敛定理,

$$F(A \cap B_k) = \lim_{n\to\infty} \int_{A\cap B_k} f_n \mathrm{d}\mu = \int_{A\cap B_k} f\mathrm{d}\mu.$$

由 F 的有界变差性质知道, $f \in L_1(\mu, X)$ 并且 $F(A) = \displaystyle\int_A f\mathrm{d}\mu, A \in \Sigma$. F 具有 RN 性质.

回忆 Banach 空间 X 的 Schauder 基$\{x_n, n \geqslant 1\}$. 称 $\{x_n, n \geqslant 1\}$是有界完备基, 若对于任何序列 $\{a_n\}$, 当 $\sup \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} a_ix_i\right\| < \infty$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ix_i$ 是按范数收敛的. 此时令

$T_n x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \forall x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, 则 $\{T_n\}$ 满足引理中叙述的条件. 于是作为推论下面定理成立.

定理 10(Dunford, Morse) 若 Banach 空间 X 具有有界完备基, 则 X 具有 RN 性质.

2.4 渐近鞅及其收敛性

定义 1 可积适应序列 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 称为渐近鞅, 若极限 $\lim\limits_{\tau \in T} Ef_\tau$ 存在, 这里 T 是关于 $(B_n, n \geqslant 0)$ 的有界停时全体. $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 称为一致渐近鞅, 若

$$\lim_{\tau,\sigma \in T, \tau \geqslant \sigma} \|E(f_\tau | B_\sigma) - f_\sigma\|_1 = 0. \tag{4.1}$$

$(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 称为一致势,若 $\lim\limits_{\tau \in T} \|f_\tau\|_1 = 0$.

适应序列 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 称为是 (B) 有界的, 若 $\sup\limits_{\tau \in T} E\|f_\tau\| < \infty$.

由定义直接得出每个一致势是一致渐近鞅. 容易验证若 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是实值渐近鞅, 则 $(f_n^+, B_n, n \geqslant 0)(f_n^-, B_n, n \geqslant 0)$ 也是渐近鞅. 从而每个实值渐近鞅是一致渐近鞅.

定理 1(极大引理) 若 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是任一可积适应序列, 则 $\forall \lambda > 0$, 极大函数 $f^*(\omega) = \sup\limits_{n \geqslant 1} \|f_n(\omega)\|$ 满足

$$\lambda \mu\{f^* > \lambda\} \leqslant \sup_{\tau \in T} E\|f_\tau\|. \tag{4.2}$$

证明 $\forall k \geqslant 1$, 定义

$$\sigma = \inf\{i \leqslant k : \|f_i(\omega)\| > \lambda\}, \quad \inf \varnothing = k+1.$$

记 $A_k = \{\omega : \sup\limits_{0 \leqslant i \leqslant k} \|f_i(\omega)\| > \lambda\}$, 易知 $\sigma \in T$ 并且

$$\lambda \mu(A_k) \leqslant \int_{A_k} \|f_\sigma\| \mathrm{d}\mu \leqslant E\|f_\sigma\| \leqslant \sup_{\tau \in T} E\|f_\tau\|,$$

令 $k \to \infty$ 即得到所要的结论.

定理 2 对于任何可积适应序列 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$, 当 $(f_\tau, \tau \in T)L_1(\mu, X)$ 收敛时, f_n a.e. 收敛. 特别地每个一致势 a.e. 收敛.

证明 $(f_\tau, \tau \in T)$ 是 $L_1(\mu, X)$ 中的 Cauchy 网, 取 $\varepsilon = 2^{-2k}$, 存在 $n_k \in N, n_k \uparrow \infty$, 使得当 $\tau \in T, \tau \geqslant n_k$ 时,

$$\|f_\tau - f_{n_k}\|_1 < 2^{-2k}. \tag{4.3}$$

记 $U_n^{(k)} = f_n - f_{n_k}(n \geqslant n_k)$, 考虑 $(U_n^{(k)}, B_n, n \geqslant n_k)$, 则 $U_\tau^{(k)} = f_\tau - f_{n_k}$, $\tau \geqslant n_k$. (4.3) 表明 $(U_n^{(k)}, B_n, n \geqslant n_k)$ 是 (B) 有界的. 由极大引理,

$$\mu(\omega : \sup_{n \geqslant n_k} \left\| U_n^{(k)}(\omega) \right\| \geqslant \frac{1}{2^k}) \leqslant 2^k \sup_{\tau \geqslant n_k} \left\| U_\tau^{(k)} \right\|_1 \leqslant 2^{-k}.$$

令 $A_k = \{\omega : \sup_{n \geqslant n_k} \left\| U_n^{(k)}(\omega) \right\| \geqslant \frac{1}{2^k}\}, B_j = \bigcup_{k \geqslant j} A_k (j \geqslant 1)$, 则

$$\mu(B_j) \leqslant \sum_{k \geqslant j} \mu(A_k) \leqslant \sum_{k \geqslant j} 2^{-k} = 2^{1-j}.$$

当 $\omega \notin B_j$ 时, $(f_n(\omega), n \geqslant 0)$ 是 Cauchy 序列, 从而是收敛序列. $\mu(B_i)$ 可任意小, 于是 f_n a.e. 收敛.

定理 3(Riesz 分解) 设 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是一致渐近鞅, 则 $f_n = g_n + h_n$, 其中 $(g_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是鞅, $(h_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是一致势. 这种分解是唯一的, 此外若 $\{f_n\}$ L_1 有界, 则 $\{g_n\}$ 也是.

证明 对于每个 $n \in N$, 当 $i \geqslant j \geqslant n$ 时, 由定义,

$$\begin{aligned} \|E(f_i \,|B_n) - E(f_j \,|B_n)\|_1 &= \|E((E(f_i \,|B_j) - f_j) \,|B_n)\|_1 \\ &\leqslant \|E(f_i \,|B_j) - f_j\|_1 \to 0 (i, j \to \infty), \end{aligned}$$

于是 $(E(f_i \,|B_n), i \geqslant n)$ 是 $L_1(\mu, X)$ Cauchy 序列. 记 $g_n = \lim_{i \to \infty} E(f_i \,|B_n)$, 显然 g_n 关于 B_n 可测并且 $g_n \in L_1(\mu, X)$. 当 i 足够大时, 由 $L_1(\mu, X)$ 收敛性,

$$E(g_{n+1} \,|B_n) = E(\lim_{i \to \infty} E(f_i \,|B_{n+1}) \,|B_n) = \lim_{i \to \infty} E(f_i \,|B_n) = g_n.$$

所以 $(g_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是鞅. 对于 $h_n = f_n - g_n$, 显然 $h_\sigma = f_\sigma - g_\sigma$. 若 $\varepsilon > 0$, 一方面由一致渐近鞅定义, 取 n_0 使得 $\tau \geqslant \sigma \geqslant n_0$ 时,

$$\|E(f_\tau \,|B_\sigma) - f_\sigma\| < \varepsilon/2.$$

另一方面不难验证, 在 $L_1(\mu, X)$ 范数意义下 $g_\sigma = \lim_{i \to \infty} E(f_i \,|B_\sigma)$. 取 $i \geqslant \sigma$ 足够大, 以至于 $\|g_\sigma - E(f_i \,|B_\sigma)\|_1 < \varepsilon/2$, 则

$$E\|h_\sigma\| = E\|f_\sigma - g_\sigma\| \leqslant E\|f_\sigma - E(f_i \,|B_\sigma)\| + E\|E(f_i \,|B_\sigma) - g_\sigma\| < \varepsilon.$$

$(h_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是一致势.

若 $f_n = g_n' + h_n'$ 是另一分解, 其中 (g_n') 是鞅, (h_n') 是一致势. 由鞅性质,

$$\|g_n - g'_n\|_1 \leqslant \|g_{n+1} - g'_{n+1}\|_1 \leqslant \cdots \leqslant \|g_{n+k} - g'_{n+k}\|_1 .$$

另一方面,

$$\|g_{n+k} - g'_{n+k}\|_1 = \|h_{n+k} - h'_{n+k}\|_1 \to 0(k \to \infty).$$

两式一起说明 $\|g_n - g'_n\|_1 = 0$, 即 $g_n = g'_n$ a.e.. 于是 $h_n = h'_n$ a.e. $(n \geqslant 0)$.

若 $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|f_n\|_1 < \infty$, 则由 $\|E(f_i\,|B_n)\|_1 \leqslant \|f_i\|_1$ 知道

$$\sup_{n\geqslant 1} \|g_n\|_1 \leqslant \sup_{i\geqslant 1} \|f_i\|_1 < \infty.$$

推论 1 设 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是一致渐近鞅, 若 $\|f_n - f\|_1 \to 0$, 则 $f_n \to f$ a.e..

证明 设 $f_n = g_n + h_n$ 是 f 的 Riesz 分解, 则 $\|h_\tau\|_1 \to 0$, 故 $h_n \to 0$ a.e.. 此时 $\|g_n - f\|_1 \to 0$. 故 $g_n \to g$ a.e., 从而 $f_n \to f$ a.e..

定理 4(Bellow) 若 X 具有 RN 性质, 则每个 $L_1(\mu, X)$ 有界一致渐近鞅 a.e. 收敛.

证明 设 f 是 $L_1(\mu, X)$ 有界一致渐近鞅, 作 Riesz 分解 $f_n = g_n + h_n$, 其中 (g_n) 是 $L_1(\mu, X)$ 有界鞅, (h_n) 是一致势. X 具有 RN 性质, 故 g_n a.e. 收敛. 由定理 2, $h_n \to 0$ a.e. 从而 f_n a.e. 收敛.

定理 5 设 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是可积适应序列, $f^* \in L_1$, 则下面条件 (i) ⇒ (ii) 成立. 若 X 具有 RN 性质, 二者等价.

(i) f_n a.e. 收敛;

(ii) $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是一致渐近鞅.

证明 1° 不妨设 $f_n \to f_\infty$ a.e., 于是 $\lim\limits_{\tau\in T} f_\tau \to f_\infty$ a.e. 并且 $\|f_\tau(\omega)\| \leqslant f^*(\omega)$. 由控制收敛定理知, $\lim\limits_{\tau\in T} \|f_\tau - f_\infty\|_1 = 0$. 若 $\tau, \sigma \in T$, 则

$$\|E(f_\tau\,|B_\sigma) - f_\sigma\|_1 \leqslant \|f_\tau - f_\sigma\|_1 \leqslant \|f_\tau - f_\infty\|_1 + \|f_\sigma - f_\infty\|_1 \to 0,$$

故 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是一致渐近鞅.

2° 设 X 具有 RN 性质, 由 $f^* \in L_1$ 知道, f_n 是 $L_1(\mu, X)$ 有界的, 定理 4 保证了 f_n a.e. 收敛.

推论 2 设 X 是 Banach 空间, 则 X 具有 RN 性质, 当且仅当对于任一测度空间 (Ω, Σ, μ) 和递增子 σ 代数序列 $(B_n, n \geqslant 1)$, 每个 $L_1(\mu, X)$ 有界一致渐近鞅 a.e. 收敛.

定义 2 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 可积适应序列 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 称为 p 拟鞅, 若

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|E(f_{n+1}\,|B_n) - f_n\|_p < \infty. \tag{4.4}$$

例 每个 p 拟鞅是一致渐近鞅. 每个实值 L_1 有界上鞅或下鞅是 1 拟鞅.

设 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是拟鞅, 则 $\forall A \in B_n$,

$$\left\|\int_A f_m \mathrm{d}\mu - \int_A f_n \mathrm{d}\mu\right\| \leqslant \sum_{i=n}^{m-1}\left\|\int_A f_{i+1}\mathrm{d}\mu - \int_A f_i \mathrm{d}\mu\right\|$$

$$\leqslant \sum_{i=n}^{m-1}\int_A \|E(f_{i+1}\,|B_i) - f_i\|\mathrm{d}\mu. \tag{4.5}$$

$\forall \tau, \sigma \in T$, 若 $k \geqslant \tau \geqslant \sigma \geqslant n_0$, 当 $A \in B_\sigma$ 时, 利用 (2.4.5),

$$\left\|\int_A f_\sigma \mathrm{d}\mu - \int_A f_k \mathrm{d}\mu\right\| \leqslant \sum_{i=n_0}^{k}\sum_{j=i}^{k-1}\int_{A\cap\{\sigma=i\}}\|E(f_{j+1}\,|B_j) - f_j\|\mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \sum_{j=n_0}^{k=1}\int_A \|E(f_{j+1}\,|B_j) - f_j\|\,\mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \sum_{j=n_0}^{\infty}\int_A \|E(f_{j+1}\,|B_j) - f_j\|\,\mathrm{d}\mu,$$

同样的式子对于 τ 也成立, 于是

$$\left\|\int_A f_\tau \mathrm{d}\mu - \int_A f_\sigma \mathrm{d}\mu\right\| \leqslant 2\sum_{j=n_0}^{\infty}\int_A \|E(f_{j+1}\,|B_j) - f_j\|\,\mathrm{d}\mu,$$

$$\|E(f_\tau\,|B_\sigma) - f_\sigma\|_1 = \sup_\pi \sum_{A\in\pi}\left\|\int_A f_\tau \mathrm{d}\mu - \int_A f_\sigma \mathrm{d}\mu\right\|$$

$$\leqslant 2\sum_{j=n_0}^{\infty}\|E(f_{j+1}\,|B_j) - f_j\|_p,$$

其中 π 是 Ω 到 B_σ 的任一分划, 由此知道 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是一致渐近鞅.

推论 若 X 具有 RN 性质, 则每个 $L_p(\mu, X)$ 有界 p 拟鞅 a.e. 收敛.

定理 6(Riesz 分解) 每个 p 拟鞅有分解 $f_n = g_n + h_n$, 其中 $(g_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是鞅, $(h_n, B_n, n \geqslant 0)$ 满足

$$\|h_n\|_p \leqslant \sum_{i=n}^{\infty}\|E(f_{n+1}\,|B_n) - f_n\|_p, \tag{4.6}$$

从而 $L_p(\mu, X)$ 收敛于 0.

证明　$\forall n$, 当 $j \geqslant i \geqslant n$ 时

$$\|E(f_j\,|B_n) - E(f_i\,|B_n)\|_p \leqslant \left\|E\left(\sum_{k=i}^{j-1}(E(f_{k+1}\,|B_h) - f_k)\,|B_n\right)\right\|_p \leqslant \sum_{k=i}^{j-1}\|E(f_{k+1}\,|B_k) - f_k)\|_p,$$

于是 $\{E(f_i\,|B_n), i \geqslant n\}$ 是 $L_p(\mu, X)$ 中的 Cauchy 序列. 不妨设 $g_n = \lim\limits_{i\to\infty} E(f_i\,|B_n)$, 由于

$$E(g_{n+1}\,|B_n) = E(\lim_{i\to\infty} E(f_i\,|B_{n+1})\,|B_n) = \lim_{i\to\infty} E(f_i\,|B_n) = g_n ,$$

故 $(g_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是鞅. 令 $h_n = f_n - g_n$, 则

$$\|h_n\|_p = \lim_{i\to\infty}\|f_n - E(f_i\,|B_n)\|_p \leqslant \lim_{i\to\infty}\sum_{j=n}^{i-1}\|E(f_{j+1}\,|B_j) - f_j\|_p \leqslant \sum_{i=n}^{\infty}\|E(f_{j+1}\,|B_j) - f_j\|_p.$$

定理得证.

第 2 章评注:

本章着重叙述了鞅收敛性质与值空间 RN 性质的关系, 同时也为后面的研究 (如关于鞅的停时性质和鞅的基本不等式) 提供了基本工具. 关于 B 值鞅的收敛定理和具有 RN 性质空间的判定本来出自几篇不同的论文并且运用不同的方法, 我们统一使用鞅方法来处理, 结果相当简捷. 这无疑是对于用鞅方法处理 Banach 空间几何学问题的一个鼓舞.

2.1 节定理 3、6 都属于文献 [61], 它第一次将 RN 导数与 B 值鞅的收敛性联系在一起, 接着的几个结论和判定都成为它的直接推论. 不过这并非将二者联系起来的唯一途径. 在这方面可以参看文献 [11]、[90]、[196].

2.2 节中罗列的有关停时的性质都容易从标量值情况转过来.

2.3 节定理 1 见文献 [81], 此定理堪称用纯代数方法解决随机问题的典范. 定理 4 是关于下鞅的几个经典不等式, 它们仍属于 Doob. 关于什么样的空间具有 RN 性质的问题实际上很早就引起人们的重视, 1935 年 Birkhoff 证明了 Hilbert 空间有 RN 性质, 1936 年 Clarkson[65] 证明了一致凸空间有 RN 性质, 1936 年 Dunford 与 Morse 证明了具有有界完备基的空间具有 RN 性质, 1938 年 Gelfand 证明了自反空间具有 RN 性质. 本节都采用鞅方法来处理, 其中的两个主要结果, Gelfand 的结论是 Scalora 证明的, 可分共轭空间的 RN 性质是 Pettis 证明的. 这里未指明出处的结果可见文献 [77]、[78].

2.4 节中 B 值鞅收敛定理的建立使人们的目光转向更广泛的鞅型序列的收敛性, 先后被考虑过的有拟鞅、一致渐近鞅、渐近鞅、极限鞅、概率极限鞅等, 这里只提到前面两种. 其中分解定理 5 和收敛定理 6 都见文献 [17]. 极大引理和 Fatou 不等式的一种推广形式见文献 [58].

第 3 章　凸集的几何理论

RN 性质不仅可以在一个空间上定义, 也可以在一个凸集上定义. Banach 空间中具有 RN 性质的凸集有着丰富的几何特性. 本章将首先介绍凸集的可凹性、可凹性与鞅收敛性的关系、暴露点与端点表现定理、Bishop-Phelps 定理、Edgar-Chouque 表现定理, 然后叙述共轭空间中相应的结果以及 Asplund 空间的性质.

3.1　可　凹　性

让我们先来定义 Banach 空间中凸集的 RN 性质和鞅收敛性质.

定义 1　称 Banach 空间 X 中的有界闭凸集 K 具有 RN 性质, 若对于任何测度空间 (Ω, Σ, μ) 和平均值域在 K 中的向量测度 $F : \Sigma \to X$, 当 $F \ll \mu$ 时, 存在 $f \in L_1(\mu, X)$ 使得

$$F(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu, \quad \forall\, A \in \Sigma.$$

这里 F 的平均值域是指集合

$$\mathrm{Ave}(F) = \left\{ \frac{F(A)}{\mu(A)} : \forall A \in \Sigma, \mu(A) > 0 \right\}.$$

称 X 中的凸集 K 具有 RN 性质, 若 K 的每个有界闭凸子集有此性质.

当然, X 本身具有 RN 性质的定义已包含在内. 这就出现了前后一致的问题. 容易知道, 第 1 章中 X 具有 RN 性质的定义蕴含着这里的定义, 因为每个平均值域 $\mathrm{Ave}(F)$ 有界的向量测度是有界变差的. 另一方面, 反过来的论断可以从下面的定理 1 和 2.1 节的 Chatterji 定理得到.

定义 2　Banach 空间 X 的有界闭凸子集 K 称为具有鞅收敛 (MC) 性质, 若任何取值于 K 的鞅 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ a.e. 收敛.

定理 1　设 $K \subset X$ 是有界闭凸集, 则 K 具有 RN 性质当且仅当 K 具有 MC 性质.

证明　先设 K 具有 RN 性质, $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是取值于 K 的鞅. 记

$$F(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \mathrm{d}\mu, \quad \forall A \in \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n,$$

将 F 延拓到 $B_\infty = \sigma\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n\right)$ 上, 仍记为 F. 因为 K 有界闭凸, 当 $\mu(A)>0$ 时,

$$\frac{1}{\mu(A)}\int_A f_n \mathrm{d}\mu \in \overline{\mathrm{co}} f_n(\Omega) \subset K, \quad \frac{F(A)}{\mu(A)} \in K,$$

即 F 的平均值域在 K 中. 由定义 1, 存在 $f \in L_1(\mu, X), F(A) = \int_A f\mathrm{d}\mu, \forall\, A \in B_\infty$. 特别地, 由鞅性质, 对于 $A \in B_n$,

$$\int_A f_n \mathrm{d}\mu = \int_A f_{n+1}\mathrm{d}\mu = \lim_{m\to\infty}\int_A f_m \mathrm{d}\mu = \int_A f\mathrm{d}\mu.$$

换句话说, $f_n = E(f\,|B_n), n \geqslant 0$. 由 Levy 定理, $f_n \to f$ a.e..

反过来, 若 K 具有 MC 性质, $F: \Sigma \to X$ 是 μ 连续向量测度并且 $\mathrm{Ave}(F) \subset K$. 设 $\{\pi_n, n \geqslant 0\}$ 是 Ω 的逐步加细的分划序列, 不失一般性设 $\sigma\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\sigma(\pi_n)\right) = \Sigma$, 其中 $\sigma(\pi_n)$ 是由分划 π_n 生成的 σ 代数. 定义

$$f_n = \sum_{A\in\pi_n}\frac{F(A)}{\mu(A)}\chi_A, \quad n \geqslant 0, \tag{1.1}$$

则 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是鞅, 并且 $f_n(\omega) \in K$. 于是由 MC 性质, 存在 $f \in L_1(\mu, X)$, $f_n \to f$ a.e.. 实际上, f_n 是一致可积的, 从而

$$F(A) = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n\mathrm{d}\mu = \int_A f\mathrm{d}\mu, \quad \forall\, A \in \Sigma.$$

所以 K 具有 RN 性质.

由 2.3 节定理 9 知道, w 紧凸集具有 RN 性质.

现在明确几个记号. $\forall\, K \subset X$, 我们已经用 $\mathrm{co}(K)$, $\overline{\mathrm{co}}(K)$ 分别表示 K 的凸壳和闭凸壳. 另外记

$$s-\mathrm{co}(K) = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n : a_n \geqslant 0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1, x_n \in K\right\}.$$

容易验证

$$\mathrm{co}(K) \subset s-\mathrm{co}(K) \subset \overline{\mathrm{co}}(K). \tag{1.2}$$

定义 3 称 $x \in K$ 是 K 的凹点 (或 s 凹点, c 凹点), 若 $\forall\, \varepsilon > 0$,

$$x \notin \overline{\mathrm{co}}(K\backslash B_\varepsilon(x)) \ (\text{或} s-\mathrm{co}(K\backslash B_\varepsilon(x)), \mathrm{co}(K\backslash B_\varepsilon(x))),$$

其中 $B_\varepsilon(x)=\{y:\|y-x\|<\varepsilon\}$. 称集合 $K\subset X$ 是可凹集 (或 s 可凹集, c 可凹集), 若 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $x_\varepsilon\in K$ 使得

$$x_\varepsilon\notin\overline{\mathrm{co}}(K\backslash B_\varepsilon(x_\varepsilon)),\quad (\text{或}s-\mathrm{co}(K\backslash B_\varepsilon(x_\varepsilon)),\mathrm{co}(K\backslash B_\varepsilon(x))).$$

根据定义, 若 K 有一个凹点 (s 凹点, c 凹点), 则 K 可凹 (s 可凹, c 可凹). 另一方面由 (1.2), 每个可凹集是 s 可凹的, 每个 s 可凹集 c 可凹.

命题 1 设 $K\subset X$ 是任一子集,

(i) 若 $\overline{\mathrm{co}}(K)$ 可凹, 则 K 可凹;

(ii) 若 K 是有界闭凸集, K 的内部 K^0 非空, K 不可凹, 则 K^0 不是 c 可凹的, 从而更不是 s 可凹和可凹的;

(iii) 当 X 赋于等价范数时, 子集的可凹性不改变.

证明 1° 设 $\overline{\mathrm{co}}(K)$ 可凹, 由定义, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,x_\varepsilon\in\overline{\mathrm{co}}(K)$, 但

$$x_\varepsilon\notin\overline{\mathrm{co}}\,(\overline{\mathrm{co}}(K)\backslash B_{\varepsilon/2}(x_\varepsilon))\triangleq Q.$$

注意 $K\backslash Q$ 非空, 否则 $K\subset Q$. 从而 $\overline{\mathrm{co}}(K)\subset Q$, 这与 $x_\varepsilon\in\overline{\mathrm{co}}(K)\backslash Q$ 矛盾. 现在我们证明, $\forall\,d\in K\backslash Q, d\notin\overline{\mathrm{co}}(K\backslash B_\varepsilon(d))$. 实际上, 首先 $d\in B_{\varepsilon/2}(x_\varepsilon)$. 否则

$$d\in K\backslash B_{\varepsilon/2}(x_\varepsilon)\subset\overline{\mathrm{co}}(K\backslash B_{\varepsilon/2}(x_\varepsilon))\subset Q.$$

这与 $d\in K\backslash Q$ 矛盾. d 是 $K\backslash Q$ 中任一元, 故 $K\backslash Q\subset B_{\varepsilon/2}(x_\varepsilon)$. 其次必有 $K\backslash B_\varepsilon(d)\subset Q$. 因为若 $y\in K\backslash B_\varepsilon(d)$ 但 $y\notin Q$, 则一方面 $\|y-d\|\geqslant\varepsilon$, 另一方面, $y,d\in K\backslash Q\subset B_{\varepsilon/2}(x_\varepsilon)$. 故 $\|y-d\|\leqslant\|y-x_\varepsilon\|+\|x_\varepsilon-d\|<\varepsilon$, 矛盾. 至此 $\overline{\mathrm{co}}(K\backslash B_\varepsilon(d))\subset Q$. 既然 $d\notin Q$, 故 $d\notin\overline{\mathrm{co}}(K\backslash B_\varepsilon(d))$. K 可凹.

2° 若 K 不可凹, 则存在 $\varepsilon>0$, 使得 $\forall x\in K, x\in\overline{\mathrm{co}}(K\backslash B_\varepsilon(x))$. 若 $x\in K^0$, 则存在 $\delta>0, B_\delta(x)\subset K$. 取 $x_i\in K^0$, 正数 α_i, 使得 $\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i=1$, $\|x_i-x\|\geqslant\varepsilon(1\leqslant i\leqslant n)$ 并且 $\left\|\sum\limits_{i=1}^n\alpha_ix_i-x\right\|<\min(\delta,\varepsilon/2)$. 令 $y=x-\sum\limits_{i=1}^n\alpha_ix_i$, 则 $x+y\in B_\delta(x)\subset K^0$, 从而 $[(x+y)/2+x_i/2]\in K^0(1\leqslant i\leqslant n)$. 另一方面,

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}x_i-x\right\|\geqslant\frac{1}{2}\|x_i-x\|-\frac{1}{2}\|y\|\geqslant\frac{\varepsilon}{4}.$$

由 $\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i(x+y+x_i)/2=x$, 故 $x\in\mathrm{co}(K^0\backslash B_{\varepsilon/4}(x))$. $x\in K^0$ 是任意的, 所以 K^0 不是 c 可凹的.

3° 设 $|\cdot|$ 与 $\|\cdot\|$ 是等价范数, $\forall\,x\in X, a\|x\|\leqslant|x|\leqslant b\|x\|$, 其中 $a,b>0$. 分别以 $B_\varepsilon(x)$ 和 $B_\varepsilon((x))$ 表示在两种范数下以 x 为中心 ε 为半径的球, 则由

$$\overline{\mathrm{co}}(K\backslash B_{\varepsilon/b}((x_\varepsilon)))\supset\overline{\mathrm{co}}(K\backslash B_\varepsilon(x_\varepsilon))\supset\overline{\mathrm{co}}(K\backslash B_{\varepsilon/a}((x_\varepsilon)))$$

得出所要的结论.

例 1 $C[0,1]$ 的闭单位球 D 是 s 可凹但不是可凹的.

为证明 D s 可凹, 我们证明 $f_0(t)\equiv 1$ 是 D 的 s 凹点. 为此反设 $\exists\varepsilon>0, f_0\in s-\mathrm{co}(D\backslash B_\varepsilon(f_0))$, 则 $f_0=\sum_{n=1}^\infty a_nf_n$, 其中 $f_n\in D, \|f_n-f_0\|\geqslant\varepsilon, a_n>0, \sum_{i=1}^\infty a_i=1$. 要使此式成立必须 $f_n(t)\equiv 1$, $n\geqslant 1$, 即 $f_n=f_0$, $n\geqslant 1$, 矛盾. 同样地, $f_0(t)\equiv -1$ 也是 D 的 s 凹点.

为证 D 不可凹, $\forall f\in D$, $\varepsilon>0$, 考虑 $[0,1]$ 的分划

$$[0,n^{-1}),[n^{-1},2n^{-1}),\cdots,[(n-1)n^{-1},1].$$

令 $f_i^{(n)}(t)=f(t), t\notin[(i-1)n^{-1},in^{-1})$, 取 $t_i^{(n)}\in[(i-1)n^{-1},in^{-1})$, 使得

$$\left|f_i^{(n)}(t_i^{(n)})-f(t_i^{(n)})\right|>1/2;$$

对于 $[(i-1)n^{-1},in^{-1})$ 中其余的 t, 使 $f_i^{(n)}(t)$ 保持线性, 则

$$\left\|f_i^{(n)}-f\right\|\geqslant 1/2, f_i^{(n)}\in D\backslash B_{1/2}(f), \left\|\sum_{i=1}^n n^{-1}f_i^{(n)}-f\right\|\leqslant 2n^{-1},$$

n 是任意的, 所以 $f\in\overline{\mathrm{co}}(D\backslash B_{1/2}(f))$. D 不是可凹的.

下面的定理属于 Huff-Maynard 以及 Kunen-Rosenthal, 特别是后者通过构造适当的拟鞅和鞅来证明.

定理 2 设 $K\subset X$ 是有界闭凸子集, 若 K 不可凹, 则

(i) 存在 $\delta>0$ 和取值于 K 的拟鞅$(f_n,B_n,n\geqslant 0)$ 使得

$$\inf_{n\geqslant 0}\|f_{n+1}(\omega)-f_n(\omega)\|\geqslant\delta,\quad\forall\omega\in\Omega;\tag{1.3}$$

(ii) 存在 $\delta', 0<\delta'<\delta$ 和取值于 K 的鞅 $(g_n,B_n,n\geqslant 0)$ 使得

$$\inf_{n\geqslant 0}\|g_{n+1}(\omega)-g_n(\omega)\|\geqslant\delta',\quad\forall\omega\in\Omega.\tag{1.4}$$

特别地, K 不具有 RN 性质.

证明 取 (Ω,Σ,μ) 为 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度空间.

1° 设 $\varepsilon_n>0, \sum_{n=1}^\infty\varepsilon_n<\infty$. 由于 K 不是可凹的, $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x\in K, x\in\overline{\mathrm{co}}(K\backslash B_\delta(x))$. 固定 $x_0\in K$, 令 $f_0(\omega)\equiv x_0, B_0=\{\phi,\Omega\}$.

取 $x_{11},\cdots,x_{1m_1}\in K\backslash B_\varepsilon(x_0)$, 使得

$$\left\|\sum_{j=1}^{m_1}a_{1j}x_{1j}-x_0\right\|<\varepsilon_1,\tag{1.5}$$

其中 $a_{1j}>0,\sum_{j=1}^{m_1}a_{1j}=1$. 令 $\beta_{1j}=\sum_{i=1}^{j}a_{1i},1\leqslant j\leqslant m_1$, 定义

$$f_1(\omega)=\sum_{j=1}^{m_1}x_{1j}\chi_{[\beta_{1j-1},\beta_{1j})},$$

$$B_1=\sigma\{[\beta_{1j-1},\beta_{1j}),1\leqslant j\leqslant m_1\},\quad \beta_{10}=0. \tag{1.6}$$

则

$$\|f_1(\omega)-f_0(\omega)\|\geqslant\min\|x_{1j}-x_0\|\geqslant\delta,\quad \forall\,\omega\in\Omega,$$
$$E(f_1\,|B_0)=Ef_1=\sum_{j=1}^{m_1}a_{1j}x_{1j},$$

从而由 (1.5),

$$\|E(f_1\,|B_0)-f_0\|_\infty=\left\|\sum_{j=1}^{m_1}a_{1j}x_{1j}-x_0\right\|<\varepsilon_1.$$

为了定义 f_2, 考虑 $[\beta_{1j-1},\beta_{1j})$, 在此区间上, $f_1(\omega)=x_{1j}\in K$. 取 $x_{21}^{(j)},\cdots,x_{2m_2^{(j)}}^{(j)}\in K,\left\|x_{2k}^{(j)}-x_{1j}\right\|\geqslant\delta,1\leqslant k\leqslant m_2^{(j)}$, 使得

$$\left\|\sum_{k=1}^{m_2^{(j)}}a_{2k}^{(j)}x_{2k}^{(j)}-x_{1j}\right\|\leqslant\varepsilon_2. \tag{1.7}$$

这里 $a_{2k}^{(j)}>0,\sum_{k=1}^{m_2^{(j)}}a_{2k}^{(j)}=1$, 令 $\beta_{2k}^{(j)}=\beta_{1j-1}+(\beta_{1j}-\beta_{1j-1})\sum_{i=1}^{k}a_{2i}^{(j)},\ 1\leqslant k\leqslant m_2^{(j)}$. 当 j 走遍 $1,2,\cdots,m_1$ 时, 逐一作出在 $[\beta_{1j-1},\beta_{1j})$ 上的和数, 然后定义

$$f_2(\omega)=\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1}^{m_2^{(j)}}x_{2k}^{(j)}\chi_{[\beta_{2k-1}^{(j)},\ \beta_{2k}^{(j)})},$$

$$B_2=\sigma\{[\beta_{2k-1}^{(j)},\beta_{2k}^{(j)}),j=1,\cdots,m_1,1\leqslant k\leqslant m_2^{(j)}\}. \tag{1.8}$$

直接验证可知

$$\|f_2(\omega)-f_1(\omega)\|\geqslant\min_j\min_k\left\|x_{2k}^{(j)}-x_{1j}\right\|\geqslant\delta,$$

又当 $\omega\in[\beta_{1j-1},\beta_{1j})$ 时, 依定义

$$E(f_2\,|B_1)=\frac{1}{\beta_{1j}-\beta_{1j-1}}\int_{\beta_{1j-1}}^{\beta_{1j}}f_2\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{m_2^{(j)}}a_{2k}^{(j)}x_{2k}^{(j)},$$

从而

$$\|E(f_2|B_1)-f_1\|_\infty \leqslant \sup_j \left\|\sum_{k=1}^{m_2^{(j)}} a_{2k}^{(j)} x_{2k}^{(j)} - x_{1j}\right\| \leqslant \varepsilon_2.$$

依此做下去. 简而言之, 在 f_n 取常值 x 的区间上, 利用 K 的不可凹性, 取一列向量使它们中的每一个离 x 的距离都大于 δ, 而它的凸组合离 x 的距离小于 ε_n, 然后将区间细分再定义函数 f_{n+1}. 对于其他区间同样炮制即可得到所要的拟鞅.

2° 利用拟鞅的 Riesz 分解定理得到所要的鞅. 实际上, 取 ε_n 和 δ' 满足 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j \leqslant (\delta-\delta')/2$. 令 $g_n = \lim\limits_{k\to\infty} E(f_k|B_n)$, 此极限是 L_∞ 范数意义下的, 则 $(g_n, B_n, n\geqslant 0)$ 是一个鞅. 剩下只须证明 $g_n(\omega)\in K$, 并且 (1.4) 成立.

首先, 由 f_n 的构造方法, $\forall\omega\in\Omega, E(f_k|B_n)$ 是 K 中元素的凸组合, K 凸, 故 $E(f_k|B_n)\in K$. 又 K 闭, 故 $\forall\,\omega, g_n = \lim\limits_{n\to\infty} E(f_k|B_n)\in K$. 其次,

$$\begin{aligned}\|g_n - f_n\|_\infty &= \lim_{k\to\infty}\|E(f_k|B_n) - f_n\|_\infty \\ &= \lim_{k\to\infty}\left\|E\left(\sum_{i=n}^{k-1} E(f_{i+1}-f_i|B_i)|B_n\right)\right\|_\infty \\ &\leqslant \lim_{k\to\infty}\sum_{i=n}^{k-1}\|E(f_{i+1}-f_i)|B_i\|_\infty \leqslant \sum_{i=n}^{k-1}\varepsilon_i,\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}\|g_{n+1}(\omega)-g_n(\omega)\| &\geqslant \|f_{n+1}(\omega)-f_n(\omega)\| - \|f_{n+1}-g_{n+1}\| - \|f_n-g_n\|_\infty \\ &\geqslant \delta - \sum_{i=n+1}^{\infty}\varepsilon_i - \sum_{i=n}^{\infty}\varepsilon_i > \delta'.\end{aligned}$$

定理证毕.

引理 1(竭举引理) 设 (Ω,Σ,μ) 是概率空间, $F:\Sigma\to X$ 是向量测度, (P) 是 F 所具有的某种性质, 并且:

(i) 若 F 在 $B\in\Sigma$ 上具有性质 (P), 则 F 在 $B\in\Sigma$ 任何子集 $A\in\Sigma$ 上具有性质 (P);

(ii) 若 F 在 $A,B\in\Sigma$ 上具有性质 (P), 则 F 在 $A\cup B$ 上具有性质 (P);

(iii) $\forall B\in\Sigma, \mu(B)>0, \exists A\in\Sigma, A\subset B, \mu(A)>0, F$ 在 A 上具有 (P). 则存在互不相交的 $B_n\in\Sigma$, F 在 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ 上具有性质 (P), $\mu(\Omega\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n)=0$.

证明 记

$$\mathfrak{M} = \{A\in\Sigma : F在A上具有性质(P)\}.$$

由 (iii), $\mathfrak{M}$ 非空. 令 $c=\sup\{\mu(A):A\in\mathfrak{M}\}$, 取 $B_n\in\mathfrak{M}$ 使得 $\mu(B_n)\to c$, 不妨假定 B_n 递增, 剩下只需证明 $\mu(\Omega\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)=0$. 若设其反, 由 (iii), 存在 $B_0\subset\Omega\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ 具有正测度, F 在 B_0 上仍具有性质 (P), 这与 $\mathfrak{M}$ 的定义矛盾.

引理 2 设 $F:\Sigma\to X$ 是关于测度空间 (Ω,Σ,μ) 的有界变差 μ 连续测度, F 有局部直径任意小的平均值域, 即 $\forall\varepsilon>0$ 和 $A\in\Sigma$. 当 $\mu(A)>0$ 时, 存在 $A'\in\Sigma, A'\subset A, \mu(A')>0$, 使得

$$\operatorname{diam}\left\{\frac{F(E)}{\mu(E)}:E\in\Sigma,E\subset A',\mu(E)>0\right\}<\varepsilon, \tag{1.9}$$

则存在 $f\in L_1(\mu,X)$ 是 F 的 RN 导数.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 应用竭举引理, 存在不相交集合序列 $E_n(\varepsilon)\in\Sigma,\mu(E_n(\varepsilon))>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\Omega\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_i(\varepsilon))=0$ 并且 $\forall\, n$,

$$\operatorname{diam}\operatorname{Ave}(F\,|E_n(\varepsilon))\triangleq\operatorname{diam}\left\{\frac{F(E)}{\mu(E)}:E\in\Sigma,E\subset E_n(\varepsilon),\mu(E)>0\right\}<\varepsilon. \tag{1.10}$$

定义

$$f_\varepsilon(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(E_n(\varepsilon))}{\mu(E_n(\varepsilon))}\chi_{E_n(\varepsilon)},\quad \forall\,\omega\in\Omega,$$

以及 $F_\varepsilon(E)=\int_E f_\varepsilon\mathrm{d}\mu$. 则对于 Ω 的每个分划 π,

$$\begin{aligned}\sum_{E\in\pi}\|F(E)-F_\varepsilon(E)\|&=\sum_{E\in\pi}\left\|F(E)-\int_E f_\varepsilon\mathrm{d}\mu\right\|\\&\leqslant\sum_{E\in\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|F(E\cap E_n(\varepsilon))-\int_{E\cap E_n(\varepsilon)}f_\varepsilon\mathrm{d}\mu\right\|\\&=\sum_{E\in\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{F(E\cap E_n(\varepsilon))}{\mu(E\cap E_n(\varepsilon))}-\frac{F(E_n(\varepsilon))}{\mu(E_n(\varepsilon))}\right\|\mu(E\cap E_n(\varepsilon))\\&\leqslant\sum_{E\in\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\mu(E\cap E_n(\varepsilon))\leqslant\varepsilon\mu(\Omega).\end{aligned} \tag{1.11}$$

最后的式子应用了 (1.10), 于是

$$\lim_{\varepsilon,\delta\to0}\|F_\varepsilon-F_\delta\|(\Omega)\leqslant\lim_{\varepsilon\to0}\|F_\varepsilon-F\|(\Omega)+\lim_{\delta\to0}\|F_\delta-F\|(\Omega)=0,$$

即 $\lim\limits_{\varepsilon,\delta\to0}\int_\Omega\|f_\varepsilon-f_\delta\|\mathrm{d}\mu=0$. 取 $\varepsilon=1/n, f_{\frac{1}{n}}$ 是 $L_1(\mu,X)$ 中的 Cauchy 序列, 从而存

在 $f \in L_1(\mu, X)$, 在 L_1 范数意义下 $f = \lim_{n\to\infty} f_{\frac{1}{n}}$. 此时必有

$$F(E) = \lim_{n\to\infty} F_{\frac{1}{n}}(E) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_{\frac{1}{n}} \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu, \quad \forall\, E \in \Sigma.$$

定理 3(Rieffel) 设 (Ω, Σ, μ) 是测度空间, $K \subset X$ 是有界闭凸集, $F : \Sigma \to X$ 是 μ 连续向量测度, $\mathrm{Ave}(F) \subset K$, 则以下条件等价:

(i) 存在 $f \in L_1(\mu, X)$ 使得 $F(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu, \forall A \in \Sigma$;

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\Omega_\varepsilon \subset \Sigma$ 使得 $\mu(\Omega \backslash \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ 并且 $\mathrm{Ave}(F\,|\Omega_\varepsilon)$ 是相对范数紧集;

(iii) $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\Omega_\varepsilon \subset \Sigma$ 使得 $\mu(\Omega \backslash \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ 并且 $\mathrm{Ave}(F\,|\Omega_\varepsilon)$ 是相对 w 紧集;

(iv) F 具有局部 s 可凹平均值域, 即 $\forall\, A \in \Sigma, \mu(A) > 0$, 存在 $A' \in \Sigma, A' \subset A, \mu(A') > 0$, 使得 $\mathrm{Ave}(F\,|A')$ 是 s 可凹的.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 由 $f \in L_1(\mu, X)$, 存在简单函数列 f_n 使得

$$f_n \to f, \quad \text{a.e.}, \quad \|f_n - f\|_1 \to 0.$$

由 Egorov 定理, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \Omega_\varepsilon \in \Sigma, \mu(\Omega \backslash \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$, 在 Ω_ε 上 f_n 一致收敛于 f. 记 $F_n(A) = \int_A f_n \mathrm{d}\mu$, 当 $A \subset \Omega_\varepsilon, \mu(A) > 0$ 时, 存在 n_0 使得 $n \geqslant n_0$ 时,

$$\left\| \frac{F_n(A)}{\mu(A)} - \frac{F(A)}{\mu(A)} \right\| \leqslant \frac{1}{\mu(A)} \int_A \|f_n - f\| \mathrm{d}\mu \leqslant \sup_{\omega \in \Omega_\varepsilon} \|f_n - f\| \leqslant \varepsilon'. \tag{1.12}$$

但

$$\mathrm{Ave}(F_n\,|_{\Omega_\varepsilon}) = \left\{ \frac{F_n(A)}{\mu(A)} : A \in \Sigma, \mu(A) > 0, A \subset \Omega_\varepsilon \right\}$$

是有限维空间中的有界集, 故为相对紧集. (1.12) 保证了 $\mathrm{Ave}(F\,|_{\Omega_\varepsilon})$ 是相对紧集.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 是显然的.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). 注意当 $\mathrm{Ave}(F\,|_{\Omega_\varepsilon})$ 为相对 w 紧集时, 其范数闭凸壳也是相对 w 紧集的. 由推论 1 和定理 2 知, $\mathrm{Ave}(F\,|_{\Omega_\varepsilon})$ 是可凹的从而是 s 可凹的, 即 F 有局部 s 可凹平均值域.

(iv) $\Rightarrow$ (i). 设 $\mathrm{Ave}(F) \subset K$ 并且 F 具有局部 s 可凹平均值域. 记 $K' = \mathrm{Ave}(F\,|_{A'})$, 其中 $\mathrm{Ave}(F|_{A'})$ 是 s 可凹的. 于是 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $x \in K'$, 使得 $x \notin s - \mathrm{co}(K \backslash B_\varepsilon(x))$, 例如, $x = F(A_0)/\mu(A_0)$, 其中 $A_0 \in \Sigma, \mu(A_0) > 0, A_0 \subset A'$. 我们证明存在 $B_0 \subset A_0$ 使得 $\forall\, E \in \Sigma, E \subset B_0, \mu(E) > 0$ 时 $\|F(E)/\mu(E) - x\| < \varepsilon$. 若不然, A_0 的任何子集 $B \in \Sigma, \mu(B) > 0$ 包含子集 $B' \in \Sigma, \mu(B') > 0$, 并且

$$\|F(B')/\mu(B') - x\| \geqslant \varepsilon. \tag{1.13}$$

应用竭举引理可知存在 $B'_n \subset A_0, \mu(B'_n) > 0$, 在每个 B'_n 上, (1.13) 成立并且对于 $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} B'_n, \mu(A_0 \backslash C) = 0$. 从而 $F(A_0 \backslash C) = 0$, 于是

$$x = \frac{F(A_0)}{\mu(A_0)} = \frac{F(C)}{\mu(C)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(B'_n)}{\mu(B'_n)} \cdot \frac{\mu(B'_n)}{\mu(C)},$$

因为 $F(B'_n)/\mu(B'_n) \in K'$, (1.13) 说明 $x \in s-\mathrm{co}(K' \backslash B_\varepsilon(x))$, 矛盾. ε 是任意的, 这说明 F 有局部任意小直径的平均值域. 由引理知 F 关于 μ 具有 RN 导数, 定理得证.

定义 4 集合 K 称为是子集可凹 (子集 s 可凹, 子集 c 可凹) 的, 若它的每个有界非空子集是可凹 (s 可凹, c 可凹) 的.

例 1 表明, 对于一个有界闭凸子集, 可凹性与 s 可凹性是不同的, 但若转到子集可凹性, 情况就不同了.

定理 4 设 K 是 X 的有界闭凸子集, 则下面条件等价:

(i) K 具有 RN 性质;

(ii) K 是子集可凹的;

(iii) K 是子集 s 可凹的;

(iv) K 是子集 c 可凹的;

(v) K 的每个闭凸子集是可凹的;

(vi) K 的每个可数子集是 c 可凹的.

证明 (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (vi) 是显然的. 当 (i) 成立时, K 具有鞅收敛性质, 从而 K 的每个闭凸子集具有鞅收敛性. 定理 2 说明 (v) 成立, 定理 3 说明反过来的结论也成立, 故 (i) $\Leftrightarrow$ (v). 当 (v) 成立时, 对于 K 的每个子集 $D, \overline{\mathrm{co}}(D)$ 可凹, 命题 1 说明 D 可凹, 从而 (ii) 成立, 剩下 (vi) $\Rightarrow$ (v), Bourgin[1] 给出了它的一个构造性的证明, 这里不准备引述了.

推论 X 具有 RN 性质当且仅当 X 关于 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度具有 RN 性质.

证明 注意定理 2 中构造的鞅和拟鞅都是定义在 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度空间上的. 因此 X 关于此测度具有 RN 性质, 则 X 的每个闭凸子集具有可凹性. 但定理 4 说明可凹性是与测度空间的选择无关的, 从而 X 关于任一测度空间具有 RN 性质.

3.2 暴露点与端点表现

在局部凸空间中有两个经典的关于凸集端点的表现定理, 一个是 Krein-Milman 定理, 一个是 Choquet 定理, 它们在分析数学中有着广泛的应用. 本节将就 Banach

空间情况首先证明第一个定理的推广形式, 然后介绍第二个定理经过 Edgar 改造了的形式, 它们都依赖于凸集的 RN 性质.

定义 1 设 K 是 Banach 空间 X 中的有界闭集, $x \in K$. 称 x 是 K 的端点, 记为 $x \in \mathrm{ex}K$, 若 x 不能写成 K 中任何两个不同点 y 与 z 的凸组合. 称一个闭凸集具有 Krein-Milman(KM) 性质, 若它的每个有界闭凸子集至少包含一个端点.

定义 2 设 K 是有界闭凸子集, $x \in K$. 称 x 是 K 的暴露点, 若存在 $x^* \in X^*, \|x^*\| = 1$, 使得 $\forall\, y \in K, y \neq x$, 则 $x^*(y) < x^*(x)$. 此时称 x^* 是在 x 点的暴露泛函. 若此外还有 $x^*(y_n) \to x^*(x)$ 时, $y_n \to x$, 则称 x 为强暴露点, x^* 为 x 点的强暴露泛函. 记 K 的暴露点的全体为 $\exp K$, 强暴露点的全体为 $\mathrm{str}\exp K$, 记强暴露 K 的某个点的线性泛函全体为 $\mathrm{se}\, K$.

例 1 设 $K = B(c_0)$(c_0 的闭单位球), 则 $\mathrm{ex}K = \varnothing$.

实际上 $\forall x = (x_n) \in K, x_n \to 0$, 故 $\exists\, n_0$ 使得 $|x_{n_0}| < 1/2$. 取

$$y = (x_1, \cdots, x_{n_{0-1}}, x_{n_0} - 1/2, x_{n_{0+1}}, \cdots),$$

$$z = (x_1, \cdots, x_{n_0 - 1}, x_{n_0} + 1/2, x_{n_0+1}, \cdots),$$

则 $y, z \in K, x = (y + z)/2, x$ 不是端点.

例 2 设 $K = B(L_1[0,1])$, 则 $\mathrm{ex}\, K = \varnothing$.

实际上 $\forall\, f \in K, 0 \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 1$, 由于 $\int_0^t |f(s)|\,\mathrm{d}s$ 是 t 的连续函数. 故存在 $t_0, 0 \leqslant t_0 \leqslant 1, \int_0^{t_0} |f(s)|\mathrm{d}s = \dfrac{1}{2}\int_0^1 |f(s)|\mathrm{d}s$. 取

$$f_1(t) = 2f(t)\chi_{[0,t_0]}, \quad f_2(t) = 2f(t)\chi_{[t_0,1]},$$

则 $\|f_1\|,\ \|f_2\| \leqslant 1,\ f = (f_1 + f_2)/2$. 从而 $\mathrm{ex}\, K = \varnothing$.

例 3 设 $K = B(C[0,1])$, 其中 $C[0,1]$ 是实空间, 则 $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}K) \neq K$, 实际上 $\mathrm{ex}K = \{\chi_{[0,1]}, -\chi_{[0,1]}\}$.

例 4 设 K 是平面上单位圆周 $\varGamma$ 与点 $(1,-1)$ 张成的凸集, 则 $(1,0)$ 是端点但不是暴露点.

例 5 设 $\{e_n : n \geqslant 1\}$ 是 l_2 中的标准基, $K = \overline{\mathrm{co}}\{e_n : n \geqslant 1\}$. 由 l_2 的自反性和 K 的有界闭凸性, K 是 w 紧集. 我们证明 0 是暴露点但不是强暴露点.

取 $x^* = (-1, 0, 0, \cdots) \in l_2^*$, 则 $\forall\, x \in \mathrm{co}\{e_n : n \geqslant 1\}$, 有

$$x = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k, 0, \cdots), \quad \alpha_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1.$$

此时 $x^*(x) = -\alpha_1 < 0 = x^*(0)$. 实际上除非 $\alpha_1 = 0$, 都有 $x^*(x) < x^*(0)$, 0 是暴露点. 另一方面, 若 x^* 是在 0 点的暴露泛函, 则

$$M = \sup\{x^*(x) : x \in K\} = 0,$$
$$S(K, x^*, \varepsilon) = \{x \in K : x^*(x) > -\varepsilon\},$$
$$\text{diam}S(K, x^*, \varepsilon) = \sqrt{2}.$$

例如, 对于 $e_i, e_j, (i \neq j)$, 实际验证知道,

$$e_i, e_j \in S(K, x^*, \varepsilon), \quad \text{diam}S(K, x^*, \varepsilon) \geqslant \|e_i - e_j\|_2 = \sqrt{2},$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \text{diam}S(K, x^*, \varepsilon) \neq 0.$$

0 不是强暴露点.

定理 1　设 $K \subset X$ 是有界集, 则

(i) K 的每个暴露点是 K 的 s 凹点;

(ii) K 的每个强暴露点是凹点.

证明　1° 设 x_0 是 K 的暴露点, $x^* \in X^*, \|x^*\| = 1$ 是在 x_0 的暴露泛函. 若有 $\varepsilon > 0$ 使得 $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 其中 $x_n \in K \backslash B_\varepsilon(x_0), a_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. 注意由暴露点定义

$$x^*(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^*(x_n), \quad x^*(x_0) > x^*(x_n). \tag{2.1}$$

为使 (2.1) 成立必有 $x^*(x_0) = x^*(x_n)$, 从而 $x_n = x_0$, 矛盾.

2° 若 x_0 是 K 的强暴露点, 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\alpha > 0$ 使得当 $y \in K \backslash B_\varepsilon(x_0)$ 时, $x^*(y) < x^*(x_0) - \alpha$, 从而

$$\sup\{x^*(y) : y \in K \backslash B_\varepsilon(x_0)\} < x^*(x_0) - \alpha,$$
$$\sup\{x^*(y) : y \in \overline{\text{co}}(K \backslash B_\varepsilon(x_0))\} < x^*(x_0) - \alpha,$$

故 $x_0 \notin \overline{\text{co}}(K \backslash B_\varepsilon(x_0)), x_0$ 为凹点.

下面引理的证明用到停止鞅.

引理 1(Kunen, Rosenthal)　设 $K \subset X$ 是有界闭凸集, 具有 RN 性质. $x^* \in X^*, \|x^*\| = 1, M = \sup\{x^*(x) : x \in K\}, \varepsilon > 0, \alpha > \eta > 0$, 则存在 $x_0 \in S(K, x^*, \eta) = \{x \in K : x^*(x) \geqslant M - \alpha\}$ 使得

$$x_0 \notin \overline{\text{co}}((K \backslash B_\varepsilon(x_0)) \cup (B_1(x_0) \cap \{x \in X; x^*(x) < M - \alpha\}). \tag{2.2}$$

证明　记右端的集合为 W. 若结论不成立, 则 $S(K, x^*, \eta) \subset W$. 此时 $\forall \varepsilon' > 0$ 存在 $x_1, \cdots, x_m$ 使得 $\left\| x_0 - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \right\| < \varepsilon'$, 其中 $\alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$. 对于 $x_i, i =$

$1,\cdots,m$, 要么 $x_i\in K$ 并且 $\|x_i-x_0\|\geqslant\varepsilon$, 要么 $\|x_i-x_0\|\leqslant 1$ 并且 $x^*(x_i)<M-\alpha$. 注意在后一情况有

$$\alpha-\eta\leqslant x^*(x_0)-x^*(x_i)\leqslant\|x^*\|\ \ \|x_0-x_i\|=\|x_0-x_i\|,$$

从而 $\forall\, x_i, \|x_0-x_i\|\geqslant\min(\varepsilon,\alpha-\eta)$.

若 (ε_i) 是一列正数并且 $\delta_0=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i<x^*(x_0)-M+\eta$. 应用类似于 3.1 节定理 2 的方法构造拟鞅$(f_n,B_n,n\geqslant 0)$. 先取 $f_0\equiv x_0$, 对于 $n\geqslant 1$, 考虑 f_n 所取的值 x_i, 当 $x_i\in S(K,x^*,\eta)$ 时, 重复上面过程得出 $x_{i_1},\cdots,x_{in_i}$ 并且细分 x_i 所在的区间, 像 (1.6) 一样定义 f_{n+1}. 当 $x_i\notin S(K,x^*,\eta)$ 时, 就不再细分 x_i 所在的区间并且仍令 $f_{n+1}=x_i$. 总之 $(f_n,B_n,n\geqslant 0)$ 具有如下性质:

(i) $f_0(\omega)=x_0$;

(ii) $\|E(f_{n+1}\,|B_n)-f_n\|_\infty\leqslant\varepsilon_n$;

(iii) 若 $x^*(f_n(\omega))\geqslant M-\eta$, 则

$$\|f_{n+1}(\omega)-f_n(\omega)\|\geqslant\min(\varepsilon,\alpha-\eta)>0;$$

(iv) 若 $x^*(f_n(\omega))<M-\eta$, 则 $f_{n+1}(\omega)=f_n(\omega)$.

总之, f_n 取值于 $S(K,x^*,\eta)\subset K$, 并且在它刚要离开 $S(K,x^*,\eta)$ 时停止. 由于 K 是具有 RN 性质的有界闭凸集, 故存在 $f\in L_1(\mu,X), f_n\to f$ a.e.. 由此, 对于充分大的 n, (iii) 不成立, 从而由 (iv),

$$\int_\Omega x^*(f(\omega))\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega x^*(f_n(\omega))\mathrm{d}\mu\leqslant M-\eta. \tag{2.3}$$

另一方面, 根据拟鞅性质 (ii),

$$\|Ef_n-x_0\|=\left\|E(\sum_{i=1}^{n-1}(E(f_{i+1}\,|B_i)-f_i)\right\|_\infty\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\|E(f_{i+1}\,|B_i)-f_i\|_\infty\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i,$$

从而 $\|Ef-x_0\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|Ef_n-x_0\|\leqslant\delta_0$, 并且

$$\int_\Omega x^*(f(\omega))\mathrm{d}\mu\geqslant x^*(x_0)-\delta_0>M-\eta.$$

这与 (2.3) 矛盾, 说明 $x_0\in W$ 不成立, 引理得证.

引理 2 设 $x^*,y^*\in X^*$, $\|x^*\|=\|y^*\|=1,\varepsilon>0$. 若 $\forall\,x\in X$, $\|x\|\leqslant 1$, $x^*(x)=0$ 时, $\|y^*(x)\|\leqslant\varepsilon$, 则要么 $\|x^*-y^*\|\leqslant 2\varepsilon$, 要么 $\|x^*+y^*\|\leqslant 2\varepsilon$.

证明　考虑 $y^*|_M$, 其中 $M=\{x\in X: x^*(x)=0\}$. 将 $y^*|_M$ 保范延拓为 $z^*\in X^*$, 此时 $\|z^*\|=\|y^*|_M\|\leqslant\varepsilon$ 并且当 $x^*(x)=0$ 时, $y^*(x)-z^*(x)=0$. 从而存在 α 使得 $y^*-z^*=\alpha x^*$. 现在

$$|1-|\alpha||=|\ \|y^*\|-\|y^*-z^*\|\ |\leqslant\|z^*\|\leqslant\varepsilon,$$

若 $\alpha\geqslant 0$, 则

$$\|x^*-y^*\|=\|(1-\alpha)x^*-z^*\|\leqslant|1-\alpha|+\|z^*\|\leqslant 2\varepsilon.$$

若 $\alpha<0$, 则

$$\|x^*+y^*\|=\|(1+\alpha)x^*+z^*\|\leqslant|1+\alpha|+\|z^*\|\leqslant 2\varepsilon.$$

定理 2(Bishop-Kunen-Rosenthal)　设 $K\subset X$ 是非空有界闭凸集, K 具有 RN 性质. 则 $\mathrm{se}(K)$ 是 X^* 的单位球面 $S_p(X^*)$ 的范数稠密 G_δ 子集.

证明　$\forall\,\beta>0$, 令

$$A_\beta=\{x^*\in X^*: \|x^*\|=1 \text{ 并且存在 } \alpha>0, \mathrm{diam}S(K,x^*,\alpha)<\beta\}. \tag{2.4}$$

我们将证明 A_β 是 $S_p(X^*)$ 的稠子集. 由 A_β 是 $S_p(X^*)$ 中的开集并且 $\mathrm{se}(K)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_{\frac{1}{n}}$, Baire 纲定理将导致本定理的结论.

不妨设 K 包含一个以上的点 (否则结论是平凡的), $x^*\in S(X^*),\delta,\beta>0$. 不失一般性设 x^* 至少有两个不同值. 我们证明必有 $y^*\in A_\beta$, 使得 $\|y^*-x^*\|<\delta$.

取 ε,η,α 满足 $2\varepsilon<\beta, 2\alpha<\delta$ 以及

$$\eta+\varepsilon+6\delta<\sup x^*(K)-\inf x^*(K). \tag{2.5}$$

取 x_0 如引理 1, 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $y^*\in X^*, \|y^*\|=1$ 使得 $\sup y^*(W)<y^*(x_0)$. 此时存在 $r>0$ 使得 $x_0\in S(K,y^*,r)$ 并且 $W\cap S(K,y^*,r)=\varnothing$. 由此推出

$$\|x-x_0\|<\varepsilon,\ \forall\,x\in S(K,y^*,r), \tag{2.6}$$

所以 $y^*\in A_\beta$. 以下证明 $\|y^*-x^*\|<\delta$.

由于 y^* 隔离 x_0 与 $B_1(x_0)\cap\{x\in X: x^*(x)<M-\alpha\}$, 所以隔离 0 与

$$\begin{aligned}B_1(0)\cap&\{x\in X: x^*(x)<M-\alpha-x^*(x_0)\}\\&\supset B_1(0)\cap\{x\in X: x^*(x)<-\alpha\}.\end{aligned}$$

因此当 $x\in B_1(0)\cap\{x\in X: x^*(x)<-\alpha\}$ 时, $y^*(x)<y^*(0)=0$.

反过来, 当 $y^*(x) = 0$ 时必有 $x^*(x) \geqslant -\alpha$. 总之当 $\|x\| \leqslant 1, y^*(x) = 0$ 时, $|x^*(x)| \leqslant \alpha$. 由引理 2, 要么 $\|x^* - y^*\| \leqslant 2\alpha$, 要么 $\|x^* + y^*\| \leqslant 2\alpha$.

注意 $\sup y^*(K) = \sup y^*(S(K, y^*, r))$ 并且 $\|y^*\| = 1$, 由 (2.6),

$$y^*(x_0) \geqslant \sup y^*(K) - \varepsilon,$$

若 $\|x^* + y^*\| \leqslant 2\alpha$, 这意味着 $|\sup[-y^*(K)] - M| < 2\alpha, |x^*(x_0) + y^*(x_0)| \leqslant 2\alpha$, 从而 $|\inf y^*(k) - y^*(x_0)| \leqslant 4\alpha + M - x^*(x_0) \leqslant \eta + 4\alpha$. 由此得出

$$\sup y^*(K) - \varepsilon \leqslant y^*(x_0) \leqslant \inf y^*(K) + 4\alpha + \eta,$$

由于 $\|x^* + y^*\| \leqslant 2\alpha$, 最终可得出

$$\sup x^*(K) - \inf x^*(K) \leqslant 6\alpha + \varepsilon + \eta,$$

这与 (2.5) 矛盾. 于是最终有 $\|x^* - y^*\| \leqslant 2\alpha < \delta$.

定理 3 设 $K \subset X$ 是有界闭凸集, 则以下等价:

(i) K 具有 RN 性质;

(ii) 对于 K 的每个闭凸子集 K', $\text{str exp}K' \neq \varnothing$;

(iii) 对于 K 的每个闭凸子集 K',

$$K' = \overline{\text{co}}(\text{str exp}K'); \tag{2.7}$$

(iv) 对于 K 的每个闭凸子集 K', $\text{se}\, K'$ 在 $S(X^*)$ 中稠密.

证明 (iii) $\Rightarrow$ (ii) 显然成立, (ii) $\Rightarrow$ (i) 由 3.1 节命题 1(ii) 和定理 5 得到, (i) $\Rightarrow$ (iv) 即定理 1. 剩下只须证明 (iv) $\Rightarrow$ (iii).

不妨就 K 来证明. 若 $K \neq \overline{\text{co}}(\text{str exp}K) \triangleq W$, 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $x^* \in X^*, \|x^*\| = 1$ 和 $r \in R$, 使得 $x^*(W) < r < \sup x^*(K)$. 取 $\alpha = \sup x^*(K) - r$, 则 $W \cap S(K, x^*, \alpha) = \varnothing$. 由 (iv), se$(K)$ 在 $S(X^*)$ 中稠密, 故存在 $y^* \in \text{se}(K), \|y^*\| = 1, \|x^* - y^*\| \leqslant \alpha/4M$, 其中 $M = \sup\{\|x\| : x \in K\}$. 当 $y \in S(K, y^*, \alpha/2)$ 时,

$$\begin{aligned} x^*(y) &> y^*(y) - |x^*(y) - y^*(y)| > \sup y^*(K) - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{4M}M \\ &> \sup x^*(K) - \frac{\alpha M}{4M} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha M}{4M} = \sup x^*(K) - \alpha. \end{aligned}$$

所以 $y \in S(K, x^*, \alpha)$, 即 $S(K, y^*, \alpha/2) \subset S(K, x^*, \alpha)$. 若 $x_0 \in K$ 是相应于 y^* 的强暴露点, 则 $x_0 \in W$, 从而 $W \cap S(K, y^*, \alpha/2) \neq \varnothing$, 矛盾.

记 dent$K$ 是集合 K 的凹点全体, 由命题 (ii) 和定理 2 知道下面结论成立.

推论 1(Phelps) 设 X 是 Banach 空间, $K \subset X$ 是有界非空闭凸集, K 具有 RN 性质, 则

$$K = \overline{\text{co}}(\text{dent}\, K). \tag{2.8}$$

若将 se(K) 换为支撑 K 的泛函集合

$$\text{supp}K = \{x^* \in X^* \backslash \{0\} : \exists\, x \in K, x^*(x) = \sup\{f(y) : y \in K\}\},$$

则情况很不一样, 它导致一个不依赖于空间几何性质的结论. 为证明 Bishop -Phelps 的这一定理, 我们先做一些准备.

引理 3 设 C 是 X 的闭凸子集, $x^* \in X^*$ 并且 x^* 在 C 上有界, $M > 0$. 则 $\forall z \in C$, 存在 $x_0 \in C$ 使得

$$x_0 - z \in K(x^*, M) \triangleq \{x \in X :\ \|x\| < Mx^*(x)\},$$

并且 $C \cap (x_0 + K(x^*, M)) = \{x_0\}$.

证明 注意 $K(x^*, M)$ 是闭凸锥. 记 $x \geqslant y$ 当且仅当 $x - y \in K(x^*, M)$, "$\geqslant$" 是 C 上的半序. 对于 $z \in C$, 令 $Z = \{x \in C : x \geqslant z\}$, 若 W 是 Z 中的全序子集, 例如, $W = \{w_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, 则 $\{x^*(w_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ 是单调有界实数构成的网, 于是

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} x^*(w_\lambda) = \alpha = \sup_{\lambda \in \Lambda} x^*(w_\lambda).$$

由 $K(x^*, M)$ 的定义和半序性, 当 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ 时, $w_{\lambda_1} \leqslant w_{\lambda_2}$, 从而 $w_{\lambda_2} - w_{\lambda_1} \in K(x^*, M)$, 故 $\|w_{\lambda_1} - w_{\lambda_2}\| \leqslant M(x^*(w_{\lambda_2}) - x^*(w_{\lambda_1})) \to 0$. $\{w_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是 Cauchy 网, 于是 $\lim\limits_{\lambda \in \Lambda} w_\lambda = w \in C$. 后者是因为 X 的完备性. 显然 $w \geqslant z$, 故 $w \in Z, w$ 为 Z 的上界. Zorn 引理保证了 Z 中有极大元 x_0. 由 $x_0 \geqslant z$ 知 $x_0 - z \in K(x^*, M)$. 由 $x_0 \in C$ 知 $x_0 \in C \cap (x_0 + K(x^*, M))$. 若另有 y 满足同样的条件, 则 $y - x_0 \in K(x^*, M)$, $y \geqslant x_0 \geqslant z$, 从而 $y \in Z$, 但 x_0 为极大元, 故必有 $y = x_0$.

引理 4 设 $x^*, y^* \in X^*, \|x^*\| = \|y^*\| = 1, 0 < \varepsilon < 1, M > 1 + 2\varepsilon^{-1}$. 若 $\forall x \in K(x^*, M), x^*(x) \geqslant 0$, 则 $\|x^* - y^*\| \leqslant \varepsilon$.

证明 设 $x \in X, \|x\| = 1$ 使得 $Mx^*(x) > 1 + 2\varepsilon^{-1}$. 若 $y \in X, \|y\| \leqslant 2\varepsilon^{-1}$ 并且 $x^*(y) = 0$, 则 $\|x \pm y\| \leqslant 1 + \varepsilon/2 < Mx^*(x \pm y)$, 即 $x \pm y \in K(x^*, M)$. 又 $\forall\, x \in K(x^*, M), x^*(x) \geqslant 0$, 故知 $y^*(x \pm y) \geqslant 0$, 于是 $|y^*(y)| \leqslant y^*(x) \leqslant \|y^*\|\ \ \|x\| = 1$. 若 $\|y\| \leqslant 1$, $|y^*(y)| \leqslant \varepsilon/2$, 由引理 2, $\min(\|x^* + y^*\|, \ \|x^* - y^*\|) \leqslant \varepsilon$. 但 $M > 1$, 故存在 $z \in X, \|z\| = 1$, 使得 $x^*(z) > \max(\varepsilon, M^{-1})$, 于是 $\|z\| = 1 < Mx^*(z), z \in K(x^*, M), y^*(z) \geqslant 0$, 从而 $\varepsilon < x^*(z) \leqslant x^*(z) + y^*(z) \leqslant \|x^* + y^*\|$. 最后必有 $\|x^* - y^*\| \leqslant \varepsilon$.

定理 4(Bishop-Phelps) 设 C 是 Banach 空间 X 的有界闭凸子集, 则 supp(C) 是 X^* 中的范数稠密集.

证明 不失一般性, 设 $0 \in C$ 并且 $x^* \in X^*, \|x^*\| \leqslant 1$. 我们证明 $\forall 0 < \varepsilon < 1$, 存在 $y^* \in \text{supp}C$, 使得 $\|x^* - y^*\| \leqslant \varepsilon$. 为此取 $M > 1 + 2\varepsilon^{-1}$, 取 $x_0 \in X$ 使

$Mx^*\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) > 1+2\varepsilon$. 容易验证：$B_{\varepsilon/M}\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) \subset K(x^*,M)$, 从而后者是具有非空内部的闭凸锥. 取 $z=0$, 由引理 3, 存在 $y_0 \in C$ 使得 $C\cap(y_0+K(x^*,M)) = \{y_0\}$. 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $y^* \in X^*$ 使得

$$\begin{aligned}\sup y^*(C) = y^*(y_0) &\leqslant \inf_{x\in K(x^*,M)} y^*(y_0+x)\\ &= y^*(y_0) + \inf_{x\in K(x^*,M)} y^*(x).\end{aligned} \tag{2.9}$$

y^* 是支撑 C 的泛函, $y^* \in \text{supp}C$ 并且 y^* 在 $K(x^*,M)$ 上非负, 由引理 4, $\|x^*-y^*\| \leqslant \varepsilon$.

定义 3 设 $K\subset X$ 是有界集, $x^*\in X^*, x^*\neq 0, \alpha>0$, 称

$$S(K,x^*,\alpha) = \{x\in K, x^*(x) \geqslant M(K,x^*)-\alpha\}, \tag{2.10}$$

是由 x^* 和 α 确定的 K 的切片.

引理 5 有界集 $K\subset X$ 是可凹的当且仅当 K 有直径任意小的切片.

证明 若 K 是可凹的, $\varepsilon>0$, 存在 $x\in K, x \notin \overline{\text{co}}\,(K\backslash B_\varepsilon(x))$. 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $x^*\in X^*, \|x^*\|=1$ 和 $r\in R$,

$$x^*(x) > r > \sup\{x^*(y), y\in \overline{\text{co}}(K\backslash B_\varepsilon(x))\}.$$

取 $\alpha = M(K,x^*)-r$, 则 $S(K,x^*,\alpha)\subset B_\varepsilon(x)\cap K$. 实际上, $\forall\, y\in S(K,x^*,\alpha), x^*(y) > M(K,x^*)-\alpha = r$, 所以 $y \in \overline{\text{co}}(K\backslash B_\varepsilon(x))$. 于是 $y\in B_\varepsilon(x)$, $\text{diam}S(K,x^*,\alpha) \leqslant 2\varepsilon$.

反之, $\forall\,\varepsilon>0$, 若 $\exists x^*\in X^*, x^*\neq 0, \alpha>0$, 使得 $\text{diam}S(K,x^*,\alpha)<\varepsilon$. 则 $\forall\, x\in S(K,x^*,\alpha), x^*(x) > r = M(K,x^*)-\alpha$, 于是

$$\overline{\text{co}}(K\backslash B_\varepsilon(x)) \subset \overline{\text{co}}(K\backslash S(K,x^*,\alpha)) \subset (x^*)^{-1}(-\infty, r],$$

但 $x^*(x) > r$ 故 $x \notin \overline{\text{co}}(K\backslash B_\varepsilon(x))$.

定理 5(Lindenstuauss) 设 K 是 Banach 空间 X 中的有界闭凸子集. 若 K 具有 RN 性质, 则 K 具有 KM 性质并且 $K=\overline{\text{co}}(\text{ex}K)$.

证明 由引理 5, K 及其每个子集具有直径任意小的切片. 取 $K_0=K$, 应用归纳法, 假若 K_n 已定义, 不妨设 $S(K_n,x_n^*,\alpha)$ 是 K_n 的直径小于 $2^{-(n+1)}$ 的切片, 应用 3.2 节定理 2 证明中使用的方法以及 Bishop-Phelps 定理, 存在 $x_{n+1}^*\in \text{supp}K_n$, $S(K_n,x_{n+1}^*,\alpha/2)\subset S(K_n,x_n^*,\alpha)$, 令

$$K_{n+1} = \{x\in K_n : x_{n+1}^*(x) = \sup x_{n+1}^*(K_n)\}.$$

K_{n+1} 是非空有界闭凸集并且当 $x, y \in K_n, tx+(1-t)y \in K_{n+1} (0<t<1)$ 时, 必有 $x, y \in K_{n+1}$, 此外 diam $K_{n+1} \leqslant 2^{-(n+1)}$. 此时有唯一的点 $\{x_0\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, 我们验证 $x_0 \in \text{ex } K$. 实际上若 $x_0 = tx+(1-t)y$, 其中 $x, y \in K = K_0$, 因为 $x_0 \in K_1$, 由上面所说的性质 $x, y \in K_1$, 重复这一过程知 $\forall\, n \geqslant 1, x, y \in K_n$. 所以最终有 $x = y = x_0$. 以上证明对于 K 的每个非空有界闭凸子集也成立, 故 X 具有 KM 性质.

为了证明 $K = \overline{\text{co}}(\text{ex}K) \triangleq W$, 反设 $K \neq W$. 由 Bishop-Phelps 定理, 存在 $x^* \in X^*$ 和 $y_0 \in K$ 使得 $\sup x^*(W) < \sup x^*(K) = x^*(y_0)$. 集合

$$K' = \{x \in K : x^*(x) = x^*(y_0) \subset K\}$$

是有界闭凸子集, 并且由上面证明知道 $\text{ex}K' \neq \varnothing$. 由 $\text{ex}K' \subset \text{ex } K$ 得出 $\overline{\text{co}}(\text{ex}K') \subset \overline{\text{co}}(\text{ex}K) = W$, 从而 $x^*(y_0) \leqslant \sup x^*(W)$, 矛盾.

关于定理 4 的逆是否成立, 即 KM 性质是否蕴含 RN 性质这是一个令人瞩目的问题. 目前在略带附加条件的情况下已得到肯定的答案. 例如, 若 X 是一个共轭空间或者 X 本身是一个 Banach 格, 则 KM 性质蕴含 RN 性质, 前一个结论我们将在下节叙述, 至于第二个结论的证明可参见文献 [27]. 然而对于一般 Banach 空间这仍是一个未决的问题.

推论 2 $C(\Omega)$ 不具有 RN 性质 (其中 Ω 是非有限紧 Hausdorff 空间). 当 μ 不是纯原子测度时, $L_1(\mu)$ 不具有 RN 性质.

证明 对于所说的 Ω 一定存在一个非孤立点 ω_0. 考虑集合 $\{f \in C(\Omega) : f(\omega_0) = 0, \|f\| \leqslant 1\}$. 类似于例 1 证明 c_0 的闭单位球不具有端点, 可证明此子集也不具有端点. 从而 $C(\Omega)$ 不具有 RN 性质.

对于空间 $L_1(\mu)$, 将 μ 作分解 $\mu = \mu_1 + \mu_2$, 其中 μ_1 是纯原子测度, μ_2 是无原子测度. 考虑 $L_1(\mu)$ 的子集

$$\left\{f \in L_1(\mu) : \int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu_1 = 0, \int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu_2 \leqslant 1\right\},$$

像例 2 一样可证明此集合不具有端点, 从而 $L_1(\mu)$ 不具有 RN 性质.

让我们转到 Edgar-Choquet 表现定理. 证明这一定理需要较多预备知识, 这里只准备把它罗列出来做一点必要的解释.

定理 6(Edgar) 设 K 是 Banach 空间 X 的有界可分闭凸子集, K 具有 RN 性质, 则 $\forall\, x_0 \in K$, 存在概率测度 P_{x_0}, P_{x_0} 在 K 的万有可测子集上定义, $P_{x_0}(\text{ex}K) = 1$ 并且

$$\int_{\text{ex}K} x^*(x) \mathrm{d}P_{x_0}(x) = x^*(x_0), \quad \forall\, x^* \in X^*. \tag{2.11}$$

Edgar 定理与 Chouque 的紧凸集的端点表现定理十分相像, 实际上前者是后者

在非紧情况下 Chouque 定理的推广, 不过需要补充空间具有 RN 性质. 它们为许多分析问题提供了方便有力的工具.

设 (D,τ) 是 Hausdorff 拓扑空间, $B(D)$ 是由 D 的 Borel 子集构成的 σ 代数. $B(D)$ 上的概率测度 μ 称为是胎紧的, 若 $\forall\, \varepsilon>0$, 存在 τ 紧集 K 使得 $\mu(X\backslash K)<\varepsilon$. $B(D)$ 上胎紧概率测度的全体记为 $P_t(D,\tau)$ 或 $P_t(D)$. 此外以 U_μ 记 $B(D)$ 的 μ 完备化并且记

$$U_t=\cap\{U_\mu, \forall\, \mu\in P_t(D)\}. \tag{2.12}$$

称 U_t 是 $B(D)$ 的胎紧测度的万有 σ 代数, 其中每个集合称为万有可测集.

已经证明的是, 若 K 是 Banach 空间中的可分闭凸子集, 则 ex$K$ 一定是万有可测集. 有关这一定理的详细证明请见参考文献 [89].

3.3 共轭空间中的凸集

第 2 章已经证明了可分共轭空间具有 RN 性质, 但是当 Banach 空间自身可分时, 此空间未必具有 RN 性质. 这反映出就几何性质而言, 共轭空间具备更好的条件. 这一点对于它的子集也是成立的. 本节将叙述那些只有共轭空间的子集才具有的性质. 特别地我们将证明对于共轭空间中的闭凸集, RN 性质等价于 KM 性质, 等价于不含任何 δ 树等性质.

我们总设 X 是 Banach 空间, X^* 是 X 的共轭。

定义 1 设 $K\subset X^*$ 是有界子集, $x^*\in K$ 称为 K 的 w^* 凹点, 若 $\forall\varepsilon>0, x^*\notin \overline{\text{co}}^{w^*}(K\backslash B_\varepsilon(x^*))$. K 称为是 w^* 可凹的, 若 $\forall\varepsilon>0, \exists x^*_\varepsilon\in K$ 使得 $x^*\notin \overline{\text{co}}^{w^*}(K\backslash B_\varepsilon(x^*_\varepsilon))$. 一个集合的每个有界闭凸子集是 w^* 可凹的, 则称此集合是子集 w^* 可凹的.

定义 2 设 $K\subset X^*$ 是有界闭凸集, 称 $x^*\in K$ 为 K 的 w^* 强暴露点, 若存在 $x\in X$, x 作为 X^{**} 中的元强暴露 x^*, 记为 $x^*\in w^*$-str exp$K$. 记 w^*-se$K$ 是 K 的 w^* 强暴露泛函的全体.

定理 1 设 $K\subset X^*$ 是 w^* 紧凸集, 则以下条件等价:

(i) 对于每个 w^* 紧凸子集 $D\subset K$, $D=\overline{\text{co}}^{w^*}(w^*\text{-str}\exp D)$;

(ii) 对于每个 w^* 紧凸子集 $D\subset K$, $D=w^*\text{-str}\exp D\neq\varnothing$;

(iii) K 是子集 w^* 可凹的;

(iv) K 的每个 w^* 紧凸子集 D 包含有直径任意小的 w^* 切片, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists x\in X, \alpha>0$, 使得依 X^* 中范数

$$\text{diam}S(D,x,\alpha)=\text{diam}\{x^*\in D: x^*(x)>\sup x(D)-\alpha\}<\varepsilon;$$

(v) K 的每个非空紧子集包含有直径任意小的非空相对 w^* 开集;

(vi) 对于每个范数闭子集 $D\subset K$, 恒等映射 $I:(D,w^*)\to(D,\|\cdot\|)$ 存在连续点.

证明　(i) ⇒ (ii). 显然, (ii) ⇒ (iii) 是由于每个 w^* 强暴露点是 w^* 凹点, 于是 K 的每个子集是 w^* 可凹的. 至于 (iii) ⇔ (iv) 可像 3.2 节定理 3 一样去证明.

(iv) ⇒ (i). 可以仿照 3.2 节定理 1 和定理 2(iv) ⇒ (iii) 的证明, 只须取其中的泛函为 X 中的元, se$K$ 换为 w^*-se$K$, $\overline{\text{co}}(K)$ 换为 $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$, 而 $\text{str}\exp K$ 换为 w^*-$\text{str}\exp K$.

(i) ⇒ (vi). 设 $D\subset K$ 是闭集, 记 $D'=\overline{\text{co}}^{w^*}(D)$. 取 $x_0^*\in w^*$-$\text{str}\exp(D')$(由 (v)w^*-$\text{str}\exp(D')\neq\varnothing$). 不妨设 x_0 在 x_0^* w^* 强暴露 D'. 考虑切片

$$S(D',x_0,\alpha)=\{x^*\in D':x^*(D_0)>M(D',x_0)-\alpha\},$$

$(M(D',x_0)=\sup\{x^*(x_0):x^*\in D'\})$. 当 $\alpha>0$ 时 ,$x_0^*\in S(D',x_0,\alpha)$ 并且根据强暴露点的定义, 当 $\alpha\to 0$ 时, $\text{diam}\,S(D',x_0,\alpha)\to 0$. 这说明当 $x_n^*\xrightarrow{w^*}x_0^*$ 时必有 $\|x_n^*-x_0^*\|\to 0$, 即 x_0^* 是 $I:(D',w^*)\to(D,\|\cdot\|)$ 的连续点. 但实际上 $x_0^*\in D$. 否则 $\exists\varepsilon>0$ 使得 $B_\varepsilon(x_0^*)\cap D=\varnothing$, 从而对于某个 $\alpha>0, S(D',x_0,\alpha)\cap D=\varnothing$, 从而

$$x_0^*\notin\{x^*\in X^*:x^*(x_0)\leqslant M(D',x_0)-\alpha\},$$

后者包含了 D'. 于是 x_0^* 是 $I:(D,w^*)\to(D,\|\cdot\|)$ 的连续点.

(vi) ⇒ (v). 注意 w^* 紧凸子集是范数闭集. 若 x_0^* 是 $I:(D,w^*)\to(D,\|\cdot\|)$ 的连续点, 则 x_0^* 存在 w^* 开邻域直径小于 ε.

(v) ⇒ (iv). 设 D 是 K 的 w^* 紧凸子集, 令 $A=\text{ex}\,D, B=\bar{A}^{w^*}$, 由 Krein-Milman 定理, $A\neq\varnothing$. 又 B 为 w^* 紧集, 设 V 为 (v) 所说的 w^* 开集, $V\cap B\neq\varnothing$, diam $(V\cap B)<\varepsilon$, 从而 $A\cap V\neq\varnothing$. 若 $D_1=\overline{\text{co}}^{w^*}(A\cap V), D_2=\overline{\text{co}}^{w^*}(B\backslash V)$, 则 D_1,D_2 为 w^* 紧集且 $D_1\subset D, D=\text{co}(D_1\cup D_2)$. 若不然 $\text{ex}D=A=(A\backslash V)\cup(A\cap V)\subset(B\backslash V)\cup(A\cap V)\subset D_1\cup D_2\subset D$. 此外, diam $D_1=$ diam $(B\cap V)<\varepsilon$ 并且 $D\backslash D_2\neq\varnothing$. 否则 $D\subset D_2, A=\text{ex}\,D\subset B\backslash V, A\cap V=\varnothing$, 矛盾. 我们证明此时必存在 D 的一个 w^* 切片 J 使得 diam$J<\varepsilon$, 并且含有 D_1 的一点.

设

$$D_r=\{x^*:x^*=(1-\lambda)x_1^*+\lambda x_2^*,x_i^*\in D_i,i=1,2,0<r\leqslant\lambda\leqslant 1\},$$

$$M=\sup\{\|x^*-y^*\|:x^*\in D,y^*\in D_2\},$$

则 D_r 是 w^* 紧凸集, 由于 $D_1\subset D$, 并且 $\forall r,0<r\leqslant 1$, $D_1\not\subset D_r$, diam$D_1<\varepsilon$. 选取 $r_0>0$ 使 $2r_0M+\text{diam}D_1<\varepsilon$. 对于 $x^*\in D\backslash D_{r_0}$, 则 $x^*\in D\backslash D_{r_0}$, 故 $x^*=(1-\lambda)x_1^*+\lambda x_2^*$, 其中 $x_i^*\in D_i, 0\leqslant\lambda<r_0$, 所以

$$\|x^*-x_1^*\|=\lambda\,\|x_1^*-x_2^*\|<\lambda M,$$

$$\text{diam } (D\backslash D_{r_0}) \leqslant 2r_0 M + \text{diam } D_1 < \varepsilon.$$

若 $x^* \in D_1\backslash D_{r_0}$, 则 $x^* \in D\backslash D_{r_0}$. Hahn-Banach 定理应用于 x^* 和 D_{r_0} 知, 存在 D 的 w^* 切片 J 包含于 $D\backslash D_{r_0}, x^* \in J$ 并且 $x^* \in D_1$.

定理 2 设 $K \subset X^*$ 是 w^* 紧凸集, K 是可分的, 则 K 是子集 s 可凹的.

证明 设 $\{x_n^*\}$ 是 K 的可数稠密集, $\{x_{n_i}\}$ 是 X 的单位球中的元素使得 $\lim\limits_{i\to\infty} x_n^*(x_{n_i}) = \|x_n^*\|$. 记 $Y = \overline{\text{span}}\{x_{n_i} : i \geqslant 1, n \geqslant 1\}$, 定义 $I : Y \to X$ 是恒等嵌入映射. 考虑共轭映射 $I^* : X^* \to Y^*$, 当限制在 K 上时, I^* 是仿射等距映射,

$$I^*(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha I^* x + (1-\alpha) I^* y, \quad \forall x, y \in D, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

并且是 w^*-w^* 同胚. 于是不妨设 K 是 Y^* 的 w^* 紧子集并且范数可分. 由于 Y 是可分的, 不妨设 $\{y_i\}$ 是 Y 的单位球中的稠密子集.

若 K 存在子集 D 不是 s 可凹的, 像 3.1 节定理 2 证明中那样可以构造测度空间 $([0,1), \Sigma, \lambda)$ 上的 Y^* 值鞅, 使得:

(i) $\{f_n(\omega) : n \geqslant 0, \omega \in [0,1)\}$ 是 D 的可数子集;

(ii) 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\|f_{n+1}(\omega) - f_n(\omega)\| \geqslant \varepsilon, t \in [0,1)$.

此时, $\forall x^{**} \in X^*, \{x^{**} f_n, B_n, n \geqslant 1\}$ 是标量值鞅, 从而 a.e. 收敛. 对于每个 y_i 除去一个 0 测度集之后 $f_n(\omega)y$ 收敛. 由于 y_i 在 Y 的单位球中范数稠密, 容易知道除去一个 0 测度集 $f_n(\omega)y$ 收敛, $\forall y \in Y$. 由 w^* 紧性, 存在

$$w^* - \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega), \text{a.e.}.$$

显然, f 的值域是有界集并且是可分的, 为了得到 f 的 Bochner 可积性, 只需证明 f 的可测性. 由上面证明知道 $\forall y \in Y$, $f(\omega)y$ 可测, 即 $f(\omega)$ 是 w^* 可测的. 对于任何 w^* 开集或闭集 $H \subset X^*, f^{-1}(H) \in \Sigma$. K 可分, 故 K 的每个开集是 K 的 w^* 紧集的可数并. 故对于每个开集 $B, f^{-1}(B) \in \Sigma$, 可测性得到验证.

因为 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是鞅, 由上述收敛性必有

$$E(f(\omega)y \,|B_n) = f_n(\omega)y, \quad \forall\, n \geqslant 0\,.$$

由此不难知道 $E(f\,|B_n) = f_n$, 从而 $(f_n, B_n, n \geqslant 0)$ 是正则鞅. 由 Levy 定理, f_n a.e. 收敛, 与 (ii) 矛盾. 这说明 K 必是 s 可凹的.

在叙述下面问题之前, 让我们介绍一些基本概念. 集合的基数 (势) 是指它的元素的个数. A 的势记为 $|A|$. 对于 Banach 空间 X 中的子集 D, 若 D 中有子集 A 使得 co(A) 在 D 中稠密, 则这样的集合中最小的势称为 D 的稠密特征, 记为 dens D, 即

$$\text{dens}D = \inf\{|A| : A \subset X, \overline{\text{co}}(A) \supset D\}.$$

Banach 空间的稠密特征是由它的拓扑唯一确定的. 显然, X 是可分的当且仅当 $\text{dens}X < \omega_1$, 其中 ω_1 是第一不可数序数. 拓扑向量空间也可以类似地定义稠密特征, 其中的 $\overline{\text{co}}(A)$ 应理解为在相应的拓扑之下的闭凸包.

引理 1 设 X 是 Banach 空间, $D \subset Sp(X)$, 后者是 X 的单位球面. 若 ξ 是无穷基数, $\text{dens}\ D \geqslant \xi$, 则存在 $M > 0, D$ 中的网 $\{x_\lambda, \lambda < \xi\}$ 和 X^* 中的网 $\{x_\lambda^*, \lambda < \xi\}$, 使得 $\|x_\lambda^*\| \leqslant M, \forall \lambda < \xi$. 并且对于任何 $\alpha, \beta < \xi$,

$$x_\alpha^*(x_\beta) = \begin{cases} 0, & \beta < \alpha, \\ 1, & \beta = \alpha. \end{cases} \tag{3.1}$$

证明 用超限归纳法. 由于 $\text{dens}D \geqslant \xi$, ξ 为无穷序数, 故存在 $0 < \delta < 1$, 子集 $D_0 \subset D$, 使得 $D_0 \geqslant \xi$ 并且 $\|x - y\| \geqslant \delta, x, y$ 为 D_0 中任意两不同点. 令 $M > 2/\delta$, 任取 $x_0 \in D_0$, 则有 $x_0^* \in X^*$ 使得 $x_0^*(x_0) = 1, \|x_0^*\| < M$. 设 $Y_1 = \overline{\text{span}}\{x_0\}$, 则 $\text{dens}Y_1 = 1 < \omega_1$. 故 $D_0 \backslash Y_0 \neq \varnothing$. 取 $x_1 \in D_0 \backslash Y_0, \text{dist}(x_1, Y_1) \geqslant \delta/2$. 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $x_1^* \in X^*, x_1^*|_{Y_1} = 0, x_1^*(x_1) = 1$ 并且 $\|x_1^*\| \leqslant \delta/2 < M$. 假若 $\lambda < \xi$ 并且 $\{x_\alpha : \alpha < \lambda\} \subset D, \{x_\alpha^* : \alpha < \lambda\}$ 均已取定, 令 $Y_\lambda = \overline{\text{span}}\{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$, 则 $\text{dens}Y_\lambda \leqslant \lambda < \xi$. 注意以 Y_λ 中每个点为中点, $\delta/4$ 为半径的球覆盖 Y_λ, 但不能覆盖 D_0. 否则由于 $\xi > \text{dens}Y_\lambda, D_0$ 中至少有两个点属于同一个球, 于是此两点的距离小于 $\delta/2$, 这与 D_0 的性质矛盾. 于是 $D_0 \backslash Y_\lambda \neq \varnothing$, 取 $x_\lambda \in D_0 \backslash Y_\lambda$ 且 $\text{dist}(x_\lambda, Y_\lambda) \geqslant \delta/2$, 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $x_\lambda^* \in X^*$, $x_\lambda^*(x_\lambda) = 1, x_\lambda^*|_{Y_\lambda} = 0$ 并且 $\|x_\lambda^*\| \leqslant \delta/2 < M$. 如此做下去, 则 $\{x_\lambda : \lambda < \xi\}, \{x_\lambda^*, \lambda < \xi\}$ 满足所要的条件.

定义 3 设 $A \subset X^*, x^* \in X^*$, 称 x^* 是 A 的 w^* 凝聚点, 若 x^* 的每个 w^* 邻域包含 A 的不可数无穷多个点.

引理 2 设 X 是可分空间, $A \subset X^*$ 是有界不可数子集, 则除去至多可数多个点之外, A 中剩下的点都是 A 的 w^* 凝聚点.

证明 注意 X^* 上的 w^* 拓扑是可度量化的. 作为拓扑空间, (A, w^*) 满足第二可数公理, 于是成为 Lindelof 空间, 引理结论直接从 Lindelof 空间的性质得到.

定义 4 非空集合序列 $\{\Delta_n, n \geqslant 1\}$ 称为准 Haar 系, 若 $\Delta_n \supset \Delta_{2n} \cup \Delta_{2n+1}$ 并且 $\Delta_{2n} \cap \Delta_{2n+1} = \varnothing$ $(n \geqslant 1)$. 若此外有 $\Delta_n = \Delta_{2n} \cup \Delta_{2n+1}$, 则称 $\{\Delta_n, n \geqslant 1\}$ 为 Haar 系.

现在将引理 1 应用于共轭空间 X^*. 若 $D \subset X^*, \text{dens}D \geqslant \omega_1^+$($\omega_1^+$ 是第一不可数序数 ω_1 后面的序数). 由引理 1, 存在 $\{x_\lambda^*; \lambda < w_1^+\} \subset X^*$ 和 $\{x_\lambda^{**}; \lambda < \omega_1^+\} \subset X^{**}$ 使得 $x_\alpha^{**}(x_\beta^*) = \delta_{\alpha,\beta}(\beta \leqslant \alpha < \omega), \|x_\alpha^{**}\| \leqslant M$. 记 $A = \{x_\lambda^*; \lambda < \omega_1^+\}, A$ 是不可数集.

引理 3(Stegall) 设 X 是可分空间, $D \subset Sp(X^*)$, $\text{dens}D \geqslant \text{dens}X$. 则存在由 $Sp(X^*) \cap \overline{\text{co}}^{w^*}(D)$ 中的 w^* 紧子集构成的 Haar 系 $\{\Delta_n; n \geqslant 1\}$ 和 $\{x_n; n \geqslant 1\} \subset X$,

使得 $\|x_n\| \leqslant M$ 并且对于一列趋于 0 的正数 δ_n,

$$|x^*(x_n) - \chi_{\Delta_n}(x^*)| < \delta_{k+1}, \quad 2^k \leqslant n < 2^{k+1}, \quad x^* \in \Delta_1, \quad k \geqslant 1. \tag{3.2}$$

关于这一引理的构造性证明方法可参看 Diestel, Uhl[78] 或者 Stegall[197].

引理 4 设 Δ 是紧 Hausdorff 空间, $\{\Delta_n, n \geqslant 1\}$ 是由 Δ 的紧子集构成的 Haar 系. 则存在定义在 Δ 的 Borel 子集上的概率测度 μ 使得 $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ 时 $\mu(\Delta_n) = 2^{-k}$, $k \geqslant 1$.

证明 令 $Y = \text{span}\{\chi_{\Delta_n} : n \geqslant 1\}$ 并且定义映射 $F: Y \to R$, 使得 $F(\chi_{\Delta_n}) = 2^{-k}(2^k \leqslant n < 2^{k+1})$. 此定义是合理的, 因为 $\chi_{\Delta_{2n}} + \chi_{\Delta_{2n+1}} = \chi_{\Delta_n}$. 若 $f \in Y$, 则对于充分大的 k,

$$f = \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} d_i \chi_{\Delta_i}, \quad d_i \in R. \tag{3.3}$$

F 是正算子并且 $F(1) = 1$. 此外注意到每个 Δ_i 是 w^* 紧集从而是 w^* 闭集, 所以可以将 Y 视为 $C(\Delta)$ 的子空间, 此时 $F \in Y^*$ 且 $\|F\| = F(1) = 1$. 设 $F_1 \in C(\Delta)^*$ 是 F_1 的保范延拓, 则 F_1 也是 $C(\Delta)$ 中的正泛函. 由 Riesz 定理, 存在概率测度 μ, 定义在 Δ 的 Borel 子集上使得对于每个 $f \in C(\Delta)$, $\int f \mathrm{d}\mu = F_1(f)$. 特别地,

$$\mu(\Delta_n) = F_1(\chi_{\Delta_n}) = 2^{-k}, \quad 2^k \leqslant n < 2^{k-1}, k \geqslant 1. \tag{3.4}$$

引理 5(Bourgin-Huff-Morris) 设 $M > 0, (\delta_k, k \geqslant 1)$ 是正数序列, $\delta_k \to 0$ 并且 $\sup\limits_k \delta_k = \alpha < 1/2$. $\{\Delta_n, n \geqslant 1\}$ 是 X^* 的单位球面上的 w^* 紧凸集构成的 Haar 系, $x_n \in X, \|x_n\| < M$, 并且

$$|x^*(x_n) - \chi_{\Delta_n}(x^*)| < \delta_k, \quad x^* \in \Delta_1, 2^k \leqslant n < 2^{k+1}.$$

则存在有界序列 $(x_n^*, n \geqslant 1) \subset \overline{\text{co}}^{w^*}(\Delta)$ 满足:

(i) $(x_n^*, n \geqslant 1)$ 是 δ 树, $\delta = (1 - 2\alpha)/2M$;

(ii) 若 $K = \{x^* \in \overline{\text{co}}^{w^*}(\Delta) : \lim\limits_{n \to \infty} x^*(x_n) = 0\}$, 则 K 是无端点的有界非空范数闭凸子集.

证明 定义 $e: X \to C(\Delta), e(y)(x^*) = x^*(y), \forall\, y \in X, x^* \in \Delta$. 设 μ 是引理 4 中的概率测度, 令

$$\mu_n = 2^k \mu|_{\Delta_n} \in C(\Delta)^*, \quad x_n^* = e^*(\mu_n), \quad n \geqslant 1. \tag{3.5}$$

e^* 为 e 的共轭算子, μ_n 为概率测度.

首先 $x_n \in \overline{\text{co}}^{w^*}(\Delta)$. 否则对于某个 $y \in X$,

$$\begin{aligned}\inf\{x^*(y) : x^* \in \Delta\} > x_n^*(y) &= e^*(\mu_n)(y)\\ &= \int_\Delta x^*(y)\mathrm{d}\mu_n(x^*) \geqslant \inf\{x^*(y) : x^* \in \Delta\},\end{aligned}$$

矛盾. 下面我们证明:

1° $(x_n^* : n \geqslant 1)$ 是树, 容易知道

$$x_n^* = e^*(\mu_n) = e^*\left(\frac{1}{2}\mu_{2n} + \frac{1}{2}\mu_{2n+1}\right) = \frac{1}{2}x_{2n}^* + \frac{1}{2}x_{2n+1}^*.$$

现在对于 $\alpha = \sup\limits_k \delta_k < 1/2$,

$$\begin{aligned}M\left\|x_{2n+1}^* - x_n^*\right\| \geqslant& (x_n^* - x_{2n+1}^*)(x_{2n})\\ =& e^*(\mu_n)(x_{2n}) - e^*(\mu_{2n+1})(x_{2n})\\ =& \int_\Delta x^*(x_{2n})\mathrm{d}\mu_n(x^*) - \int_\Delta x^*(x_{2n})\mathrm{d}\mu_{2n+1}(x^*)\\ =& \frac{1}{2}(\int_\Delta x^*(x_{2n})\mathrm{d}\mu_n(x^*) - \int_\Delta x^*(x_{2n})\mathrm{d}\mu_{2n+1}(x^*))\\ =& \frac{1}{2}\int_\Delta [x^*(x_{2n}) - \chi_{\Delta_{2n}}(x^*)]\mathrm{d}(\mu_{2n} - \mu_{2n+1})(x^*)\\ &+ \frac{1}{2}\int_\Delta \chi_{\Delta_{2n}}(x^*)\mathrm{d}(\mu_{2n} - \mu_{2n+1})(x^*).\end{aligned}$$

由于 $|x^*(x_{2n}) - \chi_{\Delta_{2n}}(x^*)| < \alpha$, 故

$$\left|\frac{1}{2}\int_\Delta [x^*(x_{2n}) - \chi_{\Delta_{2n}}(x^*)]\mathrm{d}(\mu_{2n} - \mu_{2n+1})(x^*)\right| \leqslant \alpha,$$

$$\int_\Delta \chi_{\Delta_{2n}}(x^*)\mathrm{d}(\mu_{2n} - \mu_{2n+1})(x^*) \leqslant \mu_{2n}(\Delta_{2n}) = 1.$$

从而

$$\left\|x_{2n+1}^* - x_n^*\right\| \geqslant \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)/M = \frac{1 - 2\alpha}{2M}. \tag{3.6}$$

对于 $\left\|x_{2n+1}^* - x_n^*\right\|$ 可以得到同样的估计式.

2° 容易知道 K 是有界凸集. 为证 K 是闭的, 设 $x^* \in \bar{K}$. 此时 $x^* \in \overline{\text{co}}^{w^*}(\Delta)$, 只须证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_n) = 0$. $\forall\, \varepsilon > 0$, 取 $y^* \in K, \|y^* - x^*\| \leqslant \varepsilon/2M$, 又取 n_0, 使当 $n \geqslant n_0$ 时, $|y^*(x_n)| < \varepsilon/2$, 于是

$$|x^*(x_n)| \leqslant \|y^* - x^*\|\,\|x_n\| + |y^*(x_n)| < \varepsilon,$$

即 $x^* \in K$. 剩下证明 $K \neq \varnothing$, $\mathrm{ex}K = \varnothing$. 仍用 1° 中的 $e: X \to C(\Delta)$, 当 $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$ 时,

$$\|e(x_n) - \chi_{\Delta_n}\|_\infty < \delta_{k-1}. \tag{3.7}$$

e 的共轭映射 $e^*: C(\Delta)^* \to X^*$ 是 w^*-w^* 连续的, 它将每个点质量 δ_{x^*} 映射为 x^*, 若以 $P(\Delta)$ 记 Δ 上的概率测度集合, 则

$$e^*(P(\Delta)) = e^*(\overline{\mathrm{co}}^w\{\delta_{x^*}, x^* \in \Delta\}) = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\Delta).$$

对于 $v \in P(\Delta)$, 由

$$0 = \lim_n e^*(v)(x_n) = \lim_n \int_\Delta e^*(x_n)\mathrm{d}v = \lim_n \int_\Delta \chi_{\Delta_n}\mathrm{d}v = \lim_n v(\Delta_n)$$

得出 $e^*(v) \in K$. 注意由 1° 中的证明, $\mathcal{U} = \{v \in P(\Delta) : \lim_n v(\Delta_n) = 0\}$ 非空并且 $P(\Delta) \cap e^{*-1}(K) = \mathcal{U}$, 从而 $e^*(\mathcal{U}) = K$.

为了说明 $\mathrm{ex}K = \varnothing$. 首先证明 $y_1^*, y_2^* \in \Delta$ 且 $(y_1^* + y_2^*)/2 \in K$ 时, $y_1^*, y_2^* \in K$. 为此设 $v_1, v_2 \in P(\Delta), e^*(v_1) = y_1^*, e^*(v_2) = y_2^*$, 由于 $e^*((v_1 + v_2)/2) \in K$, 所以 $(v_1 + v_2)/2 \in \mathcal{U}$, 即 $(v_1(\Delta_n) + v_2(\Delta_n))/2 \to 0$. 此即 $v_1, v_2 \in \mathcal{U}$, 故 $y_1^*, y_2^* \in K$. 现在若有 $x_0^* \in \mathrm{ex}K$, 由上述论证 $x_0^* \in \mathrm{ex}(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(\Delta))$, 从而存在 $v_0 \in \mathrm{ex}P(\Delta), e^*(v_0) = x_0^*$. ($e^{*-1}(x_0) \cap P(\Delta)$ 是 $P(\Delta)$ 中的端子集. 若 v_0 是 $e^{*-1}(x_0) \cap P(\Delta)$ 的端点, 则 v_0 满足两方面条件). 由 Krein-Milman 定理, 存在 $x^* \in \Delta, v_0 = \delta_{x^*}$ 但是 $v_0 \in \mathcal{U}$. 因为 x^* 属于无穷多个 $\Delta_n, \limsup_{n\to\infty} v_0(\Delta n) = 1$. 于是 $e^*(v_0) = x_0^* \notin K$, 矛盾.

定理 3(Stegall-Huff-Morris) 设 $K \subset X^*$ 是 w^* 紧凸子集, 则以下条件等价:

(i) K 具有 KM 性质;

(ii) K 具有 RN 性质;

(iii) 对于 X 的任何可分子空间 $Y, K|_Y = \{x^*|_Y : x^* \in K\}$ 是可分的;

(iv) 对于任何 $\delta > 0, K$ 不含 δ 树.

此外, 以上各条与定理 1(i)~(vi) 的任一条等价.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii), (iv) 是已知的. 往证 (iii) $\Rightarrow$ (i). 设 $B = \{x_n^*\}$ 是 K 中的可数子集, 取 X 的单位球中的可数子集 A, 使得

$$\sup_{x\in A}(x_i^*(x) - x_j^*(x)) = \|x_i^* - x_j^*\|, \quad i, j \geqslant 1 \tag{3.8}$$

并且记 $Y = \overline{\mathrm{span}}A, Y$ 可分. 由 (iii), $K|_Y$ 可分, 由于 $K|_Y$ 仍是 w^* 紧凸集, 由定义 1, $K|_Y$ 是 s 可凹的. 定义 $I: Y \to X$ 为嵌入映射, 则 $I^*: X^* \to Y^*$ 在 B 上的限制是仿射等距. 从而 $I^*(B) = B|_Y \subset K|_Y$ 是 s 可凹的, B 自身也是 s 可凹的, 更是 c 可凹的. 由关于一般 Banach 空间的结论 (3.1 节定理 5(iv)) 知道, X 具有 RN 性质.

现证 (ii) $\Rightarrow$ (iii) 和 (iv) $\Rightarrow$ (iii). 先设 $K \subset Sp(X^*)$, 若 (iii) 不成立, 则存在 X 的可分子空间 Y, $\mathrm{dens}(K|_Y) > \mathrm{dens}Y$. 假设 $D = K|_Y \subset Sp(Y^*)$, D 是 $Sp(Y^*)$ 的 w^* 紧凸子集. 由引理 3, 存在由 $S(Y^*) \cap \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(D)$ 的 w^* 紧子集构成的 Haar 系 $(\Delta'_n, n \geqslant 1)$ 和 $(x_n, n \geqslant 1) \subset Y, \|x_n\| \leqslant M$, 使得

$$\left|x^*(x_n) - \chi_{\Delta'_n}(x^*)\right| < 2^{-(k+3)}, \quad 2^k \leqslant n < 2^{k+1}, \quad x^* \in \Delta'.$$

对于每个 n, 记 $\Delta_n = \{x^* \in K : x^*|_Y \in \Delta'_n\}$. 可以验证 $(\Delta_n : n \geqslant 1)$ 是 K 的 w^* 紧子集构成的 Haar 系并且

$$|x^*(x_n) - \chi_{\Delta_n}(x^*)| < 2^{-(k+3)}, \quad 2^k \leqslant n < 2^{k+1}, \quad x^* \in \Delta.$$

引理 5(i) 说明 K 中含有 δ 树, 与 (iv) 矛盾. 故 (iv) $\Rightarrow$ (iii) 成立. 引理 5(ii) 说明 K 包含子集无端点, 从而 K 不具有 KM 性质, 故 (ii) $\Rightarrow$ (iii) 成立.

为了证明最后的断言, 首先若 K 是子集 w^* 可凹的, 则对于每个有界子集 D, 因为 $\overline{\mathrm{co}}(D) \subset \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(D)$, 故 w^* 可凹是可凹的, 从而 w^* 可凹意味着 K 具有 RN 性质.

反之, 由 (iii) 可推出子集 w^* 可凹. 实际上若 D 是 C 的 w^* 紧凸子集, $\varepsilon > 0$ 使得对于 D 的任何非空相对 w^* 开子集 V, $\mathrm{diam}V > \varepsilon$, 则必存在 V 的非空相对 w^* 开子集 V_1, V_2 使得关于某个 $x \in S(X)$, 当 $f_1 \in \bar{V}_1^{w^*}, f_2 \in \bar{V}_2^{w^*}$ 时, $|f_1(x) - f_2(x)| \geqslant \varepsilon/3$.

令 $W_1 = D$, 用归纳法可得到非空相对 w^* 开子集列 $\{W_n\}$ 和序列 $\{x_n\} \subset S(X)$, 使得:

(i) $W_{2n} \cup W_{2n+1} \subset W_n$;

(ii) 若 $f \in \overline{W}_{2n}^{w*}, g \in \overline{W}_{2n+1}^{w^*}$, 则 $|f(x_n) - g(x_n)| \geqslant \varepsilon/3$.

令 $Y = \overline{\mathrm{span}}\{x_n : n \geqslant 1\}, \Delta = \bigcup\limits_{k\geqslant 1} \bigcup\limits_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \overline{W}_n^{w^*}$. 则 Δ 至少有连续的势, Δ 是 C 的子集, 设 $\{n_k\}, \{m_k\}$ 是互不相同的自然数的增加序列, $n_1 = m_1 = 1, n_{k+1} = 2n_k$ 或 $2n_k + 1, m_{k+1} = 2m_k$ 或 $2m_k + 1$, 这种自然数序列的全体有不可数多个, 此时

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{W}_{n_k}^{w*} \neq \varnothing, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{W}_{m_k}^{w*} \neq \varnothing,$$

若 f, g 分别属于以上两集合, 则存在 i, 使得 $f \in \overline{W}_{2^i}^{w^*}, g \in \overline{W}_{2i+1}^{w*}$(或者二者交换), 从而 $|f(x_i) - g(x_i)| \geqslant \varepsilon/3$, 所以 $\|f|_Y - g|_Y\| \geqslant \varepsilon/3$, $\Delta|_Y$ 包含有不可数子集, 它的每两个点都以 $\varepsilon/3$ 范数分离. 于是 $C|_Y \supset \Delta_Y$ 不是可分的, 与 (iii) 矛盾. 整个定理得证.

推论　设 X 是 Banach 空间, X^* 具有 RN 性质, 则

(i) X 的每个可分子空间有可分共轭;

(ii) 若 X 是 w 序列完备的, 则 X 是自反的;

(iii) 若 X 可分, 则 X^* 可分当且仅当 X^* 具有 RN 性质;

(iv) 若 X_0 是 X 的闭子空间, Y 是 Banach 空间, $T: X_0 \to Y$ 是到上的有界线性算子, 则 Y^* 具有 RN 性质.

注意在 2.3 节末尾我们得到过 (i) 的逆.

证明 1° 不妨设 Y 是 X 的可分闭子空间, 若 Y^* 不是可分的. 注意 $S(X^*)$ 是 w^* 紧有界闭凸子集并且 $S(Y^*) \subset S(X^*)|_Y$. 现在 $S(Y^*)$ 不是可分的, 但由定理 2 得出 $S(X^*)|_Y$ 可分, 矛盾.

2° 设 $\{x_n : n \geqslant 1\} \subset X$ 是有界序列, 令 $Y = \overline{\text{span}}\{x_n : n \geqslant 1\}$, 则 Y 是 X 的可分子空间. 由 1° 知, Y^* 可分, 从而 $\{x_n : n \geqslant 1\}$ 在 Y 中有 w^*-Cauchy 子序列$(x_{n_i}, i \geqslant 1)$. 由 X 的 w 序列完备性知, x_{n_i} 是 w 收敛的, 从而 $S(X) w$ 紧, 故 X 自反.

3° 必要性显然. 反之若 X^* 具有 RN 性质, X 可分, (i) 给出 X^* 可分.

4° 对于 X_0 的可分闭子空间 Z. 由定理 2 知, Z^* 可分且具有 RN 性质, 由 1° 知 X_0^* 具有 RN 性质. 注意 $X_0/T^{-1}(0)$ 同构于 Y, 从而 Y^* 同构于 $X_0/T^{-1}(0)^* = X_0^*/(T^{-1}(0))^{\perp}$, 由 2.1 节定理 7, Y^* 具有 RN 性质.

定理得证.

3.4 Asplund 空间

Asplund 空间因与凸函数的微分相关联而显得重要, 实际上它与凸分析、优化理论、集值映射、单调算子理论、变分不等式都有密切联系. 这里仅给出 Asplund 空间的一个重要的与 RN 性质有关的结论, 当然这里的处理方式并不是最能展现这类空间丰富内容的, 却是比较简捷的方法.

定义 1 设 $D \subset X$ 是有界集, 称函数 $\varphi: X \to R$ 在一点 $x \in X$ 是 D 可微的, 若存在 $x^* \in X^*$ 使得

$$\lim_{t \to 0+} \sup_{d \in D} \left| \frac{\varphi(x + td) - \varphi(x)}{t} - x^*(d) \right| = 0. \tag{4.1}$$

称 x^* 为 φ 在 x 的 D 梯度.

若 D 为 X 的单位球 $S(X)$, 则 φ 在 x D 可微, 又称为 φ 在 x Frechet 可微. 若 $D = \{d, -d\}$, 则 φ 在 x D 可微, 即 φ 在 x 沿 d 方向 Gateaux 可微.

定义 2 设 X 是 Banach 空间, 称 X 为 Asplund 空间, 若对于每个连续凸函数 $\varphi: X \to R, \varphi$ 在 X 的稠密 G_δ 集上是 F 可微的.

定义 3 设 $D \subset X$ 是开凸子集, $\varphi: D \to R$ 是连续凸函数, $x_0 \in D$, 若存在 $x^* \in X^*$, 使得

$$x^*(y) - x^*(x_0) \leqslant \varphi(y) - \varphi(x_0), \quad \forall\, y \in D, \tag{4.2}$$

则称 x^* 为 φ 在 x_0 的次梯度. φ 在 x_0 的次梯度全体记为 $\partial\varphi(x_0)$.

引理 1 若 $D \subset X$ 是开凸集, $\varphi: D \to R$ 是连续凸函数, 则 φ 是 D 上的局部 Lipschitz 函数, 即 $\forall\, x_0 \in D$, 存在 x_0 的邻域 U_{x_0} 和 $M_{x_0} > 0$, 使得

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant M_{x_0} \|y - x\|, \quad x, y \in U_{x_0}. \tag{4.3}$$

证明 对于 $x_0 \in D$, 由连续性 $\exists \delta > 0$, 使 $\|x - x_0\| < \delta$ 时,

$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi(x_0)| + 1 = M.$$

现在设 $\max\{\|y - x_0\|, \|x - x_0\|\} < \delta/4$, 则 $\|x - y\| < \delta/2$, $\left\|x \pm \dfrac{\delta(x-y)}{2\|x-y\|} - x_0\right\| < \dfrac{\delta}{2} + \dfrac{\delta}{4} < \delta$, 从而 $\left|\varphi\left(x \pm \dfrac{\delta(x-y)}{2\|x-y\|}\right)\right| \leqslant M$. 由于$2\delta^{-1}\|x - y\| < 1$ 并且 $y = \left(1 - \dfrac{2}{\delta}\|x-y\|\right)x + \dfrac{2}{\delta}\|x-y\|\left(x - \dfrac{\delta(x-y)}{2\|x-y\|}\right)$, φ 的凸性说明

$$\varphi(y) \leqslant \left(1 - \frac{2}{\delta}\|x-y\|\right)\varphi(x) + \frac{2}{\delta}\|x-y\|\left\|\varphi\left(x - \frac{\delta(x-y)}{2\|x-y\|}\right)\right\|,$$

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leqslant \frac{2}{\delta}\|x-y\|\left|\varphi\left(x - \frac{\delta(x-y)}{2\|x-y\|}\right) - \varphi(x)\right| \leqslant \frac{4M}{\delta}\|x-y\|.$$

将 x 与 y 调换即得到所要的不等式.

引理 2 设 $\varphi: D \to R$ 是连续凸函数, 则 $\partial\varphi: D \to 2^{X^*}$ 是局部有界的. 即 $\forall x_0 \in D$, 存在 U_{x_0} 和 $M_{x_0} > 0$ 使得 $\forall x \in U_{x_0}$ 和 $x^* \in \partial\varphi(x)$, $\|x^*\| \leqslant M_{x_0}$.

证明 由引理 1, φ 是局部 Lipschitz 函数. 不妨设对于 $x_0 \in D, U_{x_0}$ 和 M_{x_0} 能保证 (4.3) 成立. 此时 $\forall x \in U_{x_0}$ 和 $x^* \in \partial\varphi(x)$, 只要 δ 足够小使得 $x_0 + B_\delta(0) \subset U_{x_0}$, 则当 $u \in B_\delta(0)$ 时,

$$y^*(u) \leqslant \varphi(x+u) - \varphi(x) \leqslant M_{x_0}\|u\|.$$

于是 $\|y^*\| = \sup\limits_{\|u\| \leqslant \delta} \delta^{-1}|y^*(u)| \leqslant \delta^{-1}M_{x_0}$.

定理 1 设 X 是 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) X 是 Asplund 空间;

(ii) X 的每个等价范数在 X 的一个稠密 G_δ 集上 Frechet 可微;

(iii) X 的每个连续半范数在 X 的一个稠密 G_δ 集上 Frechet 可微;

(iv) X^* 具有 RN 性质.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). X 的每个等价范数是 X 上的连续凸函数.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 设 p 是 X 上的连续半范数, 则存在 $K>0$, 使得 $p(x)\leqslant K\|x\|$, $\forall\, x\in X$. 令 $|||x|||=p(x)+\|x\|$, 则

$$\|x\|\leqslant |||x|||\leqslant (K+1)\|x\|,$$

$|||\cdot|||$ 为等价范数. 由假设 $\|\cdot\|$ 与 $|||\cdot|||$ 均在一个稠密 G_δ 集上 Frechet 可微, 适当改变记号, 不妨设 $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ 在同一个 G_δ 集上 Frechet 可微, 则对于其中每个点 x, 记 $x^*_{\|\cdot\|}$ 与 $x^*_{|||\cdot|||}$ 为二者的 Frechet 导数, 由恒等式

$$\begin{aligned}&\frac{|||x+td|||-|||x|||}{t}-x^*_{|||\cdot|||}(d)\\=&\frac{p(x+td)-p(x)}{t}-(x^*_{|||\cdot|||}(d)-x^*_{\|\cdot\|}(d))+\frac{\|x+td\|-\|x\|}{t}-x^*_{\|\cdot\|}(d)\end{aligned}$$

知道

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to0^+}\sup_{d\in B(X)}\left|\frac{|||x+td|||-|||x|||}{t}-x^*_{|||\cdot|||}(d)\right|\\=&\limsup_{t\to0^+}\sup_{d\in B(X)}\left|\frac{\|x+td\|-\|x\|}{t}-x^*_{\|\cdot\|}(d)\right|=0.\end{aligned}$$

即 p 在 x Frechet 可导.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). 由定理 1, 我们证明 X^* 中的每个 w^* 紧凸集 K 有一个 w^* 强暴露点. 设 K 是 w^* 紧凸集. 不妨设 $0\in K$ 并且 K 是对称的: $K=-K$(否则考虑 $K\cup(-K)$). 设 $p(x)=\sup\{|x^*(x)|:x^*\in K\}$, 则 $p(x)$ 是一个连续半范数. 当 $W=\{x:p(x)\leqslant 1\}$ 时, $p_W=p$. p_W 是 W 的 Minkowski 泛函.

令 $J=\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(w^*\text{-}\operatorname{str}\exp K)$, 则 $J\subset K$. 若 $K\backslash J\neq\varnothing$, 取 $x_0\in K\backslash J$, 记 $D=\{x:M(J,x)<M(K,x)\}$, 其中 $M(A,x)=\sup\{|x^*(x)|:x^*\in A\}$, 则 $D\neq\varnothing$, D 开. 实际上取 $y\in B_{\delta/N}(x)$, 其中 $N=\sup\{\|x\|:x\in K\}$, $\delta=(M(K,x)-M(J,x))/2$, 则

$$M(K,y)\geqslant M(K,x)-\delta>M(J,x)-\delta\geqslant M(J,y),$$

$y\in D$ 从而 $B_{\delta/N}(x)\subset D$. 由于 $p(x)$ 的 Frechet 可微点是 G_δ 稠密集, 故 $\exists x_0\in D$, $p(x)$ 在 x_0 有 F 导数 x^*. 我们证明 x_0 在 x^* w^* 强暴露 K.

实际上, 设 W 的极为 W^0, 则 $W^0=K$, $(W^0=({}^0K)^0=\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K\cup\{0\})=K)$, 故存在 $x_0^*\in W^0$, $\langle x_0,x^*\rangle=p(x_0)$, $\langle x_0,y^*\rangle<p(x_0)$, $\forall y^*\in W^0$. 从而 x_0 在 x^*w^* 暴露 W^0. 现在若 $x_n^*\in C^0$, $x_n^*(x)\to x^*(x)$, 记 $\beta_n=x^*(x)-x_n^*(x)$, 则 $\beta_n\to0$, 因为 $x^*\in W^0$,

$$x^*(y)\leqslant p(x+y)-x_n^*(x)=p(x+y)-p(x)+\beta_n,\quad \forall\, y,$$

此时必有 $\|x_n^*-x^*\|\to 0$. 实际上若反设 $\|x_n^*-x^*\|\geqslant\varepsilon>0$, 则存在 $z_n\in X,\|z_n\|=1$, $(x_n^*-x^*)(z_n)>2\varepsilon$. 由于 x^* 是 $p(x)$ 在 x_0 点的 F 导数, 故 $\exists\,\delta>0$, 当 $\|d\|\leqslant\delta$ 时,

$$p(x_0+y)-p(x_0)-x^*(d)\leqslant\varepsilon\|d\|.$$

令 $y_n=\delta z_n$, 则 $\|y_n\|=\delta$, 从而

$$\begin{aligned}2\varepsilon\delta&<(x_n^*-x^*)(y_n)=x_n^*(y_n)-x^*(y_n)\\&\leqslant p(x_0+y_n)-p(x_0)+\beta_n-x^*(y_n)\leqslant\varepsilon\|y_n\|+\beta_n,\end{aligned}$$

由于 $\beta_n\to 0$, 则得到 $2\varepsilon\delta\leqslant\varepsilon\delta$, 矛盾.

(iv) $\Rightarrow$ (i). 若 $f:D\to X$ 是连续凸函数, D 为开集, 定义

$$V_n(y^*)=\left\{x\in D;\exists V_x\subset D,\partial f(y)\subset y^*+\frac{1}{n}U(x^*),\forall y\in V_x\right\},$$

$$V_n=\bigcup_{y^*\in X^*}V_n(y^*).$$

V_n 是开集, 为证 V_n 在 D 中稠密, 由引理 2, ∂f 是局部有界的, 即 $\forall x\in D,\exists U_x$ 使得

$$A=\{x^*\in X^*;x^*\in\partial f(y),y\in U_x\}$$

是范数有界的. 故 $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(A)$ 是范数有界的并且是 w^* 紧凸集, 所以 $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(A)$ 有 w^* 强暴露点存在, 从而有范数直径任意小的切片.

设 $z\in S(X),\alpha>0$ 并且

$$S(\overline{\mathrm{co}A}^{w^*},z,\alpha)=\{x^*\in\overline{\mathrm{co}A}^{w^*}:\,x^*(z)\geqslant M(z,A)-\alpha\}\tag{4.4}$$

的范数直径小于 $1/2n$, 其中 $M(z,A)=\sup\{x^*(z):x^*\in A\}$, 从而 A 本身的切片

$$\operatorname{diam}S(A,z,\alpha)<1/2n,\tag{4.5}$$

并且不是空集.

取 $y_1^*\in S(A,z,\alpha)$, 则存在 $x_1\in U_x$ 使得 $y_1^*\in\partial f(x_1)$. 对于充分小的 $r>0$ 可使 $x_2=x_1+rz\in U_x$, 从而 $\partial f(x_2)\subset S(A,z,\alpha)$. 注意作为映射, ∂f 是范数 -w^* 上半连续的, 所以存在 x_2 的邻域 $U_{x_2}\subset U_x$ 使得

$$\partial f(x)\subset S(A,z,\alpha),\quad\forall\,x\in Ux_2,\tag{4.6}$$

由 (4.5), (4.6) 和 $y_1^*\in S(A,z,\alpha)$ 的事实知道

$$\partial f(x)\subset y_1^*+\frac{1}{n}U(X^*),\qquad\forall\,x\in U_{x_2},\tag{4.7}$$

亦即 $x_2 \in V_n(y_1^*) \subset V_n$, 又 $\|x_2 - x_1\| = r\|z\|$, r 可以任意小, 故 V_n 在 D 中稠密.

令 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, 由于具有 Baire 性质空间的开子集仍具有 Baire 性质, 所以 C 是稠密 G_δ 集. 现在只须证明当 $x \in C$ 时, $f(x)$ 在 x 点 Frechet 可微.

$\forall \varepsilon > 0$, 取自然数 n 使 $n^{-1} < \varepsilon$. 由于 $x \in V_n$, 故由上述证明, $\exists y^* \in X^*$ 及 $\delta > 0$ 使当 $\|y\| < \delta$ 时, $\partial f(x+y) \subset y^* + n^{-1}U(X^*)$. 取 $x^* \in \partial f(x)$, 对于任何 $z^* \in \partial f(x+y)$ 有 $\|x^* - z^*\| < 2/n$, 并且

$$-z^*(y) = z^*(x - (x+y)) \leqslant f(x) - f(x+y),$$

故

$$0 \leqslant f(x+y) - f(x) - x^*(y) \leqslant (z^* - x^*)(y) \leqslant 2n^{-1}\|y\|.$$

这说明 $f(x)$ 在 x 点有 Frechet 导数 x^*, f 的任意性说明 X 是 Asplund 空间.

定理 2 若 X 是 Asplund 空间, 则以下空间皆为 Asplund 空间.

(i) 每个闭子空间 $M \subset X$;

(ii) 当 M 为闭子空间时, 商空间 X/M;

(iii) 当 $T: X \to Y$ 是到上的同胚时, 空间 Y;

(iv) l_p 乘积空间 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_p$, 若 $1 \leqslant p < \infty$, X_n 都是 Asplund 空间;

(v) 空间 $L_p(\mu, X)$, $1 < p < \infty$.

证明 (i) 由于 X 是 Asplund 空间当且仅当 X^* 具有 RN 性质. 为了证明 (i), 只须注意到 $M^* = X^*/M^\perp$, 其中 $M^\perp$ 是 M 的直交补空间. 既然每个取值于 X^* 的 L_1 有界鞅 a.e. 收敛. 所以取值于 M^* 的同样的鞅收敛.

(ii) $(X/M)^* = M^\perp$, $M^\perp$ 是 X^* 的闭子空间, X^* 具有 RN 性质, 故其子空间 $M^\perp$ 也有 RN 性质.

(iii), (vi) 都容易直接用鞅方法验证.

(v) 当 X^* 具有 RN 性质时, $L_p(\mu, X)^* = L_{p'}(\mu, X^*)$. 由于 X^* 的 RN 性质可提升到 $L_{p'}(\mu, X^*)$, 故 $L_p(\mu, X)$ 是 Asplund 空间.

第 3 章评注:

可凹集的概念是 Rieffel 于 1966 年定义的, 它具有明显的几何意义. 所谓 Banach 空间几何学以及 RN 性质的几何特征等说法, 主要的就是源自这一概念的提出以及此后二者等价性的证明. 这距离 RN 性质研究的起点 (1936, 文献 [65]) 整整 30 年. 自此以后 RN 性质研究的几何通道与分析通道合流为一, 很多人投入其中工作, 从而导致了 Banach 空间几何理论研究的繁盛局面. 本章从四个方面分别叙述这一理论的发展脉络, 尚不包括以后深化和扩展的内容.

3.1 节并没有按照时间的先后安排定理的顺序, 并且略去了历史上许多中间的过渡环节. 例如, 定理 1 应该是后面几个定理的结论, 它现在的证明的简捷形式得益于我们前面对于鞅的基本知识的了解. 定理 2 实际上也是几个人共同的奉献, 它的鞅方法的证明属于文献 [137] . Maynard 先提出了 σ- 可凹的概念, 后来又发现它是可数决定的, 然后到子集可凹性, 这最终实现了 RN 性质与 MC 性质等价性证明的循环. 关于 Maynard 的证明见参考文献 [33], Huff 的原来证明见文献 [121]、[122].

3.2 节中 Rieffel、Phelps、Bishop、Kunen、Rosenthal、Edgar 等把紧凸集上的端点表现理论发展成为非紧凸集上的暴露点表现理论, 它要求凸集具有 RN 性质. 本节引文见文献 [33]、[173]、[122]. Edgar 定理的证明用到鞅方法, 超限归纳法和 Kuratowski 与 Ryll-Nardzewski 选择定理, 见文献 [89].

3.3 节中 w^* 紧性的应用对于本节定理的证明是一个关键. 定理 2 是 Bourgin 于 1978 年证明的, 文中证明取自文献 [33]. Stegall 对于这一部分内容建树颇多. 共轭空间中 KM 性质等价于 RN 性质的证明见文献 [27]. 引理 3、引理 5、定理 3 都可以在文献 [33]、[78] 中找到, 也可以直接读 Stegall 等的文章 [19,26,138,197].

3.4 节中凸函数的可微性既是一个经典的也是一个现代的问题, 它涉及许多空间几何的、分析的问题, 这里只是简单地叙述与 RN 性质之间的联系. Namioka 与 Pheps [170] 于 1975 年首先引出了抽象空间上凸函数的可微性问题, Asplund [9] 第一个在 X 的 Asplund 性质与 X^* 的可凹性之间架起了桥梁, 最后的等价性是由 Stegall 与 Namioka 完成的.

第 4 章　Banach 空间的型

Banach 空间的型和余型不仅与 Banach 空间现代理论中的许多问题有联系, 而且与向量值独立随机序列的极限理论有密切联系. 本章先介绍经典的 Khintchin 不等式与 Kahane 不等式, 而后引进 Banach 空间的 Rademacher 型和余型. 在讨论了取值于 p 型空间的独立增量鞅的不等式、大数定律、中心极限定理之后, 还将讨论 Gauss 型以及刻画 Hilbert 空间特征的 Kwapien 定理. 最后将叙述在泛函分析中饶有兴趣的绝对可和算子、K 凸性、一致包含 l_n^p 空间等问题与这两个概念的联系.

4.1　Rademacher 型和余型

实函数序列

$$r_n(t) = \text{sign}\ \sin 2^n \pi t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad n \geqslant 1$$

称为 Rademacher(R) 序列. 这一序列有一些独特的性质：它是定义在 [0, 1] 上的规范正交函数序列; 是取 ±1 值的独立同分布随机变量, $P(r_n(t) = \pm 1) = 1/2$; 此外它的部分和序列构成一个鞅; 仔细观察 $r_n(t)$ 的定义还可以知道, 对于任何 $0 < p < \infty$ 和 $x_1, \cdots, x_n \in X$,

$$\underset{\varepsilon_i=\pm 1}{\text{Ave}} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_p \triangleq \left(\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^p \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^p \mathrm{d}t \right)^{1/p}.$$

情况还远不止这些. 事实证明它在关于 (标量或向量值) 独立随机序列的研究中有着独特的作用. 有时为方便起见, 记 $r_0(t) \equiv 1$.

定理 1 (Khintchin)　设 $1 \leqslant p < \infty$, 则存在 $A_p, B_p > 0$ 使得对于任何 $n \geqslant 1$ 和实数或复数 $a_1, \cdots, a_n$,

$$A_p \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n r_i(t) a_i \right|^p \mathrm{d}t \right)^{1/p} \leqslant B_p \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

证明　让我们先给出一些特殊情况.

1° 若 $p = 2$, 根据 $\{r_n(t), n \geqslant 1\}$ 的正交性得到

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n r_i(t) a_i \right|^2 \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n a_i^2, \tag{1.2}$$

此时 $A_2 = B_2 = 1$. 对于 (1.1) 左边的不等式, 若 $p \geqslant 2$, 则由 (1.2),

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)a_i\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)a_i\right|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p},$$

此时可取 $A_p = 1$. 同样地, 对于右边不等式, 当 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 时,

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)a_i\right|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)a_i\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2},$$

故可取 $B_p = 1$. 注意对于复数 $\{a_n : n \geqslant 1\}$ 情况是类似的.

对于下面的证明关键是注意到：为了 (1.1) 左边的不等式, 只须证明当 $p = 1$ 时, A_1 存在有限；为了右边的不等式, 只须证明对于每个偶数 p, B_p 存在, 然后应用 L_p 范数随 p 递增得到一般情况.

2° 实际上, A_1 的存在性也可从 B_4 的存在中推出来. 具体地说, A_1 可取为 B_4^{-2}. 为此记 f 为第 n 项部分和, 利用 Hölder 不等式和 (1.2),

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 &= \int_0^1 |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 |f(t)|^{2/3} (|f(t)|^4)^{1/3} \mathrm{d}t \\ &\leqslant \left(\int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t\right)^{2/3} \left(\int_0^1 |f(t)|^4 \mathrm{d}t\right)^{1/3} \\ &\leqslant \left(\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t\right)^{2/3} \left[B_4 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\right]^{4/3},\end{aligned}$$

即 $B_4^{-2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$, 故可取 $A_1 = B_4^{-2}$.

3° 为了证明在 $p = 2k$ 时 B_p 的存在性, 注意在 $\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)a_i\right|^{2k} \mathrm{d}t$ 的展开式中出现形如 $\int_0^1 r_{n_1}^{k_1} r_{n_2}^{k_2} \cdots r_{n_s}^{k_s} \mathrm{d}t$ 的项, 除了 $k_i (1 \leqslant i \leqslant s)$ 均为偶数时该项为 1 之外, 其余皆为 0. 于是只须计算 k_i 皆为偶数的项. 以 $c(2k_1, \cdots, 2k_s)$ 记其中的一项, 则

$$c(2k_1, \cdots, 2k_s) = \frac{(2k_1 + \cdots + 2k_s)!}{(2k_1)! \cdots (2k_s)!},$$

从而

$$\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)a_i\right|^{2k} \mathrm{d}t = \sum c(2k_1, \cdots, 2k_s) a_{n_1}^{2k_1} \cdots a_{n_s}^{2k_s},$$

其中求和是对于满足 $\sum_{i=1}^{s} k_i = k$ 的所有 $k_i (1 \leqslant i \leqslant s)$ 和任意 $n_1, \cdots, n_s$ 而取的 $(1 \leqslant n_i \leqslant n)$. 另一方面,

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\right]^{2k} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{k} = \sum c(k_1, \cdots, k_s) a_{n_1}^{2k_1} \cdots a_{n_s}^{2k_s},$$

其中求和对于像上面一样的 k_i 和 n_i 进行. 上述两种和数中, 只是系数改变了. 由于

$$\frac{c(2k_1, \cdots, 2k_s)}{c(k_1, \cdots, k_s)} \leqslant k^k, \tag{1.3}$$

所以

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i\right|^{2k} \mathrm{d}t\right)^{1/2k} \leqslant k^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2},$$

取 $B_{2k} = \sqrt{k}$ 就能使 (1.1) 右端成立. 由上面讨论知道对于任何 $1 \leqslant p < \infty$, (1.1) 成立. 证毕.

定义 1 设 X 是 Banach 空间, $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$.

(1) 若存在常数 $B > 0$ 使得 $\forall n \geqslant 1, x_1, \cdots, x_n \in X$,

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i\right\|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant B \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{1/p}, \tag{1.4}$$

则称 X 是 Rademacher-p(R-p) 型空间, 满足此式的最小常数 B 记为 $T_p(X)$, 称之为 X 的 R-p 型常数.

(2) 若存在常数 $A > 0$ 使得 $\forall n \geqslant 1$ 和 $x_1, \cdots, x_n \in X$,

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i\right\|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \geqslant A^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q\right)^{1/q}, \quad 2 \leqslant q < \infty,$$

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i\right\|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \geqslant A^{-1} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|, \quad q = \infty, \tag{1.5}$$

则称 X 是 Rademacher-q(R-q) 余型空间, 满足此式的最小常数 A 记为 $C_q(X)$, 称之为 X 的 R-q 余型常数.

R-p 型和 R-q 余型空间又简称为 p 型和 q 余型空间.

(1.4) 和 (1.5) 的左端采用 L_2 范数并不是必要的. 对此有

引理 1 (Bechner) 设 $1 < p \leqslant q < \infty, \gamma = \sqrt{(p-1)/(q-1)}$, 则 $\forall u \geqslant 0$,

$$\left(\frac{|1+\gamma u|^q + |1-\gamma u|^q}{2}\right)^{1/q} \leqslant \left(\frac{|1+u|^p + |1-u|^p}{2}\right)^{1/p}. \tag{1.6}$$

证明 由二项式展开定理,

$$\frac{1}{2}[(1+\gamma u)^q + (1-\gamma u)^q] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{q}{2k}\gamma^{2k}u^{2k},$$

其中右端括号中是二项式展开式系数. 特别地, 根据 γ 的定义, $1 < p \leqslant q \leqslant 2$ 时计算得出

$$0 < \frac{p}{q}\binom{q}{2k}\gamma^{2k} \leqslant \binom{p}{2k}.$$

于是由不等式 $(1+t)^s \leqslant 1 + st \ (t > 0, 0 < s \leqslant 1)$ 给出

$$\begin{aligned}\left(\frac{|1+\gamma u|^q + |1-\gamma u|^q}{2}\right)^{p/q} &= \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{q}{2k}\gamma^{2k}u^{2k}\right)^{p/q} \\ &\leqslant 1 + \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{q}{2k}\gamma^{2k}u^{2k} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{p}{2k}u^{2k} \\ &= \frac{1}{2}[|1+u|^p + |1-u|^p],\end{aligned}$$

即 (1.6) 对于 $0 < u \leqslant 1$ 成立. 当 $u > 1$ 时, 取 $u' = u^{-1}$, 上述证明表明 (1.6) 对于 u' 成立. 由于 $|1 \pm \gamma u| \leqslant |u \pm \gamma|$, 所以

$$\begin{aligned}\left(\frac{|1+\gamma u|^q + |1-\gamma u|^q}{2}\right)^{1/q} &\leqslant \left(\frac{|u+\gamma|^q + |u-\gamma|^q}{2}\right)^{1/q} \\ &= u\left(\frac{|1+\gamma u'|^q + |1-\gamma u'|^q}{2}\right)^{1/q} \\ &\leqslant u\left(\frac{|1+u'|^p + |1-u'|^p}{2}\right)^{1/p} = \left(\frac{|1+u|^p + |1-u|^p}{2}\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

以上表明, 当 $1 < p \leqslant q \leqslant 2$ 时, (1.6) 对于任何 $u > 0$ 成立.

为了证明当 $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ 时 (1.6) 成立, 注意由两端的齐性, (1.6) 成立当且仅当其中的常数 1 换为任一实数成立. 于是又等价于算子: $T : L_p[0,1] \to L_q[0,1]$,

$$Tf(s) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \gamma\int_0^1 f(t)r_1(t)\mathrm{d}t + r_1(s)$$

的有界性. 由于 $\gamma' = \sqrt{(q'-1)/(p'-1)} = \sqrt{(p-1)/(q-1)} = \gamma^{-1}$, 其中 p', q' 分别是 p, q 的共轭数, 代替考虑 T 而考虑 $T^*: L_{q'}[0,1] \to L_{p'}[0,1]$, 上面证明表明 T^* 有界, 从而 T 有界.

引理 2 设 p, q, γ 如上, X 是任一 Banach 空间, $x_1, x_2 \in X$, 则

$$\left(\frac{\|x_1+\gamma x_2\|^q + \|x_1-\gamma x_2\|^q}{2}\right)^{1/q} \leqslant \left(\frac{\|x_1+x_2\|^p + \|x_1-x_2\|^p}{2}\right)^{1/p}. \tag{1.7}$$

证明 设 $y_1 = x_1+x_2$, $y_2 = x_1-x_2$; $u_1 = (\|y_1\|+\|y_2\|)/2$, $u_2 = (\|y_1\|-\|y_2\|)/2$, 则 $x_1 = (y_1+y_2)/2, x_2 = (y_1-y_2)/2$. 应用 (1.6) 于 u_1, u_2, 则

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\|x_1+\gamma x_2\|^q + \|x_1-\gamma x_2\|^q}{2}\right)^{1/q} \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{1+\gamma}{2}y_1 + \frac{1-\gamma}{2}y_2\right\|^q + \left\|\frac{1-\gamma}{2}y_1 + \frac{1+\gamma}{2}y_2\right\|^q\right)\right]^{1/q} \\
&\leqslant \left(\frac{|u_1+\gamma u_2|^q + |u_1-\gamma u_2|^q}{2}\right)^{1/q} \leqslant \left(\frac{|u_1+u_2|^p + |u_1-u_2|^p}{2}\right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{\|x_1+x_2\|^p + \|x_1-x_2\|^p}{2}\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

定理 2 (Kahane) 设 $1 < s < \infty$, 则存在 $K_s > 0$ 使得对于任何 Banach 空间 X 和 $n \in N, x_1, \cdots, x_n \in X$,

$$\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\| \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^s \mathrm{d}t\right)^{1/s} \leqslant K_s \int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\| \mathrm{d}t. \tag{1.8}$$

证明 左端是显然的, 为了证明右端我们应用归纳法

$$\left(\int_0^1 \left\|x_0 + \gamma\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q} \leqslant \left(\int_0^1 \left\|x_0 + \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}, \tag{1.9}$$

其中 p, q, γ 如上, $x_0, x_1, \cdots, x_n \in X$. 实际上, 若 (1.9) 成立, 取 $x_0 = 0$, 先应用 Hölder 不等式得出

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^s \mathrm{d}t\right)^{1/s} \\
&= \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^{s/(2s-1)} \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^{2s(s-1)/(2s-1)} \mathrm{d}t\right)^{1/s} \\
&\leqslant \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\| \mathrm{d}t\right)^{1/(2s-1)} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^{2s} \mathrm{d}t\right)^{(s-1)/(2s^2-s)}
\end{aligned}$$

取 $p=s,q=2s$, 对右端第二个因子应用 (1.9), 则有

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^s \mathrm{d}t\right)^{1/s}$$
$$\leqslant\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{(2s-2)/(2s-1)}\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|\mathrm{d}t\right)^{1/(2s-1)}\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^s \mathrm{d}t\right)^{(2s-2)/(2s^2-s)},$$

从而得到 (1.8) 的右端并且 $K_s=\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)^{2s-2}\leqslant\left(\dfrac{2s-1}{s-1}\right)^{s-1}$.

现在证明 (1.9). 当 $n=1$ 时, (1.9) 即是 (1.7). 假设 (1.9) 对于 n 成立, 由 $q/p>1$ 的事实和归纳假设,

$$\left(\int_0^1\left\|x_0+\gamma\sum_{i=1}^{n+1} r_i(t)x_i\right\|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}$$
$$=\left[\frac{1}{2}\int_0^1\left(\left\|x_0+\gamma x_{n+1}+\gamma\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^q+\left\|x_0-\gamma x_{n+1}+\gamma\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^q\right)\mathrm{d}t\right]^{1/q}$$
$$\leqslant\frac{1}{2^{1/q}}\left[\left(\int_0^1\left\|x_0+\gamma x_{n+1}+\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^p \mathrm{d}t\right)^{q/p}\right.$$
$$\left.+\int_0^1\left(\left\|x_0-\gamma x_{n+1}+\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^p \mathrm{d}t\right)^{q/p}\right]^{1/q}$$
$$=\left[\frac{1}{2}\left(\left\|x_0+\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i+\gamma x_{n+1}\right\|_p^q+\left\|x_0+\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i-\gamma x_{n+1}\right\|_p^q\right)\right]^{1/q}.$$

将 $x_0+\sum\limits_{i=1}^n r_i(t)x_i$ 与 x_{n+1} 分别视为 $L_p[0,1]$ 中的元, 以 $L_p[0,1]$ 作为引理 2 中的空间 X, 则

$$\text{上式}\leqslant\left[\frac{1}{2}\left(\left\|x_0+\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i+x_{n+1}\right\|_p^p+\left\|x_0+\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i-x_{n+1}\right\|_p^p\right)\right]^{1/p}$$
$$=\left(\int_0^1\left\|x_0+\sum_{i=1}^{n+1} r_i(t)x_i\right\|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

于是 (1.9) 成立. 定理证毕.

定理 3　(i) 任何 Banach 空间是 1 型和 ∞ 余型的;

(ii) 若 $1<p_1\leqslant p_2\leqslant 2$, 则 p_2 型空间是 p_1 型的;

(iii) 若 $2 \leqslant q_1 \leqslant q_2 < \infty$, 则 q_1 余型空间是 q_2 余型的;

(iv) Hilbert 空间是 2 型和 2 余型的;

(v) 型和余型都是同构不变的;

(vi) 型和余型被子空间继承, 型还被商空间继承;

(vii) 任何 Banach 空间不具有大于 2 的型和小于 2 的余型.

证明 1° 由于

$$\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\| \mathrm{d}t \leqslant \sum_{i=1}^n \|x_i\|,$$

根据 Kahane 不等式得出第一点. 对于每个 $x_j (1 \leqslant j \leqslant n)$, 由

$$\|x_j\| = \left\|\int_0^1 r_j(t) \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\| \mathrm{d}t,$$

得到第二点.

2° (ii) 和 (iii) 是由于简单的不等式

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^s\right)^{1/s} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^t\right)^{1/t}, \quad 0 < t \leqslant s < \infty.$$

3° 若 X 是 Hilbert 空间, $x_1, \cdots, x_n \in X$, 直接计算得到

$$\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^2 \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

4° (v) 直接由定义得到.

5° 若 X 是 p 型 (q 余型) 的, 由定义可知 X 的每个子空间也是 p 型 (q 余型) 的并且 p 型 (q 余型) 常数不会增加.

假定 X 是 p 型的, M 是 X 的闭子空间, $\bar{x}, \cdots, \bar{x}_n \in X/M$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $x_i' \in \bar{x}_i$ 使得 $\|x_i'\| \leqslant \|\bar{x}_i\| + \varepsilon n^{-1/p} (1 \leqslant i \leqslant n)$, 则

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)\bar{x}_i\right\|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} &\leqslant \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i'\right\|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \\ &\leqslant T_p(X)\left(\sum_{i=1}^n \|x_i'\|^p\right)^{1/p} \\ &\leqslant 2T_p(X)\left(\sum_{i=1}^n \|\bar{x}_i\|^p\right)^{1/p} + \varepsilon T_p(X).\end{aligned}$$

ε 是任意的, 从而 X/M 是 p 型的.

6° 任何非零 Banach 空间都有与实数域 $\mathbf{R}$ 同构的子空间. 为了 (vii) 只须说明 $\mathbf{R}$ 没有大于 2 的型和小于 2 的余型. 若反设 $\mathbf{R}$ 是 p 型的, $p > 2$, 或 q 余型的, $1 \leqslant q < 2$, 则对于任何 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$,

$$C_q(X)^{-1}\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)a_i\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{1/2} \leqslant T_p(X)\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p}.$$

特别地取 $a_1 = \cdots = a_n = 1/n$ 分别得到

$$n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \leqslant T_p(X), \quad n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \leqslant C_q(X).$$

二者都不能对于充分大的 n 成立, 矛盾. 定理证毕.

定理中的 (vii) 说明了我们对于空间的型限制 $1 \leqslant p \leqslant 2$, 对于空间的余型限制 $2 \leqslant q \leqslant \infty$ 的原因. 注意定理中的 (vi), 商空间对于余型一般不具有继承性, 后面例 4 说明了这一点. 此外 (iv) 的逆命题成立, 这即是 Kwapien 定理, 我们将在本章 4.5 节与 4.6 节证明它.

定理 4　设 $1 \leqslant p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, 则

(i) $L_p(\mu)$ 是 $2 \wedge p$ 型的和 $2 \vee p$ 余型的;

(ii) 无穷维的 $L_p(\mu)$ 没有比 $2 \wedge p$ 大的型和比 $2 \vee p$ 小的余型;

(iii) X 是 p 型的, 则 X^* 是 q 余型的. 其中 X^* 是 X 的共轭.

证明　1° 设 $1 \leqslant p \leqslant 2$, $x_1(\omega), \cdots, x_n(\omega) \in L_p(\mu)$, 则对于几乎所有 ω,

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^p\right)^{1/p},$$

两端关于 μ 积分并应用 Fubini 定理得到

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|_p^p \mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^p \mathrm{d}\mu\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \int_\Omega \sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^p.$$

由 Kahane 不等式知道 $L_p(\mu)$ 是 p 型的.

若 $2 \leqslant p < \infty$, 对于几乎所有 ω, 由 Kahane 不等式的推论

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \leqslant K_p \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} = K_p \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2\right)^{1/2},$$

两端积分得到

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|_p^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} &\leqslant K_p \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2\right)^{p/2} \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \\ &= K_p \left[\left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2\right)^{p/2} \mathrm{d}\mu\right)^{2/p}\right]^{1/2} \\ &\leqslant K_p \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |x_i(\omega)|^p \mathrm{d}\mu\right)^{2/p}\right)^{1/2} \\ &= K_p \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

这说明 $L_p(\mu)$ 是 2 型的.

现在验证余型. 设 $1 \leqslant p \leqslant 2, x_1(\omega), \cdots, x_n(\omega) \in L_p(\mu)$. 由 Kahane 不等式

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|_p^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} &= \left(\int_0^1 \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^p \mathrm{d}\mu\mathrm{d}t\right)^{1/p} \\ &\geqslant K_p^{-1} \left(\left(\int_\Omega \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{p/2} \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}. \\ &= K_p^{-1} \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2\right)^{p/2} \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \\ &= K_p^{-1} \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n g_i(\omega)^{2/p}\right)^{p/2} \mathrm{d}\mu\right)^{1/p},\end{aligned}$$

这里 $g_i(\omega) = |x_i(\omega)|^p$, 定义 $\|(a_1, \cdots, a_n)\| = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^{2/p}\right)^{p/2}$ 并且记

$$g(\omega) = (g_1(\omega), \cdots, g_n(\omega)),$$

利用 $\left\|\int_\Omega g(\omega)\mathrm{d}\mu\right\| \leqslant \int_\Omega \|g(\omega)\|\,\mathrm{d}\mu$, 上式变为

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|_p^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} &\geqslant K_p^{-1}\left(\int_\Omega \|g(\omega)\|\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \geqslant K_p^{-1}\left\|\int_\Omega g(\omega)\mathrm{d}\mu\right\|^{1/p}\\ &= K_p^{-1}\left(\sum_{i=1}^n\left(\int_\Omega g_i(\omega)\mathrm{d}\mu\right)^{2/p}\right)^{1/2}\\ &= K_p^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

所以 $L_p(\omega)$ 是 2 余型的.

对于 $2 \leqslant p < \infty, x_1(\omega), \cdots, x_n(\omega) \in L_p(\mu)$, 先由 Khintchin 不等式, 对于几乎所有 ω,

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \geqslant \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2\right)^{1/2},$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right\|_p^p \mathrm{d}t &\geqslant \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2\right)^{p/2} \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\\ &\geqslant \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^p\right)^{1/p},\end{aligned}$$

这说明 $L_p(\mu)$ 是 p 余型的.

2° 为了说明 $L_p(\mu)$ 没有比 $2\wedge p$ 更大的型, 只须考虑 $1 \leqslant p < 2$ 的情况. 由于 $L_p(\mu)$ 中有与 l_p 同构的子空间, 我们说明当 $\bar{p} > p$ 时, l_p 不是 $\bar{p}$ 型的. 若不然, 取 $x_i = e_i \in l_p$(第 i 个分量为 1, 其余为 0), 则由 $\bar{p}$ 型定义

$$n^{1/p} = \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i e_i\right\|_p^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant T_{\bar{p}}(X)\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_p^{\bar{p}}\right)^{1/\bar{p}} = T_{\bar{p}}(X)n^{1/\bar{p}}$$

或者 $n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\bar{p}}} \leqslant T_{\bar{p}}(X)$. 至少对于充分大的 n 是不可能的.

对于余型可以类似论证.

3° $\forall\varepsilon > 0$ 和 $x_1^*, \cdots, x_n^* \in X^*$, 取 $x_1, \cdots, x_n \in X$ 使

$$\|x_i\| = 1, \quad \|x_i^*\| \leqslant (1+\varepsilon)\left|x_i^* x_i\right|, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

此时

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i^*\|^q\right)^{1/q} &\leqslant (1+\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^*x_i|^q\right)^{1/q}\\
&=(1+\varepsilon)\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^*x_i,\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\leqslant 1\right\}\\
&=(1+\varepsilon)\sup\left\{\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^{n}r_i(t)a_ix_i\right)\mathrm{d}t,\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\leqslant 1\right\}\\
&\leqslant(1+\varepsilon)\sup\left\{\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i^*\right\|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)a_ix_i\right\|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p},\right.\\
&\qquad\left.\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\leqslant 1\right\}\\
&\leqslant(1+\varepsilon)T_pK_q\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i^*\right\|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2},
\end{aligned}
$$

X^* 是 q 余型的.

例 1 由定理 4(i), (ii) 知道, $L_1[0,1]$ 是 2 余型的. 注意此空间不是自反的并且不具有 RN 性质. 此外还存在 2 型的非自反空间的例子. 它是 James 提供的 (见文献 [13]).

例 2 对于无穷维的 $L_\infty(\mu)$ 空间, 不会有比 1 大的型和比 ∞ 小的余型. 这可直接用定义验证. 从而 $l_\infty, c, C[0,1]$ 都没有大于 1 的型和小于 ∞ 的余型.

例 3 定理 4(iii) 的若干形式的逆不成立. 例如, $l_1=c_0^*$ 是 2 余型的, 但 c_0 没有大于 1 的型. 此外将 X 换为余型, X^* 换为型也不成立. $L_1(\mu)$ 是 2 余型的, 但 $L_1(\mu)^*=L_\infty(\mu)$ 仅仅是 1 型的.

例 4 c_0 是 l_1 的商空间, l_1 是 2 余型的, 但 c_0 是 ∞ 余型的, 所以余型不被商空间继承.

在结束本节之前, 我们给出 Khintchin 不等式 (1.1) 中常数 A_p 和 B_p 的估计. 容易知道, 当 p 增加时 A_p, B_p 是不减的. 下面定理给出它们变化的限度.

引理 3 设 (f_n, B_n) 是定义在概率空间 (Ω,Σ,P) 上的实值鞅, $\{d_n\}$ 是相应的鞅差序列, 即 $d_n=f_n-f_{n-1}(n\geqslant 1)$. 特别地, $f_0=Ef_1, B_0=\{\phi,\Omega\}$. 若 $d_n\in L_\infty$ 并且 $\Delta^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|d_n\|_\infty^2<\infty$, 则 $\forall\ \lambda\geqslant 0$,

$$P(|f_n-Ef_1|\geqslant\lambda)\leqslant 2\exp(-\lambda^2/4\Delta^2). \tag{1.10}$$

证明　$\forall\lambda\in R$, 我们有 $e^{\lambda}\leqslant\lambda+e^{\lambda^2}$. 于是当 $t\in R$ 时, 由鞅性质

$$E(\exp(td_i)\,|B_{i-1})\leqslant E(td_i\,|B_{i-1})+E(\exp(t^2d_i^2)\,|B_{i-1})\leqslant\exp(t^2\|d_i\|_\infty^2),$$

从而

$$E\exp\left(t\sum_{j=1}^{i}d_j\right)=E\left[E\left(\exp\left(t\sum_{j=1}^{i}d_j\right)|B_{i-1}\right)\right]\leqslant E\exp\left(t\sum_{j=1}^{i-1}d_j\right)\exp\left(t^2\|d_i\|_\infty^2\right).$$

另一方面, 当 $t>0$ 时有

$$P(f_n-Ef_1\geqslant\lambda)=P\left(\sum_{j=1}^{n}d_j\geqslant\lambda\right)=P\left(\exp\left(t\sum_{j=1}^{n}d_j-t\lambda\right)\geqslant1\right)\leqslant E\exp\left(t\sum_{j=1}^{n}d_j-t\lambda\right)\leqslant\exp\left(t^2\sum_{j=1}^{n}\|d_j\|_\infty^2-t\lambda\right).$$

特别地, 取 $t=\lambda/2\varDelta^2$, 则

$$P(f_n-Ef_1\geqslant\lambda)\leqslant\exp(-\lambda^2/4\varDelta^2).$$

类似地

$$P(Ef_1-f_n\geqslant\lambda)\leqslant\exp(-\lambda^2/4\varDelta^2).$$

以上两式合起来即 (1.10).

定理 5　Khintchin 不等式(1.1) 中的系数 A_p,B_p 满足

$$0<K\leqslant A_p\leqslant M<\infty,\quad B_p\leqslant\sqrt{p}M<\infty,\tag{1.11}$$

这里 $1\leqslant p<\infty,K,M$ 是常数.

证明　不妨设 $a_n\in R$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=1$. 此时 $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ir_i(t)\colon n\geqslant1\right\}$ 是定义在 $[0,1]$ 上的鞅并且满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|d_n\|_\infty^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=1$. 由引理 3, $\forall\lambda\geqslant0$,

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}a_ir_i(t)\right|\geqslant\lambda\right)\leqslant2\exp(-\lambda^2/4),\tag{1.12}$$

因此

$$\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)\right|^p \mathrm{d}t = p\int_0^1 \lambda^{p-1} P\left(\left|\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)\right| > \lambda\right)\mathrm{d}\lambda$$
$$\leqslant 2p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\exp(-\lambda^2/4)\mathrm{d}\lambda \triangleq B_p^p < \infty.$$

实际上容易计算出 $B_p^p = 2^p p\Gamma(p/2)$, 由 Γ 函数的性质得出 $B_p/\sqrt{p} \leqslant c$. 此不等式对于 $p \geqslant 2$ 均成立. 另一方面, 若 $2 \leqslant p < \infty$, 则

$$1 = \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)\right|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \leqslant B_p.$$

对于一般的 $a_i \in R$, 由于 (1.1) 式各部分表达式的齐性得到

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)\right|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \leqslant B_p\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2},$$

即对于 $2 \leqslant p < \infty, A_p = 1$.

对于 $p = 1$, 在定理 1 的证明中我们已得出 $A_1 = B_4^{-2}$, 从而

$$B_4^{-2} \leqslant \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)\right|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \left(\int_0^1 \left|\left(\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)\right|^2 \mathrm{d}t\right)\right)^{1/2} = 1,$$

即当 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 时, $A_p = B_4^{-2}, B_p = 1$. 证毕.

4.2 独立增量鞅

由 R 序列的部分和构成的鞅是独立增量鞅的特殊情况. 本节将讨论一般独立增量鞅的性质, 并用以给出空间 p 型和 q 余型的刻画.

设 f, g 是同一概率空间上两个 X 值的可测函数, 称 f, g 同分布, 若对于 X 中的任何 Borel 集 (或等价地, 任何开集)B,

$$P(f \in B) = P(g \in B).$$

有时称一个是另一个的 copy, 记为 $f \sim g$. 容易知道, 若 $f \sim g$, 则关于任一使积分有意义的函数 $\Phi, E\Phi(f) = E\Phi(g)$. 若 $-f \sim f$, 则称 f 是对称的. 称 R.V. 序列 (d_n)

是对称的, 若关于乘积空间 $\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n$ 和相应的乘积 σ 代数, $(d_n) \sim (\varepsilon_n d_n)$, 其中 ε_n 是取 ± 1 值的任一序列. 显然, 若每个 d_n 是对称的并且 (d_n) 是独立序列 (任意两组互不相同的元素独立), 则 (d_n) 本身是对称序列.

我们补充定义可测函数的空间

$$L_0(\mu, X) = \{f : \|f\|_0 = E[(1 + \|f(\omega)\|)^{-1}\|f(\omega)\|]\},$$

$$L_p(\mu, X) = \{f \in L_0(\mu, X) : \|f\|_p = E\|f(\omega)\|^p < \infty\},$$

其中 $0 < p < 1$. 注意 $\|f\|_p$ 都是平移不变的完备度量, 即 $L_p(\mu, X)$ $(0 \leqslant p < 1)$ 是 F 空间.

特别地, 对于 $L_0(\mu, X)$ 中的元素序列 f_n, f_n 依 $L_0(\mu, x)$ 的度量收敛于 f, 则 $\forall \varepsilon > 0, P(\|f_n - f\| > \varepsilon) \to 0$. 换句话说, $\|f_n - f\|_0 \to 0$ 当且仅当 f_n 依概率收敛于 f. 称 $L_0(\mu, X)$ 的子集 K 是随机有界的, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得关于 K 中的 f 一致地有 $\|\delta f\|_0 < \varepsilon$. 这等价于 $\exists M > 0$, 使得在 K 上一致地 $P(\|f\| > M) < \varepsilon$.

本章与其他各章不同的一点是, 我们称 $L_0(\mu, X)$ 中的每个可测函数是一个随机变量并且总是假定 X 是可分 Banach 空间. 对于随机序列 f_n, 仍记 f_n^*, f^* 如前.

定理 1　设 $\{d_n\}$ 是对称 R.V. 序列, $f_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$, 则 $\forall t \geqslant 0$,

$$P(f_n^* > t) \leqslant 2P(\|f_n\| > t). \tag{2.1}$$

若 f_n 依概率收敛于 f, 则

$$P(f^* > t) \leqslant 2P(\|f\| > t). \tag{2.2}$$

证明　设 $\tau = \inf\{i, \|f_i\| > t\} (\inf \varnothing = n + 1)$, 记

$$f_n = f_i + (d_{i+1} + \cdots + d_n), \quad f_n' = f_i - (d_{i+1} + \cdots + d_n),$$

则在集合 $\{\tau = i\}$ 上, $\|f_n\| + \|f_n'\| \geqslant \|f_n + f_n'\| = 2\|f_i\| > 2t$. 于是当 $i \leqslant n$ 时, $\{\tau = i\} \subset \{\|f_n\| + \|f_n'\| > 2t\}$. $\{d_n\}$ 是对称的, f_n 与 f_n' 有相同分布, 从而

$$\begin{aligned} P(f_n^* > t) &= P(\tau \leqslant n) \leqslant P(\|f_n\| + \|f_n'\| > 2t) \\ &\leqslant P(\max\{\|f_n\| : \|f_n'\|\} > t) \leqslant 2P(\|f_n\| > t). \end{aligned}$$

当 f_n 依概率收敛于 f 时, 令 $n \to \infty$, 对 (2.1) 两端取极限, 由于

$$\lim_{n \to \infty} P(\|f_n\| > t) = P(\|f\| > t), \tag{2.3}$$

得到 (2.2).

定理 2 (Levy) 设 $\{d_n\}$ 是对称 R.V. 序列, $f_n=\sum_{i=1}^{n}d_i$, 则 f_n 依概率收敛当且仅当 f_n a.e. 收敛, f_n 随机有界当且仅当 f_n a.e. 有界. 当 $(f_n,n\geqslant 1)$ 有一个子序列依概率收敛或随机有界时, 结论仍成立.

证明 若 $A\in\Sigma$, $P(A)>0$, $\forall\omega\in A$, $f_n(\omega)$ 不收敛, 则存在 $\delta>0$,

$$P(\sup_{m\geqslant n}\|f_m-f_n\|>\delta)\geqslant P(A)>0,\quad \forall\, n.$$

由 (2.2),

$$P(A)\leqslant P(\sup_{m\geqslant n}\|f_m-f_n\|>\delta)\leqslant 2P(\|f_\infty-f_n\|>\delta),$$

其中 f_∞ 是 f_n 依概率收敛的极限. 右端当 n 充分大时可任意小, 导致矛盾.

若 f_n 随机有界, 由定义和 (2.1) 知

$$P(f_n^*>M)<2P(\|f_n\|>M)<2\varepsilon,$$

n 任意, 故 $P(f^*>M)<2\varepsilon$. 取 $\varepsilon_k\downarrow 0$, 则有 $M_k\uparrow\infty$ 使得 $P(f^*>M_k)<\varepsilon_k$, 于是

$$P(f^*=\infty)\leqslant P(f^*>M_k)<\varepsilon_k\downarrow 0,$$

即 $P(f^*<\infty)=1$. 上述过程是可逆的, 故可从 $P(f^*<\infty)=1$ 推出 $(f_n,n\geqslant 1)$ 随机有界. 对于子序列的情况可类似证明.

定理 3 (Kahane) 设 $\{d_n\}$ 是独立 R.V. 序列, $f_n=\sum_{i=1}^{n}d_i$, 则 f_n 依概率收敛当且仅当 f_n a.e. 收敛, f_n 随机有界当且仅当 f_n a.e. 有界.

证明 取 d_n 的独立 copy d_n', 令

$$D_n(\omega,\omega')=d_n(\omega)-d_n'(\omega')$$

(称 D_n 是 d_n 的对称化). 容易验证 D_n 的确是 $(\Omega\times\Omega,\Sigma\times\Sigma,P\times P)$ 上的对称独立 R.V. 序列. 现在应用定理 2 于 $F_n=\sum_{i=1}^{n}D_i$, 由于 f_n 依概率收敛, F_n 也依概率收敛. 从而 F_n $P\times P$-a.e. 收敛. 特别地, 对于几乎所有 $\omega'\in\Omega$, $\sum_{n=1}^{\infty}(d_n(\omega)-d_n(\omega'))$ P a.e. 收敛. 取 ω_0' 使

$$\sum_{n=1}^{\infty}(d_n(\omega)-d_n(\omega_0'))$$

a.e. 收敛, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n(\omega)$ 依概率收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n(\omega_0')$ 依概率收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n(\omega_0')$ 收敛. 由此 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n(\omega)$ a.e. 收敛.

类似地证明得出关于随机有界的结论.

定理 4 (Hoffmann-Jørgensen) 设 $\{d_n\}$ 是独立 R.V. 序列, $f_n=\sum_{i=1}^{n} d_i, 0<p<\infty$. 若 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 是随机有界的, 则以下条件等价:

(i) $d^* \in L_p$;

(ii) $f^* \in L_p$;

(iii) $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|f_n\|_p < \infty$.

证明 (i) ⇒ (ii). 先假定 $\{d_n\}$ 是对称的, 由定理 2 和 f_n 的随机有界性得到 $f^* < \infty$ a.e.. 现在设 $\tau = \inf\{n : \|f_n\| > a\}$, 则 $\forall a, b > 0, \{\|f_k\| > 2a + b\} \subset \{\tau \leqslant k\}$ 并且当 $\tau = j, \omega \in \{\|f_k\| > 2a + b\}$ 时,

$$\|f_k - f_j\| \geqslant \|f_k\| - \|f_{j-1}\| - \|d_j\| \geqslant a + b - d^*.$$

利用 $\{d_n\}$ 的独立性得到

$$\begin{aligned} P(\|f_k\| > 2a+b) &= \sum_{j=1}^{k} P(\tau = j : \|f_k\| > 2a+b) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{k} P(\tau = j : \|f_k - f_j\| > a + b - d^*) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{k} [P(\tau = j : d^* > b) + P(\tau = j : \|f_k - f_j\| > a)] \\ &\leqslant P(d^* > b) + \sum_{j=1}^{k} P(\tau = j) P(\|f_k - f_j\| > a). \end{aligned} \tag{2.4}$$

应用 (2.1) 于 f_j 和 $f_k - f_j$ 可知

$$P(\|f_k - f_j\| > a) \leqslant 2P(\|f_k\| > a),$$

从而 (2.4) 变为

$$\begin{aligned} P(\|f_k\| > 2a+b) &\leqslant P(d^* > b) + 2P(\|f_k\| > a) \sum_{j=1}^{k} P(\tau = j) \\ &\leqslant P(d^* > b) + 2P(\|f_k\| > a) P(f_k^* > a) \\ &\leqslant P(d^* > b) + 4[P(\|f_k\| > a)]^2. \end{aligned}$$

由 (2.2) 可知

$$P(f^* > 2a + b) \leqslant 2P(d^* > b) + 8\,[P(f^* > a)]^2.$$

特别地取 $a = b$ 并且取 $a_0 > 0$ 使得 $P(f^* > a_0) \leqslant 1/16 \cdot 3^p$, 当 $K \geqslant 3a_0$ 时,

$$\begin{aligned}
E(f^*)^p = 3^p p \int_0^\infty a^{p-1} P(f^* > 3a)\mathrm{d}a \\
&= \lim_{K\to\infty} 3^p p \int_0^K a^{p-1} P(f^* > 3a)\mathrm{d}a \\
&= \lim_{K\to\infty} 2\cdot 3^p p \int_0^K a^{p-1} P(d^* > a)\mathrm{d}a \\
&\quad + \lim_{K\to\infty} 8\cdot 3^p p \int_{3a_0}^K a^{p-1} [P(f^* > a)]^2 \mathrm{d}a \\
&= 2\cdot 3^p E(d^*)^p + 8\cdot 3^p p \int_0^{3a_0} a^{p-1} P(f^* > a)\mathrm{d}a \\
&\quad + \lim_{K\to\infty} 8\cdot 3^p p \int_{3a_0}^K a^{p-1} [P(f^* > a)]^2 \mathrm{d}a \\
&= 2\cdot 3^p E(d^*)^p + c \\
&\quad + 8\cdot 3^p p \int_{3a_0}^\infty a^{p-1} P(f^* > a_0) P(f^* > a)\mathrm{d}a \\
&= 2\cdot 3^p E(d^*)^p + c + \frac{8\cdot 3^p}{16\cdot 3^p} E(f^*)^p,
\end{aligned}$$

从而

$$E(f^*)^p \leqslant 4\cdot 3^p E(d^*)^p + 2c,$$

由此得到 (ii).

(ii)⇒(iii) 和 (ii)⇒(i) 是显然的, 剩下只须证明 (iii)⇒(ii). 实际上 (2.1) 意味着

$$P(f^* > a) \leqslant 2 \liminf_{n\to\infty} P(\|f_n\| > a). \tag{2.5}$$

由 Fatou 引理

$$\begin{aligned}
E(f^*)^p = \int_0^\infty P(f^* > a)\mathrm{d}a^p \leqslant 2 \liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty P(\|f_n\| > a)\mathrm{d}a^p \\
= 2 \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p^p \leqslant 2 \sup_{n\geqslant 1} \|f_n\|_p^p < \infty, \quad 1 \leqslant p < \infty.
\end{aligned}$$

或者类似地

$$E(f^*)^p \leqslant 2 \liminf_{n\to\infty} E\|f_n\|^p \leqslant 2 \sup_{n\geqslant 1} \|f_n\|_p < \infty, \quad 0 < p < 1.$$

现在除去 $\{d_n\}$ 对称的假设. 若 D_n 是 d_n 的对称化, 令 $F_n=\sum_{i=1}^{n} D_i$, 类似地定义 D^*, F^*, 则当 $d^* \in L_p$ 时, $D^* \in L_p$. 上述证明说明 $F^* \in L_p(\Omega\times\Omega')$. 故对于几乎所有 $\omega' \in \Omega'$, $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|f_n(\omega)-f_n'(\omega')\| \in L_p(\Omega)$. $\{f_n'(\omega'), n\geqslant 1\}$ 是随机有界的, 可取 ω_0' 使得 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|f_n'(\omega_0')\|<\infty$. 从而

$$\sup_{n\geqslant 1}\|f_n(\omega)\|^p \leqslant 2^p(\sup_{n\geqslant 1}\|f_n(\omega)-f_n'(\omega_0')\|^p+\sup_{n\geqslant 1}\|f_n'(\omega_0')\|^p)<\infty, \quad 1\leqslant p<\infty$$

或者

$$\sup_{n\geqslant 1}\|f_n(\omega)\|^p \leqslant \sup_{n\geqslant 1}\|f_n(\omega)-f_n'(\omega_0')\|^p+\sup_{n\geqslant 1}\|f_n'(\omega_0')\|^p<\infty, \quad 0<p<1,$$

两边积分即得出所要的结论.

推论 1　设 $\{d_n\}$ 是 R.V. 序列, $f_n=\sum_{i=1}^{n} d_i$, $0<p<\infty$. 若 f_n 依概率收敛于 f, 则下面论述等价:

(i) $f\in L_p$;

(ii) $f^*\in L_p$;

(iii) $d^*\in L_p$;

(iv) $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|f_n\|_p<\infty$;

(v) $\|f_n-f\|_p\to 0, n\to\infty$.

此外, $f\in L_\infty$ 当且仅当 $f^*\in L_\infty$.

证明　由定理 3, f_n a.e. 收敛, 从而 f_n a.e. 有界或随机有界. 由定理 4, (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). 由 (2.2), (i) $\Rightarrow$ (ii) 成立. 由 f_n 的 a.e. 收敛性和 $\|f_n-f\|^p\leqslant 2^p(f^*)^p$, Lebesgue 控制收敛定理说明 (ii) $\Rightarrow$ (v) 成立. 剩下证明 (v) $\Rightarrow$ (i). 当 $p\geqslant 1$ 时, 这是已知的. 对于 $0<p<1$, 由

$$\|f\|^p\leqslant\|f_n-f\|^p+\|f_n\|^p,$$

同样得到 (v) $\Rightarrow$ (i). 最后 (2.2) 保证了 $f\in L_\infty$ 时, $f^*\in L_\infty$.

定理 5 (Kahane 压缩原理)　设 $1\leqslant p<\infty$, $\{d_i\}$ 是 p 可积独立序列并且每个 $Ed_i=0$, 则 $\forall a_i\in R, |a_i|\leqslant 1$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i d_i\right\|_p \leqslant 2\left\|\sum_{i=1}^{n} d_i\right\|_p. \tag{2.6}$$

若每个 d_i 是对称的, 上面系数可以是 1.

证明 我们首先证明, 若 $f,g\in L_p(\mu,X)$ 独立, $Ef=0$, 则

$$\|g\|_p\leqslant\|f+g\|_p. \tag{2.7}$$

实际上, 若 $g=\sum_{i=1}^n x_i\chi_{A_i}$ 是简单函数, 则 $E(f\,|\sigma(g))=Ef=0$, 于是

$$\begin{aligned}E\|g\|^p&=\sum_{i=1}^n\|x_i\|^p\mu(A_i)=\sum_{i=1}^n\int_{A_i}\|E(x_i+f|\sigma(g))\|^p\mathrm{d}\mu\\&\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{A_i}E(\|x_i+f\|^p\,|\sigma(g))\mathrm{d}\mu\\&=\sum_{i=1}^n\int_{A_i}\|x_i+f\|^p\mathrm{d}\mu=E\|g+f\|^p.\end{aligned}$$

对于一般的 g, 可由简单函数在 $L_p(\mu,X)$ 中的稠密性得到.

现在, 对于任何 $\sigma\subset\{1,\cdots,n\}$, 连续使用 (2.7) 得出

$$\left\|\sum_{i\in\sigma}d_i\right\|_p\leqslant\left\|\sum_{i=1}^n d_i\right\|_p.$$

若 $a_i=\pm1,i=1,\cdots,n$, 令 $\sigma^+=\{i:a_i=1\},\sigma^-=\{i:a_i=-1\}$, 则由上式,

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_id_i\right\|_p\leqslant\left\|\sum_{i\in\sigma^+}d_i\right\|_p+\left\|\sum_{i\in\sigma^-}d_i\right\|_p\leqslant2\left\|\sum_{i=1}^n d_i\right\|_p.$$

记 $K_n=\{(a_1,\cdots,a_n)\in R^n,|a_i|\leqslant1,i=1,\cdots,n\}$, 则 K_n 是 R^n 中的紧凸集, 它有 2^n 个端点 $(\pm1,\cdots,\pm1)$. $\forall a=(a_1,\cdots,a_n)\in K_n$, 由 Caratheodory 定理, a 是至多 $n+1$ 个端点的凸组合. 不妨设

$$a_i=\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_ja_{ij},\quad\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j=1,$$

这里 $a_{ij}=\pm1$, 则

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_id_i\right\|_p=\left\|\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}d_i\right)\right\|_p\leqslant\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j\left\|\sum_{i=1}^n a_{ij}d_i\right\|_p\leqslant2\left\|\sum_{i=1}^n d_i\right\|_p.$$

若 d_i 是对称的 $(1\leqslant i\leqslant n),a_i=\pm1$, 则

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_id_i\right\|_p=\left\|\sum_{i=1}^n d_i\right\|_p. \tag{2.8}$$

再由以上论证得出所要的结论.

推论 2 若 $\{d_i\}$ 是独立序列, $Ed_i=0$ 并且 $0\leqslant|\alpha_i|\leqslant|\beta_i|, 1\leqslant i\leqslant n$, 则

$$\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i\right\|_p \leqslant 2\left\|\sum_{i=1}^n \beta_i d_i\right\|_p. \tag{2.9}$$

若 d_i 是对称的, 则系数 2 可换为 1.

推论 3 设 $1\leqslant p<\infty, \{d_i\}$ 是相互独立的 R.V. 序列, $Ed_i=0$, $\{\xi_i\}$ 是实值 R.V. 序列并且 $\xi_i\in L_p$. 若 $\{\xi_i\}$ 与 $\{d_i\}$ 彼此独立, 则

$$2^{-p}E(\min_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|^p)E\left\|\sum_{i=1}^n d_i\right\|^p \leqslant E\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i d_i\right\|^p \leqslant 2^p E(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|^p)E\left\|\sum_{i=1}^n d_i\right\|^p. \tag{2.10}$$

若 $\{\xi_i\},\{d_i\}$ 都是对称的, 则上述系数可换为 1, $E(\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|^p)$ 可换为 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}E|\xi_i|^p$.

证明 为明确起见, 将 ξ_i 所在的概率空间记为 (Ω',Σ',P'). 由推论 2 和 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}
E\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i d_i\right\|^p &= \int_{\Omega'}\int_{\Omega}\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega')d_i(\omega)\right\|^p \mathrm{d}P\mathrm{d}P' \\
&\leqslant \int_{\Omega'}(2^p\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i(\omega')|^p)E\left\|\sum_{i=1}^n d_i\right\|^p \mathrm{d}P' \\
&= 2^pE(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i(\omega')|^p)E\left\|\sum_{i=1}^n d_i\right\|^p.
\end{aligned}$$

类似地得到左半边不等式.

若 $\{\xi_i\}$ 与 $\{d_i\}$ 均对称, 则 $\sum\limits_{i=1}^n \xi_i d_i$ 与 $\sum\limits_{i=1}^n |\xi_i|(r_i d_i)$ 同分布, 从而

$$\begin{aligned}
E\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i d_i\right\|^p &= \int_{\Omega'}\int_{\Omega}\left\|\sum_{i=1}^n |\xi_i(\omega')|r_i(\omega)d_i(\omega)\right\|^p \mathrm{d}P\mathrm{d}P' \\
&\geqslant \int_{\Omega}\left\|\int_{\Omega'}\sum_{i=1}^n |\xi_i(\omega')|r_i(\omega)\mathrm{d}_i(\omega)\mathrm{d}P'\right\|^p \mathrm{d}P \\
&= \int_{\Omega}\left\|\sum_{i=1}^n E|\xi_i|d_i(\omega)\right\|^p \mathrm{d}P.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

再由推论 2 得出最后的结论.

定理 6 (Hoffmann-Jørgensen) 设 $1\leqslant p<\infty, \{d_n\}$ 是相互独立的 $L^p(P,X)$ 中序列, $\{\xi_n\},\{\eta_n\}$ 是两个实值 L_p 可积 R.V. 序列, $\{\xi_n\},\{\eta_n\}$ 是两个实值 L_p 可积 R.V. 序列, $\{\xi_n\}$ 与 $\{d_n\},\{\eta_n\}$ 与 $\{d_n\}$ 分别独立, 并且

(i) $E\xi_n d_n = E\eta_n d_n = 0\ (n \geqslant 1)$;

(ii) $E(\sup_{n\geqslant 1} |\xi_n|)^p < \infty$;

(iii) $a = \inf_{n\geqslant 1} E|\eta_n| > 0$;

则

$$E\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i d_i\right\|^p \leqslant \left(\frac{8}{a}\right)^p E(\sup_{n\geqslant 1} |\xi_n|^p) E\left\|\sum_{i=1}^n \eta_i d_i\right\|^p. \tag{2.12}$$

证明 取与 $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}, \{d_n\}$ 都独立的 R 序列 (r_n), 推论 2 说明

$$E\left\|\sum_{k=1}^n \xi_k d_k\right\|^p \leqslant 2^p E\left\|\sum_{i=1}^n r_k \xi_k d_k\right\|^p \leqslant 4^p E(\sup_{k\geqslant 1} |\xi_k|)^p E\left\|\sum_{i=1}^n r_k d_k\right\|^p.$$

记 $a_k = E|\eta_k|$, 则 $a_k > 0$, 从而由压缩原理

$$E\left\|\sum_{k=1}^n r_k d_k\right\|^p \leqslant a^{-p} E\left\|\sum_{k=1}^n a_k r_k d_k\right\|^p. \tag{2.13}$$

若 B 表示由 $r_1, \cdots, r_n, d_1, \cdots, d_n$ 生成的 σ 代数, 定义 $\varepsilon_k^* = \mathrm{sign}\ \eta_k$, 则由独立性和 Jensen 不等式,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^n a_k r_k d_k\right\|^p &= \left\|E\left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|\, r_k d_k \,|B\right)\right\|^p \\ &\leqslant E\left(\left\|\sum_{k=1}^n |\eta_k|\, r_k d_k\right\|^p |B\right) = E\left(\left\|\sum_{k=1}^n \eta_k \varepsilon_k^* r_k d_k\right\|^p |B\right).\end{aligned}$$

于是 (2.13) 变为

$$E\left\|\sum_{k=1}^n r_k d_k\right\|^p \leqslant a^{-p} E\left\|\sum_{k=1}^n \eta_k \varepsilon_k^* r_k d_k\right\|^p.$$

此时 $\{\varepsilon_k^* r_k\}$ 仍与 $\{\eta_k\}, \{d_k\}$ 独立. 再由推论 2 得出 (2.12).

推论 4 设 $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k d_k, T_n = \sum_{k=1}^n \eta_k d_k$, 在定理 6 (i), (ii), (iii) 条件下, 若 T_n L_p 有界 (收敛), 则 S_n 也 L_p 有界 (收敛).

设 (x_n) 是 X 中的无穷序列, 考虑下面几种序列空间:

$$l_p(X) = \left\{ x = (x_n): \ \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

$$l_\infty(X) = \{x = (x_n): \ \|x\|_\infty = \sup_{n \geqslant 1} \|x_n\| < \infty\},$$

$$c_0(X) = \{x = (x_n): \ x_n \to 0, \|x\| = \|x\|_\infty\},$$

$$c_r(X) = \left\{ x = (x_n): \ \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \ \text{ a.e. 收敛} \right\},$$

$$B_r(X) = \left\{ x = (x_n): \ \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \ \text{ a.e. 有界} \right\}.$$

直接验证可知 $l_p(X)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 是 Banach 空间, $c_0(X)$ 是 $l_\infty(X)$ 的闭子空间. 此外, 下面推论可以从定理 4 及其推论得到.

推论 5　若 $1 \leqslant p < \infty$, 则

(i) $x \in B_r(X) \Leftrightarrow \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i, n \geqslant 1 \right\}$ 是 L_p 有界的;

(ii) $x \in c_r(X) \Leftrightarrow \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i, n \geqslant 1 \right\}$ 是 L_p 收敛的;

(iii) $l_1(X) \subset c_r(X) \subset B_r(X) \subset l_\infty(X)$;

(iv) $c_r(X) \subset c_0(X)$.

由推论中的 (i),(ii), 对于 $x \in c_r(X)$ 和 $x \in B_r(X)$, 定义

$$\|x\|_p = \sup_{n \geqslant 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \right\|_p, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

同样可以验证, $c_r(X), B_r(X)$ 是 Banach 空间. 由 4.1 节定理 2, 对于所有这样的 p, 范数 $\|\cdot\|_p$ 彼此等价.

定理 7 (Hoffmann-Jørgensen, Pisier)　设 X 是 Banach 空间, 则下面条件等价:

(i) $B_r(X) \subset c_0(X)$;

(ii) $B_r(X) \subset c_r(X)$;

(iii) 对于任何 X 值对称 R.V. 序列 $\{d_n\}$, 若部分和 f_n a.e. 有界, 则 f_n a.e. 收敛;

(iv) 对于任何 X 值独立 R.V. 序列 $\{d_n\}$, 若部分和 f_n a.e. 有界, 则 f_n 本性收敛 (即存在 $x_n \in X$, 使得 $\sum_{i=1}^{n} (d_i - x_i)$ a.e. 收敛);

(v) X 不包含与 c_0 同构的子空间 (这里 $c_0 = c_0(R)$).

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 若 $x \in B_r(X)\backslash c_r(X)$, 则 $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ 是 a.e. 有界但不是 a.e. 收敛的. 由定理 4, $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ 不是 L_1 中的 Cauchy 序列. 从而存在 $0 = n_0 < n_k \uparrow \infty$ 和 $\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$E\left\|\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} r_i x_i\right\| = \int_0^1 \left\|\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} r_i x_i\right\| \mathrm{d}t > \varepsilon_0, \quad k \geqslant 1. \tag{2.14}$$

记 $d_k = \sum_{i=n_k+1}^{n_k} r_i x_i$, 则 $\{d_k\}$ 是对称独立序列并且若 $f_k = \sum_{i=1}^{n} d_i$, 则

$$f^* = \sup_{k\geqslant 1}\left\|\sum_{i=1}^{k} d_i\right\| \leqslant \sup_{k\geqslant 1}\left\|\sum_{i=1}^{k} r_i x_i\right\| \triangleq M < \infty \quad \text{a.e.}$$

后者是由于 $(x_n) \in B_r(X)$ 时, $\sum_{i=1}^{n} d_i$ a.e. 有界. 由对称性

$$\sup_{k\geqslant 1}\left\|\sum_{i=1}^{k} r_i d_i\right\| \leqslant \sup_{k\geqslant 1}\left\|\sum_{i=1}^{k} d_i\right\| < \infty \quad \text{a.e.},$$

即 $(d_k) \in B_r(X)$ a.e.. 另一方面, 将定理 4 应用于 $\left\{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i, n \geqslant 1\right\}$ 知道 $EM < \infty$, 从而 $Ed^* \leqslant 2Ef^* < 2EM < \infty$. 若 $d_k \to 0$ a.e., 则由控制收敛定理, $E\|d_k\| \to 0$. 但 (2.14) 说明 $E\|d_k\| \geqslant \varepsilon_0 > 0$, 故至少在某个正测度集合上, $d_k(t) \to 0$ 不成立, 即

$$P((d_k) \in B_r(X)\backslash c_0(X)) > 0,$$

与 (i) 矛盾.

(ii)$\Rightarrow$(iii). 若 $\{d_n\}$ 是对称 R.V. 序列, 当 f_n a.e. 有界时, 上面证明表明 $\{d_n\} \in B_r(X)$, a.e., 由 (ii) 知道 $\{d_n\} \in c_r(X)$ a.e., 再由对称性知道 $\left\{\sum_{i=1}^{n} d_i, n \geqslant 1\right\}$a.e. 收敛.

(ii) $\Rightarrow$ (iv). 由定理 3 和定理 4 的证明, $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 本性收敛当且仅当其对称化序列的部分和 $\sum_{i=1}^{n} D_i$ 收敛. 于是 (iii) 成立则 (iv) 成立.

(iv)$\Rightarrow$(v). 若 T 是 c_0 与 X 的子空间之间的同构, $\{e_n\}$ 是 c_0 的标准基, $x_n = Te_n$, 则 $x_n \to 0 \Leftrightarrow e_n \to 0$. 现在 $\forall n \geqslant 1$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right\| = \left\|T\left(\sum_{i=1}^{n} r_i e_i\right)\right\| \leqslant \|T\| \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i e_i\right\|_{c_0} = \|T\|.$$

左端是独立增量 R.V. 序列并且 a.e. 有界. 由 (iv), 它是本性收敛的. 由 $\{r_i\}$ 的对称性知道必 a.e. 收敛, 从而 $x_n \to 0$. 但 e_n 不收敛于 0. 矛盾.

(v) $\Rightarrow$ (i) 若 X 不包含与 c_0 同构的子空间, Kwapien 的一个定理说明 $L_1(P,X)$ 也不包含与 c_0 同构的子空间. 设 $\{x_n\} \in B_r(X)$, 则 $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ a.e. 有界. 定理 4 保证了它是 L_1 有界的. 由于

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i d_i\right\|_1 = \sup_{n\geqslant 1}\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right\|_1 < \infty,$$

它在 $L_1(P,X)$ 中无条件收敛. 从而 $\|x_n\| \to 0$, 即 $\{x_n\} \in c_0(X)$. 证毕.

定理 8 (Hoffmann-Jørgensen, Pisier) 设 X 是 Banach 空间, $1 \leqslant p \leqslant 2$, 则以下条件等价:

(i) $l_p(X) \subset B_r(X)$;

(ii) $l_p(X) \subset c_r(X)$;

(iii) X 是 p 型的;

(iv) 存在 $C > 0$ 使得对于任何零均值独立 X 值 R.V. $d_1, \cdots, d_n$,

$$E\left\|\sum_{i=1}^{n} d_i\right\|^p \leqslant C\sum_{i=1}^{n} E\|d_i\|^p, \quad n \geqslant 1. \tag{2.15}$$

证明 (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) 是容易得到的, 剩下证明 (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) 成立.

为证 (i) $\Rightarrow$ (iii), 考虑 $l_p(X)$ 上的两种范数. 除了上面定义的 $\|\cdot\|_p$ 之外, 将定理 7 前面定义的记为 $\|\cdot\|_{(p)}$. 考虑恒等算子 I: $(l_p(X), \|\cdot\|_p) \to (l_p(X), \|\cdot\|_{(p)})$. 由 (i) 知道定义是合理的. 为证明 I 是有界的, 考虑序列 $x^{(k)} = (x_n^{(k)}) \in l_p(X)$. 若 $\|x^{(k)}\|_p \to 0$, $\|x^{(k)} - x\|_{(p)} \to 0$, 前者表明每个 $x_n^{(k)} \to 0 (k \to \infty)$. 若 $x = (x_n)$, 后者说明

$$\sup_{m\geqslant 1} E\left\|\sum_{n=1}^{m} r_n(x_n^{(k)} - x_n)\right\|^p \to 0 \ (k \to \infty).$$

从而 $\forall n \geqslant 1$, $x_n^{(k)} \to x_n = 0 \ (k \to \infty)$, 即 $x = 0$. 根据闭图像定理, I 是有界算子. 记 $C = \|I\|$, 则 $\|Ix\|_{(p)} \leqslant C\|x\|_p$, 即 X 是 p 型的.

为证 (iii) $\Rightarrow$ (iv), 注意当 X 是 p 型时, 若 d_i 是在概率空间 (Ω, Σ, P) 上定义, 则对于几乎所有 $\omega \in \Omega$,

$$\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) d_i(\omega)\right\|^p \mathrm{d}t \leqslant C\sum_{i=1}^{n}\|d_i(\omega)\|^p,$$

两端积分, 由 Fubini 定理

$$\int_0^1\int_\Omega\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)d_i(\omega)\right\|^p \mathrm{d}P\mathrm{d}t=\int_\Omega\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)d_i(\omega)\right\|^p \mathrm{d}t\mathrm{d}P\leqslant C\sum_{i=1}^n E\left\|d_i\right\|^p.$$

由 $Ed_i=0$, 应用定理 5, 对于每个固定的 t,

$$\int_\Omega\left\|\sum_{i=1}^n r_i r_i d_i\right\|^p \mathrm{d}P\leqslant 2\int_\Omega\left\|\sum_{i=1}^n r_i d_i\right\|^p \mathrm{d}P,$$

从而

$$\int_\Omega\left\|\sum_{i=1}^n d_i\right\|^p \mathrm{d}P\leqslant 2\int_0^1\int_\Omega\left\|\sum_{i=1}^n r_i d_i\right\|^p \mathrm{d}P\mathrm{d}t\leqslant 2C\sum_{i=1}^n E\left\|d_i\right\|^p,$$

此即 (2.15).

定理 9 (Pisier) 设 X 是 Banach 空间, $1\leqslant p\leqslant 2$, 则以下条件等价:

(i) X 是 p 型空间;

(ii) 存在 $C>0$ 使每个 X 值独立同分布零均值 R.V. 序列 $\{d_n\}$ 满足

$$E\left\|\sum_{i=1}^n d_i\right\|\leqslant Cn^{1/p}(E\left\|d_1\right\|^p)^{1/p}. \tag{2.16}$$

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 可由定理 8 得到. 我们证明 (ii) $\Rightarrow$ (i).

取 (0, 1] 上的函数 $u_j=\chi_{A_j^{(1)}}-\chi_{A_j^{(2)}}, j=1,\cdots,n$, 其中

$$A_j^{(1)}=\left(\frac{2j-2}{2n},\frac{2j-1}{2n}\right],\quad A_j^{(2)}=\left(\frac{2j-1}{2n},\frac{2j}{2n}\right],$$

并令 $u=(u_1,\cdots,u_n)$. 对于概率空间 (Ω,Σ,P), 取 u 的独立 copy

$$\eta_i=(\eta_i^{(1)},\cdots,\eta_i^{(n)}),\quad i=1,\cdots,n.$$

再令 $d_i=\sum_{j=1}^n\eta_i^{(j)}x_j$, 则 $d_1,\cdots,d_n$ 独立同分布, $E\left\|d_i\right\|^p=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\left\|x_j\right\|^p$.

当 (2.16) 成立时

$$\begin{aligned}E\left\|\sum_{i=1}^n d_i\right\|&=E\left\|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\eta_i^{(j)}x_j\right\|\\&\leqslant Cn^{1/p}\left(E\left\|\sum_{j=1}^n\eta_1^{(j)}x_j\right\|^p\right)^{1/p}\leqslant C\left(\sum_{j=1}^n\left\|x_j\right\|^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

若记 $\xi_j=\sum_{k=1}^{n}\eta_k^{(j)}$, 则 ξ_j 是对称 R.V., 从而上式变为

$$E\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\right\|\leqslant C\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p}.$$

取与 $\{\xi_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 独立的随机变量 $\varepsilon_i(i=1,\cdots,n),P(\varepsilon_i=\pm1)=1/2$, 则

$$E\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\xi_j x_j\right\|=E\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\varepsilon_j x_j)\right\|\leqslant C\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p}. \tag{2.17}$$

由推论 3,

$$E\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\xi_j x_j\right\|\geqslant (\min_{1\leqslant j\leqslant n}E|\xi_j|)E\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j\right\|. \tag{2.18}$$

为计算 $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}E|\xi_j|$, 由 $\eta_k^{(j)}(\omega)$ 的对称性, 取序列 $r_k(t),k=1,2,\cdots$, 则 ξ_j 与 $\sum_{k=1}^{n}r_k(t)\eta_k^{(j)}(\omega)$ 同分布. 由 Khintchin 不等式和 $\eta_k^{(j)}$ 的定义,

$$\begin{aligned}E|\xi_j|&=\int_\Omega\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}r_k(t)\eta_k^{(j)}(\omega)\right|\mathrm{d}P\mathrm{d}t\\&\geqslant C\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\eta_k^{(j)}(\omega)\right|^2\right)^{1/2}\mathrm{d}P\\&=C\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\eta_k^{(j)}(\omega)\right|^{1/2}\mathrm{d}P\right)\geqslant CP\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\eta_k^{(j)}(\omega)\right|>0\right)\\&=C\left(1-P\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\eta_k^{(j)}(\omega)\right|=0\right)\right)\\&=C\left(1-(1-n^{-1})^{1/n}\right)\geqslant C\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right).\end{aligned}$$

于是由 (2.17), (2.18),

$$E\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j\right\|\leqslant C'\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p}.$$

将 ε_i 看作关于 $[0,1]$ 上 Lebesgue 测度的随机变量, 并且再次应用推论 2 即得到

$$E\left\|\sum_{j=1}^{n}r_j x_j\right\|\leqslant C'\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p}.$$

定理 10 设 X 是 Banach 空间, $2 \leqslant q < \infty$, 则以下条件等价:

(i) $B_r(X) \subset l_q(X)$;

(ii) $c_r(X) \subset l_q(X)$;

(iii) X 是 q 余型的;

(iv) 存在 $C > 0$ 使得任何零均值独立 X 值 R.V. $d_1, \cdots, d_n$,

$$E\sum_{i=1}^{n}\|d_i\|^q \leqslant CE\left\|\sum_{i=1}^{n} d_i\right\|^q, \quad n \geqslant 1. \tag{2.19}$$

证明 (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) 是容易的. 为证 (ii) $\Rightarrow$ (iii), 考虑恒等映射 $I : (c_r(X), \|\cdot\|_{(q)}) \to (c_r(X), \|\cdot\|_q)$. (ii) 保证了定义的合理性, 类似于定理 8 的讨论说明 I 具有闭图像, 从而 $C = \|I\| < \infty$, 由此得出 X 是 q 余型的. (iii) $\Rightarrow$ (iv) 的证明与定理 8 相应部分的证明一样进行.

4.3 独立 R.V. 序列的大数定律

称取值于 Banach 空间 X 的 R.V. 序列 (d_n) 满足强大数定律, 若

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n} d_i \to x \text{ a.e.}, \tag{3.1}$$

其中 $x \in X$. 称 (d_n) 满足弱大数定律, 如果上述极限依概率成立.

实值 R.V. 序列大数定律的研究是经典概率论中十分活跃的分支. 对于实值 R.V. 序列 (d_n), 要使大数定律成立, 有几种不同的条件, 例如:

(a) 独立同分布 (i.i.d);

(b) 独立并且 $Ed_n = a, \sup\limits_{n\geqslant 1} E|d_n|^2 < \infty$;

(c) 独立, $Ed_n = a$, 对于某个 $1 \leqslant p \leqslant 2, \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p}E\,|d_n|^p < \infty$.

若将实值序列换为取值于 Banach 空间的序列, 其结论依赖于 Banach 空间的某些性质. 约略言之, 早在 1953 年 Mourier 证明了对于任何 Banach 空间 X, 上面条件 (a) 都能保证在其中取值的 R.V. 序列满足强大数定律. 但为了得到更好的收敛速度, 就需要空间条件 (Acosta 定理). 要使 (b) 能保证每个 X 值 R.V. 序列成立, 需要 X 具有大于 1 的型. 此外马上就会看到, 要想同样的事实对于 (c) 成立, 必须并且只须 X 是 p 型空间.

引理 1 (Toeplitz) 设 $a_n \geqslant 0$ 是一列实数, $b_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \to \infty, x_n, x \in X, x_n \to x$,

则

$$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to x. \tag{3.2}$$

证明　若 $\|x_n - x\| \leqslant \varepsilon/2\ (n \geqslant n_0)$, 则

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - x\right\| &\leqslant \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n_0-1} a_i\|x_i - x\| + \frac{1}{b_n}\sum_{i=n_0}^{n} a_i\|x_i - x\| \\ &\leqslant \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n_0-1} a_i\|x_i - x\| + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

由 $b_n \to \infty$ 知后面第一项可任意小, 故得出所要的结论.

引理 2 (Kronecker)　设 $x_n \in X, a_n > 0, a_n \uparrow \infty$, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{-1} x_n$ 收敛时,

$$a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i \to 0. \tag{3.3}$$

证明　设 $S_0 = 0,\ S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i},\ S_n \to S$, 由 Toeplitz 引理,

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n} a_i(S_i - S_{i-1}) = S_n - \frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)S_i \to 0.$$

引理 3　设 (d_n) 是 X 值独立、对称 R.V. 序列, $r > 0$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i$, 则 $n^{-r}S_n \to 0$ a.e. 必须并且只须 $2^{-nr}(S_{2^{n+1}} - S_{2^n}) \to 0$ a.e..

证明　由等式

$$2^{-nr}(S_{2^{n+1}} - S_{2^n}) = \frac{S_{2^{n+1}}}{2^{(n+1)r}}\cdot 2^r - \frac{S_{2^n}}{2^{nr}},$$

当 $n^{-r}S_n \to 0$ 时 $2^{-nr}(S_{2^{n+1}} - S_{2^n}) \to 0$.

反之, 设 $K_n = 2^{-nr}(S_{2^{n+1}} - S_{2^n}) \to 0$ a.e., 由

$$2^{-nr}(S_{2^{n+1}} - S_2) = 2^{-nr}\sum_{i=1}^{n} 2^{ir}K_i = \left(2^{-nr}\sum_{i=1}^{n} 2^{ir}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} 2^{ir}\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n} 2^{ir}K_i,$$

注意 $2^{-nr}\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{ir} \to \dfrac{2^r}{2^r - 1}(n \to \infty)$, Toeplitz 引理说明 $2^{-nr}(S_{2^{n+1}} - S_2) \to 0$ a.e., 从而 $2^{-nr}S_{2^n} \to 0$ a.e..

现在 $\forall n \geqslant 1$, 取 $k \geqslant 1$ 使 $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$, 则

$$\frac{\|S_n\|}{n^r} \leqslant \frac{\|S_n - S_{2^{k-1}}\|}{n^r} + \frac{\|S_{2^{k-1}}\|}{n^r} \leqslant \frac{\|S_n - S_{2^{k-1}}\|}{2^{(k-1)r}} + \frac{\|S_{2^{k-1}}\|}{2^{(k-1)r}}.$$

易知后面第二项 a.e. 收敛于 0. 对于第一项, 注意由对称性应用 4.2 节定理 1,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty} P\Big(\max_{2^{k-1}<n\leqslant 2^k} 2^{-(k-1)r} \|S_n - S_{2^{k-1}}\| > \varepsilon\Big) \\ \leqslant\ & 2\sum_{k=1}^{\infty} P(2^{-(k-1)r} \|S_{2^k} - S_{2^{k-1}}\| > \varepsilon).\end{aligned}$$

由 Borel-Cantelli 引理 (见附录), 后者是有限的, 从而

$$\max_{2^{k-1}<n\leqslant 2^k} 2^{-(k-1)r} \|S_n - S_{2^{k-1}}\| \to 0 \text{ a.e.},$$

于是 $n^{-r}S_n \to 0$ a.e..

引理 4 设 $0 < p < \infty$, $0 < a_n \uparrow \infty, (d_n)$ 是独立、对称 R.V. 序列, $S_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$ 并且:

(i) $\|d_n\| \leqslant a_n$ a.e.;

(ii) $S_n/a_n \to 0$ 依概率成立, 则 $E\|a_n^{-1}S_n\|^p \to 0$.

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 取 n_0 使得 $n \geqslant n_0$ 时 $P(\|S_n\| \geqslant a_n\varepsilon) \leqslant 1/16 \cdot 3^p$, 则

$$\int_0^k t^{p-1}P(\|S_n\| > a_n t)\mathrm{d}t = 3^p \int_0^{\frac{k}{3}} t^{p-1}P(\|S_n\| > 3a_n t)\mathrm{d}t.$$

应用 4.2 节定理 4 证明中使用的方法可得

$$\begin{aligned}\int_0^k t^{p-1}P(\|S_n\| > a_n t)\mathrm{d}t \leqslant\ & 2\cdot 3^p \int_0^k t^{p-1}P(d_n^* > a_n t)\mathrm{d}t \\ & +8\cdot 3^p \int_0^k t^{p-1}P^2(\|S_n\| > a_n t)\mathrm{d}t \\ \leqslant\ & 16\cdot 3^p\varepsilon + \frac{8\cdot 3^p}{16\cdot 3^p}\int_0^k t^{p-1}P(\|S_n\| > a_n t)\mathrm{d}t \\ & +4\cdot 3^p \int_0^k t^{p-1}P(d_n^* > a_n t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^k t^{p-1}P(\|S_n\| > a_n t)\mathrm{d}t \leqslant\ & 32\cdot 3^p\varepsilon + 8\cdot 3^p \int_0^k t^{p-1}P(d_n^* > a_n t)\mathrm{d}t \\ \leqslant\ & 32\cdot 3^p\varepsilon + 8\cdot 3^p \int_0^1 P(d_n^* > a_n t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

最后的不等式是因为条件 (i). 于是

$$E\left\|\frac{S_n}{a_n}\right\|^p = \lim_{k\to\infty}\int_0^k t^{p-1}P(\|S_n\| > a_n t)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant 32\cdot 3^p\varepsilon + 8\cdot 3^p\int_0^1 P(d_n^* > a_n t)\mathrm{d}t.$$

根据独立性

$$P(d_n^* > a_n t) \leqslant P(2S_n^* > a_n t) \leqslant 2P(2\|S_n\| > a_n t),$$

由控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 P(d_n^* > a_n t)\mathrm{d}t = 0.$$

ε 是任意的, 故必有 $E\left\|a_n^{-1}S_n\right\|^p \to 0$.

定理 1 (Hoffmann-Jørgensen, Pisier)　设 X 是 Banach 空间, $1 \leqslant p \leqslant 2$, 则以下条件等价:

(i) X 是 p 型的;

(ii) 对任何 0 均值 X 值独立 R.V. 序列 (d_n), 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p}E\|d_n\|^p < \infty$, 则 (d_n) 满足强大数定律;

(iii) 对于任何序列 $(x_n) \subset X$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p}\|x_n\|^p < \infty$, 则 $(r_n x_n, n \geqslant 1)$ 满足强大数定律.

将 (ii), (iii) 换为 w 大数定律结论仍成立.

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii). 注意若 $d_n' = d_n/n$, 则 (d_n') 仍为 0 均值独立 R.V. 序列. (ii) 中条件表明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E\|d_n'\|^p < \infty$. 由 4.2 节定理 8(iv),

$$E\left\|\sum_{i=1}^n d_i'\right\|^p \leqslant C\sum_{i=1}^n E\|d_n'\|^p < \infty.$$

若换为 $d_{k+1}', d_{k+2}', \cdots$, 类似地得到

$$E\left\|\sum_{i=k+1}^{\infty} d_i'\right\|^p \leqslant C\sum_{i=k+1}^{\infty} E\|d_i'\|^p \to 0,\quad k\to\infty.$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_i'$ L_p 范数收敛, 从而依概率收敛和 a.e. 收敛. 由引理 2 得知强大数定理成立.

(ii)⇒(iii) 显然, 现证 (iii)⇒ (i). 设 (iii) 中弱大数定理成立. 为证 (i), 考虑两个 X 中的序列空间

$$G_0 = \left\{ x = (x_n):\ \|x\|_0 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \|x_n\|^p \right)^{1/p} < \infty \right\},$$
$$G_1 = \left\{ x = (x_n):\ \|x\|_1 = \sup_{n \geqslant 1} \left\| n^{-1} \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \right\|_p < \infty \right\}. \tag{3.4}$$

例行的验证表明 G_0, G_1 是 Banach 空间. 利用引理 4 可知, (iii) 意味着 $G_0 \subset G_1$ 并且恒等映射 $I: G_0 \to G_1$ 是闭算子从而是有界算子. 于是存在 $C > 0$ 使得任何 (x_n) 满足

$$E\left\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \right\|^p \leqslant C n^p \sum_{i=1}^{n} i^{-p} \|x_i\|^p, \quad n \geqslant 1.$$

将此式应用于 $(\underbrace{0, \cdots, 0}_{k}, x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots)$, 则

$$E\left\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \right\|^p = E\left\| \sum_{i=k+1}^{k+n} r_i x_{i-k} \right\|$$
$$\leqslant C(k+n)^p \sum_{i=1}^{n} (i+k)^{-p} \|x_i\|^p \leqslant C \left(\frac{k+n}{k+1} \right)^p \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p.$$

令 $k \to \infty$ 得到

$$E\left\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \right\|^p \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p,$$

故 X 是 p 型的.

定理 2 (Brunk 型大数定律) 设 X 是 p 型空间, 则对于任何 0 均值独立 X 值 R.V. 序列 (d_n), 若存在 $q \geqslant 1$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-pq-1} E\|d_n\|^{pq} < \infty, \tag{3.5}$$

则 $\{d_n\}$ 满足强大数定律.

证明 $q = 1$ 的情况已包含在定理 1 中. 现设 $q > 1$, 首先由 Kahane 不等式和 X 的 p 型, 存在 $C > 0$ 使得

$$\left(E\left\| \sum_{i=1}^{n} r_i d_i \right\|^q \right)^{1/q} \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{n} E\|d_i\|^p \right)^{1/p}.$$

取 D_i 是 d_i 的对称化, 则

$$E\left\|\sum_{i=1}^n d_i\right\|^q \leqslant E\left\|\sum_{i=1}^n D_i\right\|^q = E\left\|\sum_{i=1}^n r_i D_i\right\|^q$$
$$\leqslant C\left(\sum_{i=1}^n E\|D_i\|^p\right)^{q/p} \leqslant C'\left(\sum_{i=1}^n E\|d_i\|^p\right)^{q/p}.$$

若 $q>p$, 取 s 使得 $p^{-1}=q^{-1}+s^{-1}$, 则 $\forall \alpha_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$,

$$\left(E\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant C'\left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p E\|d_i\|^p\right)^{1/p}$$
$$\leqslant C'\left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^{p\cdot\frac{s}{p}}\right)^{\frac{p}{s}\cdot\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^n (E\|d_i\|^p)^{q/p}\right]^{\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant C'\left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^s\right)^{\frac{1}{s}}\left[\sum_{i=1}^n E\|d_i\|^q\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{3.6}$$

记 $Y_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n d_i$, 以 $\dfrac{1}{n}$ 代替上面的 α_i, 以 pq 代替 q, 则 $s=\dfrac{pq}{q-1}$ 并且

$$E\|Y_n\|^{pq} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{pq}{q-1}}\right)^{q-1}\sum_{i=1}^n E\|d_i\|^{pq} \leqslant Cn^{q-1-pq}\sum_{i=1}^n E\|d_i\|^{pq}.$$

由 (3.5) 和 Kronecker 引理, $E\|Y_n\|^{qp}\to 0\ (n\to\infty)$.

Hajek-Renyi-Chow 关于实值下鞅的不等式是说, 当 $(\xi_n, n\geqslant 1)$ 是实值下鞅并且 $c_n\downarrow 0$ 时, $\forall\varepsilon>0$,

$$\varepsilon P(\max_{0\leqslant k\leqslant n} c_k\xi_k \geqslant \varepsilon) \leqslant c_0 E\xi_0^+ + \sum_{k=1}^n c_k E(\xi_k^+ - \xi_{k-1}^+) \tag{3.7}$$

(见文献 [64]). 现在令 $c_k=k^{-pq}, \xi_k=\|S_k\|^{pq}=\left\|\displaystyle\sum_{i=1}^k d_i\right\|^{pq}$, 则

$$\varepsilon^{pq}P(\sup_{j\geqslant n}\|Y_j\|>\varepsilon) = \varepsilon^{pq}\lim_{m\to\infty}P(\sup_{n\leqslant j\leqslant m}\|Y_j\|>\varepsilon)$$
$$\leqslant E\|Y_n\|^{pq} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{pq}}(E\|S_k\|^{pq} - E\|S_{k-1}\|^{pq})$$
$$\leqslant E\|Y_n\|^{pq} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{pq}} - \frac{1}{(k+1)^{pq}}\right)E\|S_k\|^{pq}, \tag{3.8}$$

其中用到分部求和.

在 (3.6) 中, 令 $\alpha_i = 1$ 并且以 pq 代替 q, 则

$$E\left\|\sum_{i=1}^{k} d_i\right\|^{pq} \leqslant Ck^{q-1}\sum_{i=1}^{k} E\|d_i\|^{pq}, \tag{3.9}$$

于是

$$(3.8)\text{ 式} \leqslant E\|Y_n\|^{pq} + C\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{pq}} - \frac{1}{(k+1)^{pq}}\right)k^{q-1}\sum_{i=1}^{k} E\|d_i\|^{pq}.$$

当 k 充分大时, 存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\left(\frac{1}{k^{pq}} - \frac{1}{(k+1)^{pq}}\right)k^{q-1} \leqslant \alpha\left(\frac{k^{q-1}}{k^{pq}} - \frac{(k+1)^{q-1}}{(k+1)^{pq}}\right).$$

于是只要 n 足够大,

$$(3.8)\text{ 式} \leqslant E\|Y_n\|^{pq} + 2\alpha C\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{pq-q+1}} - \frac{1}{(k+1)^{pq-q+1}}\right)\sum_{i=1}^{k} E\|d_i\|^{pq}.$$

应用分部求和于整个级数得出

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{pq-q+1}} - \frac{1}{(k+1)^{pq-q+1}}\right)\sum_{k=1}^{\infty} E\|d_i\|^{pq} \\
=&\sum_{i=1}^{\infty} E\|d_i\|^{pq}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{pq-q+1}} - \frac{1}{(k+1)^{pq-q+1}}\right) \\
=&\sum_{i=1}^{\infty} i^{q-pq-1}E\|d_i\|^{pq} < \infty.
\end{aligned}$$

于是必有

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{pq-q+1}} - \frac{1}{(k+1)^{pq-q+1}}\right)\sum_{i=1}^{k} E\|d_i\|^{pq} \to 0, \quad n\to\infty.$$

这说明 $\forall\, \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} P(\sup\limits_{j\geqslant n}\|Y_j\| > \varepsilon) = 0$. 从而 $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i/n \to 0$ a.e..

称 R.V. 序列 (d_n) 是尾概率一致有界的, 若存在 R.V. d 和 $C > 0$ 使得

$$\sup_{n\geqslant 1} P(\|d_n\| > t) \leqslant CP(d > t), \quad \forall t > 0. \tag{3.10}$$

记为 $\{d_n\} \succ d$.

显然, 独立同分布的 R.V. 序列是尾概率一致有界的.

引理 5 若 $1 \leqslant p < 2$, (d_n) 是独立 R.V. 序列, $(d_n) \succ d, Ed^p < \infty$. 则 $n^{-\frac{1}{p}}S_n$ 依概率收敛于 0 当且仅当它 a.e. 收敛于 0.

证明 设依概率 $n^{-\frac{1}{p}}S_n \to 0$, 不失一般性, 假定 (d_n) 对称, 令

$$Y_j = d_j \chi_{\{\|d_j\|^p \leqslant j\}}, \quad T_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j, \quad n \geqslant 1, \tag{3.11}$$

则

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(\|d_j\|^p > j) \leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} P(d^p > j) = CEd^p < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理, $P(\limsup\limits_{j\to\infty}\{Y_j \neq d_j\}) = 0$. 故只须证明 $n^{-\frac{1}{p}}T_n \to 0$ a.e..

$n^{-\frac{1}{p}}S_n$ 依概率收敛于 0, 则 $n^{-\frac{1}{p}}T_n$ 也是. 引理 4 说明 $n^{-1}E\|T_n\|^p \to 0$, 从而 $E\|n^{-1/p}T_n\| \to 0$. 若令 $V_n = \|T_{2^{n+1}} - T_{2^n}\| - E\|T_{2^{n+1}} - T_{2^n}\|$. 由引理 3, 为证 $n^{-\frac{1}{p}}T_n \to 0$ a.e. 只须证 $V_n/2^{n/p} \to 0$ a.e..

记 $B_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $B_j = \sigma(Y_1, \cdots, Y_j)$,

$$\eta_j = E(\|T_n\| \ |B_j) - E(\|T_n\| \ |B_{j-1}),$$

显然 $(\eta_j, 1 \leqslant j \leqslant n)$ 是一有限鞅差序列并且 $\sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j = \|T_n\| - E\|T_n\|$. 由于 $i \neq j$, 例如, $i < j$ 时, $E\eta_i\eta_j = E(E(\eta_i\eta_j\,|B_i)) = E[\eta_i E(\eta_j\,|B_i)] = 0$. 故

$$E\left|\sum_{j=1}^{n} \eta_j\right|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} E\eta_i\eta_j = \sum_{i=1}^{n} E\eta_i^2. \tag{3.12}$$

另一方面, 应用独立性可知 $E(\|T_n - Y_j\| \ |B_j) = E(\|T_n - Y_j\| \ |B_{j-1})$, 从而

$$\begin{aligned}
\eta_j \leqslant{}& E(\|T_n - Y_j\|\,|B_j) + E(\|Y_j\|\,|B_j) \\
&- E(\|T_n - Y_j\|\,|B_{j-1}) + E(\|Y_j\|\,|B_{j-1}) \leqslant \|Y_j\| + E\|Y_j\|, \\
\eta_j \geqslant{}& E(\|T_n - Y_j\|\,|B_j) - E(\|Y_j\|\,|B_j) \\
&- E(\|T_n - Y_j\|\,|B_{j-1}) - E(\|Y_j\|\,|B_{j-1}) = -\|Y_j\| - E\|Y_j\|.
\end{aligned}$$

于是

$$|\eta_j| \leqslant \|Y_j\| + E\|Y_j\|, \quad E\eta_j^2 \leqslant 4E\|Y_j\|^2. \tag{3.13}$$

将 (3.12)、(3.13) 应用于 $V_n, \forall\varepsilon > 0$, 则

$$P(|V_n|/2^{n/p} > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 2^{2n/p}} EV_n^2 \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2 2^{2n/p}} \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} E\|Y_j\|^2$$
$$\leqslant \frac{4\cdot 2^{2/p}}{\varepsilon^2} \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} E\|Y_j\|^2/j^{2/p}.$$

注意由 $(Y_n) \succ d$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} E\|Y_j\|^2/j^{2/p} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2/p}} \int_0^{j^{2/p}} P(\|d_j\| > t)\mathrm{d}t^2$$
$$\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2/p}} \int_0^{j^{1/p}} P(d > t)\mathrm{d}t^2$$
$$\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 P(d > j^{1/p}t)\mathrm{d}t^2$$
$$= 2C\int_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} tP(d > j^{1/p}t)\mathrm{d}t \leqslant C'Ed^p < \infty.$$

这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|V_n|/2^{n/p} > \varepsilon) < \infty$, 由 Borel-Cantelli 引理 $|V_n|/2^{n/p} \to 0$ a.e..

定理 3 设 (d_n) 是独立同分布 0 均值 R.V., $1 < p < 2$, 则以下等价:

(i) $E\|d_1\|^p < \infty$ 并且 $\dfrac{S_n}{n^{1/p}} \to 0$ 以概率成立;

(ii) $\dfrac{S_n}{n^{1/p}} \to 0$ a.e.;

(iii) $E\left\|\dfrac{S_n}{n^{1/p}}\right\| \to 0$;

(iv) $\forall\varepsilon > 0, \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}P\left(\left\|\dfrac{S_n}{n^{1/p}}\right\| > \varepsilon\right) < \infty$.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 的证明见定理 2. 为证 (ii) $\Rightarrow$ (iii), 只须证 $(\|n^{-1/p}S_n\|, n \geqslant 1)$ 一致可积. 由于 $p > 1$, 只须证明 $\sup\limits_n E\|S_n\|^p/n < \infty$. 由 4.2 节定理 4 中使用过的方法, 取 n_0 使得当 $n \geqslant n_0$ 时, $P(\|S_n\| > n^{1/p}) < 1/16 \cdot 3^p$, 则

$$E\|S_n\|^p = \int_0^{\infty} P(\|S_n\|^p > t)\mathrm{d}t = 3^p \int_0^{\infty} P(\|S_n\| > 3t^{1/p})\mathrm{d}t$$
$$\leqslant 3^p \left[2\int_0^{\infty} P(d_n^* > t^{1/p})\mathrm{d}t + 8\int_0^{\infty} P(\|S_n\| > t^{1/p})^2\mathrm{d}t\right]$$

$$\leqslant 2\cdot 3^pE(d_n^*)^p+8\cdot 3^pn+\frac{1}{2}\int_n^\infty P(\|S_n\|>t^{1/p})\mathrm{d}t$$
$$\leqslant 2\cdot 3^pE(d_n^*)^p+8\cdot 3^pn+\frac{1}{2}E\|S_n\|^p.$$

注意, 下面马上要进行的 (iii) $\Rightarrow$ (iv) 的证明仅用到 $S_n/n^{1/p}\to 0$ a.e. (或 $S_n/n^{1/p}\Rightarrow 0$), 再从 (iv) $\Rightarrow$ (i) 的证明得出 $E\|d_1\|^p<\infty$, 从而

$$\frac{E\|S_n\|^p}{n}\leqslant 16\cdot 3^p+\frac{4\cdot 3^p}{n}E(d_n^*)^p$$
$$\leqslant 16\cdot 3^p+\frac{2\cdot 3^p}{n}\sum_{i=1}^n E\|d_i\|^p\leqslant 16\cdot 3^p+2\cdot 3^pE\|d_1\|^p<\infty.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv). 由独立同分布知道 $S_n/n^{1/p}\to 0$ a.e. Borel-Cantelli 引理保证了 $\forall\varepsilon>0$,

$$\sum_{n=1}^\infty P(\|S_{2^n}\|>2^{n/p}\varepsilon)=\sum_{n=0}^\infty \mathrm{P}\left(\left\|\sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}}d_j\right\|>2^{n/p}\varepsilon\right)<\infty.$$

从而

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1}P(\|S_n/n^{1/p}\|>\varepsilon)=\sum_{j=0}^\infty\sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1}\frac{1}{n}P(\|S_n/n^{1/p}\|>\varepsilon)$$
$$\leqslant\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{2^j}\sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1}P(\|S_n/n^{1/p}\|>\varepsilon)$$
$$\leqslant\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{2^j}\sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1}P(\|S_n\|>2^{j/p}\varepsilon)$$
$$\leqslant\sum_{j=0}^\infty P(\sup_{2^j\leqslant n\leqslant 2^{j+1}}\|S_n\|>2^{j/p}\varepsilon)$$
$$\leqslant 2\sum_{j=0}^\infty P\left(\|S_{2^{n+1}}\|>\frac{2^{(j+1)/p}\varepsilon}{2^{1/p}}\right)<\infty.$$

(iv)$\Rightarrow$(i). 先假定 (d_n) 对称. 若 $S_n/n^{1/p}$ 不依概率收敛于 0, 则 $\exists\varepsilon_0>0, n_i\uparrow\infty$ 使得 $P\{\|S_{n_i}\|>n_i^{1/p}\varepsilon_0\}>\varepsilon_0$, 不妨设 $n_{i+1}>2n_i$, 从而

$$P(\sup_{k\leqslant n_i}\|S_k\|>n_i^{1/p}\varepsilon_0)>\varepsilon_0,\quad i\geqslant 1.$$

实际计算可知

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\left(\|S_n\| > \frac{\varepsilon_0 n^{1/p}}{2^{1/p}}\right) &\geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=n_i}^{2n_i} n^{-1} P\left(\|S_n\| > \frac{\varepsilon_0 n^{1/p}}{2^{1/p}}\right)\\ &\geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=n_i}^{2n_i} n^{-1} P\left(\sup_{k\leqslant n}\|S_k\| > \frac{\varepsilon_0 n^{1/p}}{2^{1/p}}\right)\\ &\geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=n_i}^{2n_i} n^{-1} P\left(\sup_{k\leqslant n_i}\|S_k\| > \varepsilon_0 n_i^{1/p}\right)\\ &\geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=n_i}^{2n_i} n^{-1} = \infty.\end{aligned}$$

与 (iv) 矛盾, 所以必有 $S_n/n^{1/p} \Rightarrow 0$. 定义

$$\tau = \inf\{k : \|S_k\| > n^{1/p}\}, \quad \sigma = \inf\{k < \tau : \|d_k\| > 2n^{1/p}\},$$

则

$$\begin{aligned}P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|S_k\| > n^{1/p}) &\geqslant \sum_{k=1}^{n} P(\sigma = k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} P(\|d_k\| > 2n^{1/p})P(\tau > k)\\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n} P(\|d_k\| > 2n^{1/p})(1 - P(\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\|S_i\| > n^{1/p})).\end{aligned}$$

由 $S_n/n^{1/p} \Rightarrow 0$, 取 n_0 使得 $n \geqslant n_0$ 时, $P(\|S_n\| > n^{1/p}) < 1/4$, 则

$$1 - P(\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\|S_i\| > n^{1/p}) \geqslant 1 - 2P(\|S_n\| > n^{1/p}) > \frac{1}{2}.$$

此时必有

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-1}P(\|S_n\| > n^{1/p}) &\geqslant \frac{1}{2}\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-1}P(\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\|S_k\| > n^{1/p})\\ &\geqslant \frac{1}{4}\sum_{n=n_0}^{\infty} P(\|d_k\| > 2n^{1/p}) = \frac{1}{4}\sum_{n=n_0}^{\infty} P(\|d_1\|^p > 2^p n).\end{aligned}$$

于是 $E\|d_1\|^p < \infty$.

对于不是对称的 (d_n), 通过对称化的方法仍可得到结论.

定理 4 (Acosta) 设 $1 \leqslant p < 2$, 则以下条件等价:

(i) X 是 p 型空间;

(ii) 对于每个独立同分布 0 均值 R.V. 序列 (d_n), 若 $E\|d_1\|^p < \infty$, 则

$$n^{-1/p}\sum_{i=1}^{n} d_i \to 0 \quad \text{a.e.}. \tag{3.14}$$

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii). 对于实值情况和 $p=2$, (3.14) 成立, 此为 Marcinkiewitz 强大数定律. 注意对于每个 $f \in X^*, \{f(d_n)\}$ 为实值独立 R.V. 序列, 因此, $f(S_n/n^{1/p}) \to 0$ a.e. 成立.

另一方面, 若 X 是 p 型空间, F 是 X 的有限维子空间, 则商空间 X/F 仍为 p 型空间. 若 $\|x\|_F$ 是 X/F 上的范数, 由 4.2 节定理 8, $\forall\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}P(\|S_n/n^{1/p}\|_F > \varepsilon) &\leqslant \frac{1}{n\varepsilon^p}E\|S_n\|_F^p \\ &\leqslant \frac{C}{n\varepsilon^p}\sum_{j=1}^{n}E\|d_j\|_F^p \leqslant \frac{c}{\varepsilon^p}E\|d_j\|_F^p.\end{aligned}$$

由 $E\|d_1\|^p < \infty$, 记 X 的所有有限维子空间为 $\mathcal{F}$, 在 X 可分时容易得到

$$\lim_{F\in\mathcal{F}} E\|d_1\|_F^p = 0. \tag{3.15}$$

设 $\mathcal{L}(S_n/n^{1/p})$ 是 $S_n/n^{1/p}$ 的分布函数. 考虑 X 上的分布函数全体 $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ 中的序列 μ_n 弱收敛于 μ 的充要条件是对于任何有界连续函数 g, $\int_X g\mathrm{d}\mu_n \to \int_X g\mathrm{d}\mu$. 在关于 $S_n/n^{1/p}$ 的上述两条件下, $\mathcal{L}(S_n/n^{1/p})$ 构成了 $\mathcal{D}$ 中的弱相对紧集, 甚至为收敛序列, 其极限是在 0 点的 Dirac 测度 δ_0, 从而 $S_n/n^{1/p} \to 0$ 依概率成立. 由引理 5, $S_n/n^{1/p} \to 0$ a.e..

(ii) $\Rightarrow$ (i). 不妨设 $p > 1$, 定义

$$\begin{aligned}&G_0 = \{d \in L_p; Ed = 0\}, \quad \|d\|_{G_0} = \|d\|_p; \\ &G_1 = \{d \in L_p\}, \quad \|d\|_{G_1} = \sup_n E\|S_n/n^{1/p}\|.\end{aligned}$$

G_0, G_1 均为 Banach 空间. 由定理 3, 包含映射 $I: G_0 \to G_1$ 具有闭图像, 从而连续. 于是 $\exists C > 0$ 使得 $\forall d \in G_0$, $E\|S_n\| \leqslant Cn^{1/p}\|d_1\|_p$. 由 4.2 节定理 8, X 同构于 p 型空间.

4.4　中心极限定理与重对数律

让我们先回忆实值 R.V. 序列的中心极限定理：如果 (d_n) 是独立同分布序列

$(d_n \backsim d)$, $Ed=0, 0<Ed^2=b^2<\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}b}\sum_{i=1}^{n} d_i \leqslant t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}\mathrm{d}s, \quad \forall t \in R. \tag{4.1}$$

后者即标准正态分布函数. 简单地说, 二阶矩有限的独立同分布序列的极限有正态分布. 实际上, 若与 d 独立同分布的序列 (d_n) 满足中心极限定理, 则必有 $Ed=0, Ed^2=b^2<\infty$. 对于取值于有限维空间的序列有类似结论.

现在设 X 是 Banach 空间, 对于 X 值 R.V. ξ, 若 $\forall x^* \in X^*, x^*(\xi)$ 有正态分布, 即

$$P(x^*(\xi)\leqslant t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(s-a)^2/2\sigma^2}\mathrm{d}s, \tag{4.2}$$

则称 ξ 有正态分布. 此时又称 ξ 为 Gauss R.V., 特别地, 当 $a=0$ 时称 ξ 是中心化的, 若 $a=0, \sigma=1$, 称 ξ 是标准的. Gauss R.V. ξ 生成的测度 $\mu_\xi(A)=P(\xi\in A), \forall A\in B(X)$ 称为 Gauss 测度.

对于 X 值 R.V. ξ, 以

$$\varphi_\xi(x^*) = E\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x^*,\xi)}, \quad r_\xi(x^*,y^*) = E(x^*,\xi)(y^*,\xi)$$

分别表示 ξ 的特征泛函和协方差泛函, 其中 $x^*, y^* \in X^*$. 特别地, 称 $r_\xi(x^*,x^*) = E(x^*,\xi)^2$ 为 ξ 的方差. 若 ξ 中心化为 Gauss R.V., 则

$$\varphi_\xi(x^*) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r_\xi(x^*,x^*)}, \quad \forall x^* \in X^*. \tag{4.3}$$

而 $r_\xi(x^*,x^*)$ 是 $X^*\times X^*$ 上的正定二次型. 反过来, 若 $\varphi_\xi(x^*)$ 可以以上述方式用一个正定二次型表示, 则 ξ 一定是一个 Gauss R.V.. 对于一个 Gauss 测度 μ, 定义其均值与特征泛函为

$$\int_X x\mu(\mathrm{d}x), \quad \mu(x^*) = \int_X \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x^*,x)}\mu(\mathrm{d}x), \quad \forall x^*\in X^*. \tag{4.4}$$

在第 3 章我们曾用到过 $(X, B(X))$ 上全体正测度集合 $C_a^+(X)$ 上的一种弱拓扑. 设 $\{\mu_\lambda, \lambda\in \Lambda\}$ 是此集合中的一个网, 则

$$\mu_\lambda \xrightarrow{w} \mu \Leftrightarrow \lim_{\lambda\in\Lambda}\int_X f\mathrm{d}\mu_\lambda = \int_X f\mathrm{d}\mu, \quad \forall\, f\in C(X), \tag{4.5}$$

其中 $C(X)$ 是 X 上连续函数全体. 实际上 $C_a^+(X)$ 是完备度量空间, 若 μ_λ 和 μ 分别是相应的 R.V. 生成的, 则上述收敛性即相当于依分布收敛. 因此又记 $\mu_\lambda \xrightarrow{w} \mu$ 为 $\mu_\lambda \xrightarrow{\propto} \mu$.

我们知道, 一个 Borel 测度称为是 Radon 测度, 若 $\forall B \in B(X)$,

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B \text{ 是紧集}\}. \tag{4.6}$$

我们还定义过胎紧测度 (3.2 节), 一个正则 Borel 胎紧测度必是 Radon 测度. 在 X 是可分空间的情况, 每个 R.V. 产生的测度 μ 都是胎紧的. 称 $C_a^+(X)$ 的子集 Γ 是一致胎紧的, 若 $\forall \varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset X$ 使得

$$\mu(X \backslash K) < \varepsilon, \quad \forall\, \mu \in \Gamma.$$

Prokholov 证明了: $\{\mu_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset C_a^+(X)$ 在此弱拓扑下相对紧当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 X 中的紧集 K 使得对于所有 $\lambda \in \Lambda, \mu_\lambda(K) \geqslant 1 - \varepsilon$. Ito 与 Nisio 还证明了, 对于独立 R.V. 序列 (d_n), 若 $S_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$, 则 μ_{s_n} 弱收敛于 μ_s 当且仅当 $S_n \to S$ a.e.. 这一结果我们将会用到.

引理 1　设 $0 < p < \infty, (\xi_n)$ 是独立 R.V. 序列, $\xi^* < \infty$ a.e., 则

(i) $\forall a > 0$,

$$P(\xi^* \leqslant a) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{\|\xi_n\| > a\}} \|\xi_n\|^p \mathrm{d}P \leqslant E\, \|\xi^*\|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} E\, \|\xi_n\|^p; \tag{4.7}$$

(ii) $E(\xi^*)^p < \infty$ 当且仅当存在 $a > 0$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\, \|\xi_n\|^p\, \chi_{\{\|\xi_n\| > a\}} < \infty. \tag{4.8}$$

证明　1° 右端是显然的. 为证左端, 定义 $\tau = \inf\{n : \|\xi_n\| > a\}$, 由于 $\forall n, \|\xi_n\|^p \leqslant (\xi^*)^p$, 故

$$E(\xi^*)^p \geqslant E\, \|\xi_\tau\|^p\, \chi_{\{\tau < \infty\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{\tau = n\}} \|\xi_n\|^p\, \mathrm{d}P,$$

但 $\{\tau = n\} = \{\xi_{n-1}^* \leqslant a\} \cap \{\|\xi_n\| > a\}$, 所以由独立性

$$\begin{aligned}
\int_{\{\tau = n\}} \|\xi_n\|^p \mathrm{d}P &= \int_{\{\xi_{n-1}^* \leqslant a\} \cap \{\|\xi_n\| > a\}} \|\xi_n\|^p \mathrm{d}P \\
&= \int_{\{\|\xi_n\| > a\}} \chi_{\{\xi_{n-1}^* \leqslant a\}}\, \|\xi_n\|^p \mathrm{d}P \\
&= P(\xi_{n-1}^* \leqslant a) \int_{\{\|\xi_n\| > a\}} \|\xi_n\|^p \mathrm{d}P \\
&\geqslant P(\xi^* \leqslant a) \int_{\{\|\xi_n\| > a\}} \|\xi_n\|^p \mathrm{d}P,
\end{aligned}$$

代入上式即得到 (4.7).

2° 若 $E(\xi^*)^p<\infty$, 取 $a>0$ 使 $P(\xi^*>a)<1/2$. (4.7) 左端说明

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\|\xi_n\|^p\chi_{\{\|\xi_n\|>a\}}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{\|\xi_n\|>a\}}\|\xi_n\|^p\,\mathrm{d}P\leqslant 2E(\xi^*)^p<\infty.$$

反过来, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E\|\xi_n\|^p\chi_{\{\|\xi_n\|>a\}}<\infty$, 则

$$\begin{aligned}E(\xi^*)^p=&\int_0^a P(\xi^*>t)\mathrm{d}t^p+\int_a^{\infty}P(\xi^*>t)\mathrm{d}t^p\\ \leqslant&\ a^p+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{\infty}P(\|\xi_n\|>t)\mathrm{d}t^p\\ =&\ a^p+\sum_{n=1}^{\infty}E\|\xi_n\|^p\chi_{\{\|\xi_n\|>a\}}<\infty.\end{aligned}$$

实际上, (4.7), (4.8) 都是对于 $\Phi(t)=t^p$ 得到的. 若考虑 $\Phi(t)\equiv 1$, 即可得到 $\xi^*<\infty$ a.e. 当且仅当存在 $a>0$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(\|\xi_n\|>a)<\infty$.

引理 2 设 X 是 Banach 空间, $x_n\in X, n\geqslant 1, (\xi_n)$ 是实值相互独立标准 Gauss 序列使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i x_i$ a.e. 收敛, 则序列 $\sum\limits_{i=1}^{n}r_i x_i$ a.e. 在 $L^2([0,1],\mu,X)$ 中收敛.

证明 显然 $\xi^*=\sup\limits_n\|\xi_i x_i\|<\infty$ a.e., 此时必有 $K=\sup\limits_n\|x_n\|<\infty$. 由引理 1, 存在 $a>0$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(\|\xi_n x_n\|>a)<\infty$, 我们证明 $E(\xi^*)^2<\infty$. 为此取 $b>0$ 使 $t>b$ 时, $t^2\leqslant \mathrm{e}^t$ 并且 $b>a+K^2$. 由正态分布定义

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}E(\|\xi_n x_n\|^2\chi_{\{\|\varepsilon_n x_n\|>b\}}=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\|x_n\|}\int_b^{+\infty}t^2\exp(-t^2/2\,\|x_n\|^2)\mathrm{d}t\\ \leqslant&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\mathrm{e}^{\|x_n\|^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,\|x_n\|}\int_b^{+\infty}\exp[-(t-\|x_n\|)^2/2\,\|x_n\|^2]\mathrm{d}t\\ \leqslant&\ \mathrm{e}^{K^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\|x_n\|}\int_{b-K^2}^{+\infty}\exp(-u^2/2\,\|x_n\|^2)\mathrm{d}u\\ \leqslant&\ 2\mathrm{e}^{K^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{+\infty}\exp(-u^2/2\,\|x_n\|^2)\mathrm{d}(u/\,\|x_n\|)\\ =&\ 2\mathrm{e}^{K^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}P(\|\xi_n x_n\|>a)<\infty.\end{aligned}$$

仍由引理 1 得出 $E(\xi^*)^2 < \infty$.

由 4.2 节定理 4 及其推论, $\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i$ 在 $L^2(X)$ 中收敛, 由 4.2 节定理 6, $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ 在 $L^2(X)$ 中收敛.

下面引理是由 LeCam[140] 证明的, 这里仅引述其结论.

引理 3　设 (X,τ) 是 Hausdorff 拓扑空间, 集合 $F\subset C(X)$ 在 X 上可分点并且当 $f,g\in F$ 时, $fg\in F$. 若 $\{\mu_n\}$ 和 μ 是 X 上的 Radon 测度, 使得 $\forall\, f\in F$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=\int_X f(x)\mu(\mathrm{d}x), \tag{4.9}$$

则 $\mu_n \xrightarrow{F.w} \mu$, 这里 $F.w$ 拓扑是 X 上使每个 $f\in F$ 连续的最弱拓扑.

现在考虑 X 值的独立同分布序列 (d_n), 不妨记 $d_1=d$, 考虑

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}d_j, \tag{4.10}$$

由实值情况的中心极限定理, 若 $Ed=0, E\|d\|^2<\infty$, 则 $x^*\mu_{U_n}$ 依分布收敛于 $N(0,r(x^*,x^*))(\forall x^*\in X^*)$, 从而作为特征函数

$$E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x^*,U_n\rangle}\to \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}r(x^*,x^*)},\quad \forall x^*\in X^*.$$

因此若 U_n 依分布收敛于 μ, μ 必是一个以 $r(x^*,x^*)$ 为方差的中心化 Gauss 测度.

称一个满足 $Ex^*(\xi)=0, E(x^*(\xi))^2<\infty$ $(\forall x^*\in X^*)$ 的 R.V. ξ 是预 Gauss 的, 若存在 Gauss R.V. η 使得

$$E\eta=0,\quad E(x^*(\xi))^2=E(x^*(\eta))^2,\quad \forall x^*\in X^*.$$

我们将以 $G(\xi)$ 表示与预 Gauss R.V. ξ 相应的 Gauss R.V..

引理 4　设 ξ 是 X 值预 Gauss R.V., 则 $\forall\eta$, 若

$$Ex^*(\eta)=0,\quad E(x^*(\eta))^2\leqslant E(x^*(\xi))^2,\quad \forall x^*\in X^*,$$

则 η 也是预 Gauss 的并且对于任何 $p>0$,

$$E\|G(\eta)\|^p\leqslant 2E\|G(\xi)\|^p. \tag{4.11}$$

证明　设 $\{h_i\}$ 是标量值函数空间 $L_2(\mu)$ 中的规范正交基, $\{\theta_i\}$ 是正交 Gauss 序列, $G_n=\sum_{i=1}^{n}\theta_i E(h_i\eta)$, 则 $\forall x^*\in X^*$,

$$\begin{aligned}E(x^*(G_n))^2&=E\sum_{i=1}^{n}\theta_i^2(E(h_i x^*\eta))^2\\&\leqslant E(x^*(\eta))^2\leqslant E(x^*(\xi))^2=E(x^*(G(\xi)))^2.\end{aligned}$$

注意此时 Gauss R.V. 序列 G_n 生成的测度是胎紧的并且

$$E(x^*(G_n))^2 \to E(x^*(\eta))^2. \tag{4.12}$$

所以由 Ito-Nisio[130] 定理, G_n a.e. 收敛于一个 R.V., 记为 $G(\eta)$, 极限是唯一的并且 $E(x^*G(\eta))^2 = E(x^*(\eta))^2$. 同时 $\forall t > 0$, 由 (4.12),

$$P(\|G(\eta)\| > t) \leqslant 2P(\|G(\xi)\| > t),$$

所以 $\forall p > 0$, (4.11) 成立.

定理 1 (Hoffmann-Jørgensen, Pisier) 设 X 是可分 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) X 是 2 型空间;

(ii) 每个 $d \in L_2(X), Ed = 0$ 是预 Gauss 的;

(iii) 对于每个 $d \in L_2(X), Ed = 0$, 与 d 独立同分布的 R.V. 序列 (d_n) 满足中心极限定理. 即存在中心化 Gauss 测度 μ 使得 $U_n \overset{\propto}{\to} \mu$.

证明 根据实值情况的结论, (iii)⇒(ii) 是明显的. 实际上此时

$$r(x^*, x^*) = r_d(x^*, x^*) = E\langle x^*, d\rangle^2.$$

(ii)⇒(i). $\forall x_n \neq 0$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 = 1$, 令 $\lambda_n = \|x_n\|^2, y_n = x_n/\|x_n\|$, 则概率测度

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{2}(\delta_{y_n} + \delta_{-y_n})$$

具有 0 均值并且 2 阶矩为 1, 此外

$$\int_X \langle x^*, x\rangle \mu(\mathrm{d}x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x^*, x_n\rangle^2 < \infty.$$

由 (ii), 存在 Gauss 测度 γ, 使得 $\gamma(x^*) = \exp\left(-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x^*, x_n\rangle^2/2\right)$. 若 η_n 是独立标准 Gauss R.V. 序列, $\xi_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j x_j$, 则

$$E\exp(\mathrm{i}\langle x^*, \xi_n\rangle) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \langle x^*, x_j\rangle^2/2\right) \to \exp(-r(x^*, x^*)/2).$$

根据特征函数与分布函数收敛的关系, 此时 $\mu_{\xi_n} \overset{\propto}{\to} \mu$, 于是 Ito-Nisio[130] 定理说明 ξ_n a.e. 收敛, 从而随机有界. 记 $d^* = \sup\limits_n |\xi_n|$, 由引理 2, $E(d^*)^2 < \infty$, 从而由 4.2 节

定理 4, $E(\xi^*)^2 < \infty$. 由 4.2 节定理 6, $\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \in B_r(X)$. 总之当 $(x_n) \in l_2(X)$ 时, $(x_n) \in B_r(X)$, 所以 X 是 2 型空间.

(i)⇒ (iii). 设 $\mu = \mu_d$, 以 $B(X)$ 记 X 中的 Borel 集族, 取以 $B(X)$ 为指标集的随机过程 $(W(A), A \in B(X))$ 满足:

(a) $\forall A_1, \cdots, A_n \in B(X)$, $(W(A_1), \cdots, W(A_n))$ 是中心化 n 维正态分布.

(b) $EW(A)W(B) = \mu(A \cap B), \forall A, B \in B(X)$.

实际上可以验证 $W(\cdot)$ 是 $L_2(P)$ 值的向量测度, 因此可以定义函数 $f: X \to X$ 的随机积分

$$\int_X f(x)W(\mathrm{d}x). \tag{4.13}$$

例如, 对于简单函数

$$\int_X \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{A_j}\right) W(\mathrm{d}x) = \sum_{j=1}^{n} x_j W(A_j),$$

然后再以范数

$$\|f\| = \left(\int_X \|f(x)\|^2 \mu(\mathrm{d}x) + E\left\|\int_X f(x)W(\mathrm{d}x)\right\|^2\right)^{1/2} \tag{4.14}$$

完备化, 记此空间为 $L_X^2(W)$, 它是 $L_2(\mu, X)$ 的子空间.

我们证明若 X 是 2 型空间, 则 $L_X^2(W) = L_2(\mu, X)$. 实际上若 $f = \sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{A_j}$, 其中 A_i 互不相交, 则 $W(A_1), \cdots, W(A_n)$ 相互独立, 均值为 0, 方差为 $\mu(A_1), \cdots, \mu(A_n)$, 于是由 2 型性质, 存在 $C > 0$ 使得

$$\begin{aligned} E\left\|\int_X f\mathrm{d}W\right\|^2 &= E\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j W(A_j)\right\|^2 \leqslant C\sum_{j=1}^{n} E\|x_j W(A_j)\|^2 \\ &= C\sum_{j=1}^{n} E\|x_j\|^2 \mu(A_j) = C\int_X \|f\|^2 \mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{4.15}$$

这说明 $f| \to \int_X f\mathrm{d}W$ 是连续线性映射从而可以有界延拓到整个 $L_X^2(\mu)$ 上并且范数 (4.14) 可以采用同构范数 $\int_X \|f\|^2 \mathrm{d}\mu$. 此时对于简单函数 f,

$$E\exp\mathrm{i}\left\langle x^*, \int f\mathrm{d}W\right\rangle = E\prod_{j=1}^{n} \exp\mathrm{i}\langle x^*, x_j\rangle W(A_j)$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\langle x^*, x_j\rangle^2\mu(A_j)\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\int\langle x^*, f\rangle^2 \mathrm{d}\mu\right],
\end{aligned}
$$

此式对于一般 $f \in L_X^2(\mu)$ 也成立. 由于 $W(\cdot)$ 是 $L^2(P)$ 值测度, 故积分 $\int_X f\mathrm{d}W$ 是 $L_X^2(P)$ 中的元素, 因此上述映射又可看作 $L_X^2(\mu) \to L_X^2(P)$ 的映射, 记之为 T.

现在, 由于 $f(x) = x$ 是 $L_X^2(\mu)$ 中元并且 $U = Tf$ 是 X 值 Gauss R.V., 取简单函数列 f_k 使得

$$\int_X f_k\mu(\mathrm{d}x) = 0, \quad \|f - f_k\| \leqslant 2^{-(k+1)} \tag{4.16}$$

(由 f 的对称性, 这可以做到). 若 d_n 是与 μ 同分布的独立 R.V., 定义

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} d_i, \quad \xi_{nk} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} f_k(d_j), \quad U_k = Tf_k,$$

根据有限维空间的中心极限定理, $\mu_{\xi_{nk}} \xrightarrow{\propto} \mu_{U_k} (k \geqslant 1)$, 由 2 型空间的性质

$$
\begin{aligned}
E\|\xi_{nk} - \xi_n\| &\leqslant (E\|\xi_{nk} - \xi_n\|^2)^{1/2} \\
&\leqslant \left(Cn^{-1}\sum_{j=1}^{n} E\|d_j - f_k(d_j)\|^2\right)^{1/2} \\
&= C^{\frac{1}{2}}\|f - f_k\|_2 \leqslant C^{\frac{1}{2}}2^{-(k+1)}.
\end{aligned}
$$

由 (4.15) 知道

$$E\|U_k - U\| \leqslant C^{\frac{1}{2}}2^{-(k+1)}, \quad \forall k \geqslant 1. \tag{4.17}$$

若 $\varphi: X \to R$ 是有界 Lipschitz 函数: $\exists K > 0$ 使得

$$|\varphi(x)| \leqslant K, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

上面估计给出

$$
\begin{aligned}
|E\varphi(\xi_n) - E\varphi(U)| &\leqslant |E\varphi(\xi_n) - E\varphi(\xi_{nk})| \\
&\quad + |E\varphi(\xi_{nk}) - E\varphi(U_k)| + |E\varphi(U_k) - E\varphi(U)| \\
&\leqslant KC^{\frac{1}{2}}2^{-k} + |E\varphi(\xi_{nk}) - E\varphi(U_k)|.
\end{aligned}
$$

由此

$$\lim_{x\to\infty} E\varphi(\xi_n) = E\varphi(U),$$

φ 可以是任一有界 Lipschitz 函数, 这种函数的全体 F 在 $C(X)$ 中可分点, 故 $\xi_n \xrightarrow{F.w} U$. 但直接验证可知这种拓扑与 $C(X)$ 中拓扑是等价的, 所以必有 $\xi_n \xrightarrow{C(X).w} U$, 即 $\xi_n \xrightarrow{\propto} U$. U 是 Gauss 测度, 取 $\mu = U$ 则知 (iii) 成立.

定理 2 设 X 是 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) X 是 2 余型空间;

(ii) 每个取值于 X 的预 Gauss R.V. 满足 $E||d||^2 < \infty$, 此时存在 $C > 0$ 使得

$$E||d||^2 \leqslant CE||G(d)||^2; \tag{4.18}$$

(iii) 每个预 Gauss R.V. 满足中心极限定理.

证明 (i)⇒(ii). 假定空间是 2 余型的, 若 $\{\xi_n\}$ 是独立、标准 Gauss R.V. 序列, $\{x_n\} \subset X$, 则

$$\sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2 \leqslant CE\sum_{j=1}^{n} ||\xi_j x_j||^2. \tag{4.19}$$

若 d 是预 Gauss 的, 对于 $t > 0$, 令 $\eta = \varepsilon d\chi_{\{||d|| \leqslant t\}}$, 其中 ε 是与 d 独立的 Rademacher 函数, η 的相关 Gauss R.V. 是 $G(d)$, 由引理 4, η 也是预 Gauss 的, 并且

$$E||G(\eta)||^2 \leqslant 2E||G(d)||^2. \tag{4.20}$$

对于 η, 存在增加的有限 σ 代数 B_n 使得 a.e. 或者以 $L_2(\mu, X)$ 范数

$$\eta_n = E(\eta|B_n) \to \eta.$$

η_n 是有限值的, 不妨设 $\eta_n = \sum_{j=1}^{k_n} x_j\chi_{A_j}$, 其中 A_j 互不相交, 则

$$G(\eta_n) = \sum_{j=1}^{k_n} \xi_j P(A_j)^{\frac{1}{2}} x_j, \quad E||\eta_n||^2 = \sum_{j=1}^{k_n} ||x_j||^2 P(A_j),$$

于是

$$E||\eta_n||^2 \leqslant CE||G(\eta_n)||^2 \leqslant CE||G(\eta)||^2 \leqslant 2CE||G(d)||^2,$$

从而 $E||\eta_n||^2 \leqslant CE||G(d)||^2$. t 是任意的, 最后

$$E||d||^2 \leqslant CE||G(d)||^2 < \infty.$$

(ii)⇒(iii). 设 d 是预 Gauss 的, 由 (ii),$E||d||^2 \leqslant CE||G(d)||^2 < \infty$, 注意 $\forall n$, $S_n/\sqrt{n}$ 也是预 Gauss 的并且与之相应的 Gauss R.V. 也是 $G(d)$:

$$E(S_n/\sqrt{n})^* = 0,$$
$$E(x^*(S_n/\sqrt{n}))^2 = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} x^*(d_i)x^*(d_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x^*(d_j))^2 = (x^*(d))^2.$$

于是

$$\sup_{n\geqslant 1} E\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} E\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\|_2 \leqslant C^{\frac{1}{2}}(E||G(d)||^2)^{1/2}.$$

仍设 (B_n) 是递增有限 σ 代数序列, 使得 $d_n = E(d|B_n) \to d$, a.e. 并且以 $L^2(\mu, X)$ 范数成立, 对于每个 $n, d-d_n$ 是预 Gauss 的, 由于

$$E(x^*(d-d_n))^2 \leqslant 2E(x^*(d))^2 \leqslant 2E(x^*(G(d)))^2, \quad \forall x^* \in X^*, \tag{4.21}$$

$G(d)$ 胎紧, 所以 $d-d_n$ 胎紧, 由于 $E(x^*(d-d_n))^2 \to 0$, 故 $G(d-d_n)$ 只可能收敛于 0. 对于 $\varepsilon > 0$, 取 n_0 使

$$E||G(d-d_0)||^2 < C^{-1}\varepsilon^2,$$

若 $\tilde{S}_n$ 是与 $d-d_{n_0}$ 同分布的独立 R.V. 序列的部分和, 则

$$\sup_{n\geqslant 1} E\left\|\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}}\right\| < \varepsilon. \tag{4.22}$$

根据有限维空间的中心极限定理和 $Ca^+(X)$ 中序列相对弱紧的条件可知 $\sup\limits_{n\geqslant 1} E\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\| < \varepsilon$. 与定理 1 的证明一样可得到 $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \overset{\propto}{\to} U$, U 具有 Gauss 分布. 于是 d 满足中心极限定理.

(iii)⇒(i). 若 d 满足中心极限定理, 显然

$$\frac{S_n}{n} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ a.e.},$$

从而 $Ed = 0$(或者由实值的结论转化而得到). 若 $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ 的极限是 G, G 是 Gauss R.V., 从而 $E||G||^2 < \infty$. 不妨设 d 是对称的, $\forall t > 0$, 此时

$$\sup_{n\geqslant 1} P\left(\frac{||S_n||}{\sqrt{n}} > t\right) \leqslant P(||G|| \geqslant t).$$

从而存在 $t_0(\geqslant 3)$ 使得 $P(||G|| \geqslant t_0) \leqslant \varepsilon t_0^{-2}(0 < \varepsilon \leqslant 1)$, 故 $\exists n_0$ 使得当 $n \geqslant n_0$ 时

$$P\left(\frac{||S_n||}{\sqrt{n}} > t_0\right) \leqslant 2\varepsilon t_0^{-2}.$$

由 Levy 不等式与独立性得到

$$\begin{aligned} nP(||d|| > t_0\sqrt{n}) &= P(\max_{j\leqslant n} ||d_j|| > t_0\sqrt{n}) \\ &\leqslant 2P(||S_n|| > t_0\sqrt{n}) \leqslant 4\varepsilon t_0^{-2}. \end{aligned}$$

取 $t \geqslant t_0$ 并且 $t_0\sqrt{n} \leqslant t \leqslant t_0\sqrt{n+1}$, 则

$$t^2 P(||d|| > t) \leqslant t^2 P(||d|| > t_0\sqrt{n}) \leqslant \frac{t^2}{n} 4\varepsilon t_0^{-2} \leqslant 8\varepsilon,$$

于是 $\lim\limits_{t\to\infty} t^2 P(||d|| > t) = 0$. 对于 $0 < p < 2$, 不妨设 $t \geqslant t_0$ 时, $t^2 P(||d|| > t) < 1$, 此时

$$\begin{aligned} E||d||^p &= \int_0^\infty P(||d|| > t)\mathrm{d}t^p \\ &= \int_0^{t_0} P(||d|| > t)\mathrm{d}t^p + \int_{t_0}^\infty P(||d|| > t)\mathrm{d}t^p \\ &\leqslant t_0^p + \int_{t_0}^\infty \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t^p = t_0^p + \frac{p}{p-2} t_0^{p-2} < \infty. \end{aligned}$$

现在, 若每个预 Gauss R.V. 都满足中心极限定理, 记

$$C_G(X) = \left\{ x = (x_n) \in X^\infty : x_n \in X, \sum_{n=1}^\infty \xi_n x_n \text{ a.e. 收敛} \right\}, \tag{4.23}$$

其中 $\{\xi_n\}$ 是对称 Gauss R.V., 由引理 2, 实际上 $\sum\limits_{n=1}^\infty \xi_n x_n$ 以 $L^2(\mu, X)$ 范数收敛, 设 $g = \sum\limits_{n=1}^\infty \xi_n x_n$, 则 g 的协方差泛函是

$$r_g(x^*, y^*) = Ex^*(g)y^*(g) = \sum_{n=1}^\infty x^*(x_n)y^*(x_n), \quad \forall x^*, y^* \in X^*.$$

记 $r = 2(2-p)^{-1}$, 设 $\{\alpha_n\}$ 是一列正数, $\sum\limits_{n=1}^\infty \alpha_n^r = 1$, 定义 d 使得

$$P(d = \pm\alpha_n^{\frac{1-r}{p}} x_n) = \alpha_n^r/2, \quad n \geqslant 1,$$

则 d 是 X 值 R.V., 其协方差与 g 相同 ($G(d) = g$),

$$\begin{aligned} r_d(x^*, y^*) &= Ex^*(d)y^*(d) \\ &= \sum_{n=1}^\infty x^*(x_n)y^*(x_n)\alpha_n^{\frac{2(1-r)}{p}} \alpha_n^r = \sum_{n=1}^\infty x^*(x_n)y^*(x_n). \end{aligned}$$

上述证明表明 $E||d||^p < \infty$. 实际计算知道

$$E||d||^p = \sum \alpha_n^{1-r}||x_n||^p \alpha_n^r = \sum \alpha_n ||x_n||^p < \infty,$$

α_n 是任意的, 故最后有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty$.

注意 $C_g(X)$ 是以 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\left(E\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}g_ix_i\right\|^2\right)^{1/2}$ 为范数的 Banach 空间. 考虑映射 $I:C_G(X)\to l_2(X)$, 上述证明表明 I 有闭图像, 于是 $\exists C>0$,

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C\left(E\left\|\sum_{i=1}^{\infty}g_ix_i\right\|^2\right)^{1/2},\quad \forall (x_i)\in C_G(X). \tag{4.24}$$

由引理 2, $E(\sup\limits_{n\geqslant 1}|\xi_n|)^2<\infty$. 再由 ξ_i 的对称性和 4.2 节定理 6 得出

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C\left(E\left\|\sum_{i=1}^{\infty}r_i|\xi_i|x_i\right\|^2\right)^{1/2}\leqslant C'\left(E\left\|\sum_{i=1}^{\infty}r_ix_i\right\|^2\right)^{1/2},$$

所以 X 是 2 余型空间.

定理 3 设 X 是 Banach 空间, 则以下两条等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间;

(ii) 对于任何 X 值 R.V.d, d 满足中心极限定理当且仅当 $Ed=0, E\|d\|^2<\infty$.

证明 (i)⇒(ii). 若 X 同构于 Hilbert 空间, 则 X 即是 2 型又是 2 余型的. 于是由定理 1(iii), $Ed=0, E\|d\|^2<\infty$.

(ii)⇒(i). 注意每个满足中心极限定理的 R.V. 是预 Gauss 的, 从而由定理 2 知道 X 是 2 余型的. 又由定理 1, X 是 2 型的, 由 Kwapien 定理, X 同构于 Hilbert 空间.

现在让我们转到重对数率.

设 $\{d_i\}$ 是 0 均值独立 R.V. 序列, $E\|d_i\|^2<\infty$, $s_n^2=\sum\limits_{i=1}^{n}E\|d_i\|^2$ 并且 $s_n\to\infty$. 对于实值 R.V., Kolmogorov 证明了若存在正数序列 $\eta_n\to 0$ 使得 $\|d_i\|_\infty\leqslant\dfrac{\eta_is_i}{\sqrt{L_2s_i^2}}$ $(i\geqslant 1)$, 则以概率 1,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{(2s_n^2L_2s_n^2)^{1/2}}=1.$$

这里 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}d_i, L_2t=L(Lt), Lt=\log(t\vee 1)$.

对于同分布的情况, Hartman 与 Wintner 证明了 d 满足重对数率当且仅当 $Ed=0$ 并且 $Ed^2=\sigma^2<\infty$. 此时有

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2nL_2n}}=\sigma\right)=P\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2nL_2n}}=-\sigma\right)=1. \tag{4.25}$$

Strassen 进一步证明了

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} d\left(\frac{S_n}{\sqrt{2nL_2n}},[-\sigma,\sigma]\right)=0\right)=1,$$
$$P\left(C\left\{\frac{S_n}{\sqrt{2nL_2n}}\right\}=[-\sigma,\sigma]\right)=1, \tag{4.26}$$

其中 $d(x,K)=\inf\{|x-y|:y\in K\}$, 即 x 到 K 的距离. $C\{x_n\}$ 表示序列 (x_n) 的聚点全体.

对于 Banach 空间值 R.V., 有关结论要复杂得多. 首先类似于 (4.25) 的上下极限不再有意义. (4.26) 中的集合 $[-\sigma,\sigma]$ 现在应具有何种形式? 其次 $Ed=0$ 和 $E\|d\|^2<\infty$ 能否保证有某种形式的结论成立? 这些表达式或结论都可能而且也应该反映出 Banach 空间的相应性质. 事实上, 大致说来我们有两种形式的重对数率.

称 R.V.d 满足有界重对数率: 若对于 d 的独立 copy 序列,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|S_n\|}{\sqrt{2nL_2n}}<\infty \quad \text{a.e.}, \tag{4.27}$$

记为 $d\in$BLIL.

称 d 满足紧重对数率: 若存在紧集 $K\subset X$ 使得

$$P\left(C\left\{\frac{S_n}{\sqrt{2nL_2n}}\right\}\subset K\right)=1, \tag{4.28}$$

记为 $d\in$CLIL.

通常记 $a_n=\sqrt{2nL_2n},\quad n\geqslant 1.$

Ledoux 与 Talagrand[142,143] 给出 B 值情况重对数率的等价条件.

定理 4 设 d 是 X 值 R.V. , 则 $d\in$BLIL 当且仅当:

(i) $E(\|d\|^2/L_2\|d\|)<\infty$;

(ii) 对于每个 $x^*\in X^*, Ex^*(d)=0, E(x^*(d))^2<\infty$;

(iii) $\{S_n/\sqrt{2nL_2n}\}$ 随机有界.

$d\in$CLIL 当且仅当上面 (i) 与以下两条成立:

(ii′) 对于每个 $x^*\in X^*, Ex^*(d)=0, \{(x^*(d))^2:\ \|x^*\|\leqslant 1\}$ 一致可积;

(iii′) $S_n/\sqrt{2nL_2n}\to 0$ 依概率收敛.

这是一个十分漂亮的结论, 它把以往的多个结论作为特例. 这一结论对于任何 Banach 空间都是成立的. 这里不准备叙述它的证明, 我们将集中地叙述受控于空间性质的结果. 不过为了理解有关条件, 我们有如下命题.

命题 1 (1) 若 d 满足重对数率, 则 $x^*(d)$ 满足重对数率;

(2) $d\in$BLIL, 则 $E(\|d\|^2/L_2\|d\|)<\infty$.

证明 (1) 是显然的, 我们证明 (2). 若 d ∈BLIL, 则 $\tilde{d}^* = \sup\limits_{n\geqslant 1}(||d_n||/a_n) < \infty$ a.e., 取 $t>0$ 使得 $P(\tilde{d}^*>t)\leqslant 1/2$, 类似于引理 1 的证明可知

$$P(\tilde{d}^*\leqslant t)\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\{||d_n||>a_nt\}}\chi_{\{||d_n||>a_nt\}}\mathrm{d}P\leqslant E\chi_{\{\tilde{d}^*>t\}}=P(\tilde{d}^*>t)\leqslant\frac{1}{2}, \tag{4.29}$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(||d_n||>a_nt)\leqslant 1$. 令 $\varphi(t)=t^2/L_2t$, 由 $\varphi(t)$ 的递增性,

$$\begin{aligned}\varphi(t||d||)&=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(t||d||)\chi_{\{ka\leqslant\varphi(t||d||)<(k+1)a\}}\\&\leqslant a+a\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\chi_{\{ka\leqslant\varphi(t||d||)<(k+1)a\}}\\&\leqslant a+a\sum_{k=0}^{\infty}\chi_{\{\varphi(t||d||)>ka\}},\end{aligned}$$

这里 a 是使 $L_2a_n\leqslant a_n$ 的正数, 于是

$$\begin{aligned}E\varphi(\varepsilon||d||)&\leqslant a+a\sum_{k=0}^{\infty}P(\varphi(\varepsilon||d||)\geqslant ka)\\&\leqslant a+a\sum_{k=0}^{\infty}P(\varphi(\varepsilon||d||)\geqslant\varphi(a_k))\\&\leqslant a+a\sum_{k=0}^{\infty}P((\varepsilon||d||)\geqslant a_k)\\&=a+a\sum_{k=0}^{\infty}P(||d_k||\ \geqslant\varepsilon^{-1}a_k).\end{aligned} \tag{4.30}$$

取 (4.29) 中的 $t=\varepsilon^{-1}$, 则 (4.29), (4.30) 给出 $E\varphi(\varepsilon||d||)<\infty$. 由 $\varphi(t)$ 的定义, 这相当于 $E(||d||^2/L_2||d||)<\infty$. 命题得证.

对于固定的 R.V. d, 若 $Ex^*(d)=0, E(x^*(d))^2<\infty(\forall x^*\in X^*)$. 考虑算子 $A: X^*\to L_2(P), x^*\to x^*(d)$, 则 A 是闭算子从而是有界线性算子. A 的范数是 $||A||=\sup\limits_{||x^*||\leqslant 1}[E(x^*(d))^2]^{1/2}$, 记后者为 $\sigma(d)$. 于是共轭算子 $A^*: L_2(P)\to X^{**}$ 也是有界的. 由于 X 可分, 故 X 中存在紧集序列 K_n 使得 $P(d\notin K_n)\to 0$. 对于 $\xi\in L_2(P)$,

$$\langle x^*, A^*\xi\chi_{\{d\in K_n\}}\rangle=\langle Ax^*,\xi\chi_{\{d\in K_n\}}\rangle=Ex^*(d)\xi\chi_{\{d\in K_n\}},$$

x^* 是任意的, 故 $A^*\xi\chi_{\{d\in K_n\}} = E\xi d\chi_{\{d\in K_n\}}$, 后者是 X 中元. 由 $E\xi d\chi_{\{d\in K_n\}}$ 收敛于 $E\xi d$ 知道 $A^*\xi \in X$, 即 $A^*(L_2) \subset X$.

在 $A^*(L_2)$ 上定义内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_d$ 使得 $x, y \in A^*(L_2)$ 并且 $x = A^*\xi, y = A^*\eta$ 时, $\langle x, y\rangle_d = \int_\Omega \xi\eta \mathrm{d}P$. 容易验证此内积不因 ξ 或 η 的选取而改变. 称 $A^*(L_2)$ 上赋于这种内积的空间为 d 的再生核 Hilbert 空间, 记为 H_d, 其闭单位球记为 K_d.

当 $x = A^*\xi = E\xi d$ 时, $x^*(x) = E\xi x^*(d), \xi \in L^2$, 由上述定义 $\|x\|_d = \langle x, x\rangle_d^{1/2} = \|\xi\|_2$, 从而

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} x^*(x) = \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} |E\xi x^*(d)| \\ &\leqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \left(\int_\Omega |x^*(d)|^2 \mathrm{d}P\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\xi|^2 \mathrm{d}P\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sigma(d)\|x\|_d.\end{aligned}$$

命题 2 (1) K_d 紧当且仅当 $\{x^*(d)^2 : \|x^*\| \leqslant 1\}$ 一致可积;

(2) d 是预 Gauss 的, 则 K_d 相对紧.

证明 1° 若 K_d 紧, 则 A 是紧算子, 从而 $S = A^*A : X \to X^{**}$ 是紧算子, 并且协方差函数 $r_d : X^* \times X^* \to R$, $r_d(x^*, y^*) = Ex^*(d)y^*(d)$ 是弱序列连续的. 为此只须证明当 $x_n^* \xrightarrow{w} 0$ 时, $\|x_n^*(d)\|_2 \to 0$. 实际上由共鸣定理不妨设 $\|x_n^*\| \leqslant 1$, 则序列

$$\begin{aligned}Ex_n^*(d)^2 &= \langle x_n^*(d), x_n^*(d)\rangle = \langle Ax_n^*, Ax_n^*\rangle \\ &= \langle A^*Ax_n^*, x_n^*\rangle \leqslant \|A^*Ax_n^*\|.\end{aligned}$$

A^*A 是紧算子, x_n^* 弱收敛于 0, 故 $A^*Ax_n^*$ 范数收敛于 0.

若 $\{x^*(d)^2 : \|x^*\| \leqslant 1\}$ 不是一致可积的, 则存在 $\varepsilon > 0$ 和 $C_n \uparrow \infty$ 使得

$$\sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \int_{\{\|d\|>C_n\}} (x^*(d))^2 \mathrm{d}P > \varepsilon, \tag{4.31}$$

从而必有 $\|x_n^*\| \leqslant 1$ 使得

$$\int_{\{\|d\|>C_n\}} (x_n^*(d))^2 \mathrm{d}P > \varepsilon. \tag{4.32}$$

由于 X^* 的单位球是 w^* 紧的, 取 (x_n^*) 的子列, 记为 $x_n^*(d)$ 使得 $x_n^*(d) \xrightarrow{w^*} x^*$, 则 $\|x_n^*(d) - x^*(d)\|_2 \to 0$, 于是 $x^*(d) \in L_2$,

$$\lim_{\|x^*\|\leqslant 1} \int_{\{\|d\|>C_n\}} (x^*(d))^2 \mathrm{d}P = 0,$$

与 (4.32) 矛盾.

反过来由 $\{x^*(d)^2 : ||x^*|| \leqslant 1\}$ 的一致可积性直接得出 A 紧, 从而 K_d 紧.

2° 若 d 是 Gauss R.V., 则 $E||d||^2 < \infty$, 从而 $\{x^*(d)^2 : ||x^*|| \leqslant 1\}$ 一致可积, 由上述证明 K_d 紧. 若 d 是预 Gauss 的, 其相应的 Gauss R.V. 是 $G(d)$, 则 d 与 $G(d)$ 有相同的协方差泛函, 而 K_d 仅与协方差有关, 所以可得到 K_d 相对紧.

命题 3 若 $d \in$ CLIL, 则 $C\{S_n/a_n\} = K_d$, 从而 $\{x^*(d)^2 : ||x^*|| \leqslant 1\}$ 一致可积.

证明 首先我们证明以概率 1, $C\{S_n/a_n\} \subset K_d$. 由 K_d 定义, 存在 $x_k^* \in X^*$, 若 $x \in X$ 使得

$$x_k^*(x) \leqslant ||x_k^*(d)||_2, \quad \forall k \geqslant 1, \tag{4.33}$$

则 $x \in K_d$. 设 Ω_0 是这样的集合: $\omega \in \Omega_0$, 则 $\forall k \geqslant 1$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{||x_k^*(S_n(\omega))||}{a_n} \leqslant ||x_k^*(d)||_2.$$

当 $x \in C\{S_n/a_n\}, \omega \in \Omega_0$ 时, x 必满足 (4.33), 从而 $x \in K_d$. 这说明我们的断言成立. 此时必有

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\frac{S_n}{a_n}, K_d\right) = 0, \tag{4.34}$$

否则由 $\{S_n/a_n\}$ 的相对紧性, 必有子列收敛于 K_d 之外的点, 这不可能.

现在证明 $K_d \subset C\{S_n/a_n\}$. 对于有限维空间, 可以将问题归结为 X 是 Hilbert 空间, K_d 是其单位球的情况 (因 d 的协方差阵正定, 从而由某个正交基将其对角化). 设 $x \in X, |x| = 1(|\cdot|$ 是其中的范数). 由 (4.34), 对足够大的 n, $|S_n/a_n| < 1+\varepsilon$, 由 (4.27), 关于一个子列有

$$\left\langle \frac{S_n}{a_n}, x \right\rangle \geqslant ||\langle x, d\rangle||_2 - \varepsilon = 1 - \varepsilon.$$

于是对于充分大的 n,

$$\left|\frac{S_n}{a_n} - x\right|^2 = \left|\frac{S_n}{a_n}\right|^2 + |x|^2 - 2\left\langle \frac{S_n}{a_n}, x \right\rangle \leqslant 1 + \varepsilon + 1 - 2 + 2\varepsilon = 3\varepsilon,$$

从而 $x \in C\{S_n/a_n\}$. 对于 K_d 的每个内点 $|x| < 1$. 若 r 是与 d 独立的 Rademacher 序列, 定义 $\tilde{d} = (d, r)$, 扩大 X 的维数成为 $X \times R$, 此时对上述每个 $x, (x, (1-|x|^2))$ 在 $X \times R$ 的单位球面上, 由上述证明, 此元属于 $X \times R$ 的聚点集 $C\{\tilde{S}_n/a_n\}$, 从而 $x \in C\{S_n/a_n\}$.

对于无穷维的情况, 可由定理 2 (ii)⇒(iii) 证明中的鞅逼近方法得到. 最后由 K_d 的紧性得到 $\{x^*(d)^2 : ||x^*|| \leqslant 1\}$ 一致可积.

应用定理 4 可得到与 2 型空间相关的结果.

定理 5　设 X 是 2 型空间, 则 X 值 R.V. $d \in$BLIL 当且仅当:

(i) $E(\|d\|^2/L_2\|d\|) < \infty$;

(ii) $\forall x^* \in X^*, Ex^*(d) = 0, Ex^*(d)^2 < \infty$.

$d \in$CLIL 当且仅当上面 (i) 和下面 (ii′) 成立.

(ii′) $\forall x^* \in X^*, Ex^*(d) = 0$ 并且 $\{x^*(d)^2 : \|x^*\| \leqslant 1\}$ 一致可积.

证明　由定理 4, 只须证明充分性. 为此只须证明对于 2 型空间, 一个 0 均值的 R.V. d 只要满足 (i), 则 S_n/a_n 依概率收敛于 0(从而随机有界). 实际上不妨设 d 是对称的, 对于每个 n,

$$\begin{aligned}E\|S_n\| &\leqslant E\left\|\sum_{i=1}^n d_i\chi_{\{\|d_i\|\leqslant a_n\}}\right\| + E\left\|\sum_{i=1}^n d_i\chi_{\{\|d_i\|>a_n\}}\right\| \\ &\leqslant E\left\|\sum_{i=1}^n d_i\chi_{\{\|d_i\|\leqslant a_n\}}\right\| + nE\|d_i\chi_{\{\|d\|>a_n\}}\|. \end{aligned} \tag{4.35}$$

在条件 (i) 之下, 由分部积分可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}E(\|d\|\chi_{\{\|d\|>a_n\}}) = 0.$$

X 是 2 型的, 故

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n}E\left\|\sum_{i=1}^n d_i\chi_{\{\|d_i\|\leqslant a_n\}}\right\| &\leqslant \frac{1}{a_n}E\left\|\sum_{i=1}^n d_i\chi_{\{\|d_i\|\leqslant a_n\}}\right\|_2 \\ &\leqslant \frac{C}{a_n}\left(\sum_{i=1}^n \|d_i\chi_{\{\|d_i\|\leqslant a_n\}}\|_2^2\right)^{1/2} \\ &= \frac{Cn^{\frac{1}{2}}}{a_n}E(\|d\|^2\chi_{\{\|d\|\leqslant a_n\}}) \\ &\leqslant \frac{C}{\sqrt{2L_2n}}E(t^2 + \|d\|^2\chi_{\{t\leqslant\|d\|\leqslant a_n\}}) \to 0,\end{aligned}$$

于是 (4.35) 变为 $E\|S_n/a_n\| \to 0$. 故所说的结论成立.

推论　设 R.V. d 满足中心极限定理, 则 $d \in$CLIL 当且仅当 $E(\|d\|^2/L_2\|d\|) < \infty$.

证明　只须证明充分性. d 满足中心极限定理, 所以 d 是预 Gauss 的,

$$\frac{S_n}{a_n} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2L_2n}} \to 0$$

依概率成立. 由命题 2, K_d 紧, $\{x^*(d)^2 : \|x^*\| \leqslant 1\}$ 一致可积. 由定理 4 即得出 $d \in$CLIL.

最后让我们给出使每个 $d \in L_2(\mu, X)$ 满足重对数率的空间条件.

定理 6 设 X 是 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) 存在 $C > 0$ 使得任何 $n \geqslant 1, x_1, \cdots, x_n \in X$,

$$\left(E\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2} \leqslant C\sqrt{L_2 n}\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right)^{1/2}; \tag{4.36}$$

(ii) 对于每个 X 值 R.V. d, 若 $Ed = 0, E\|d\|^2 < \infty$, 则 $d \in$CLIL.

证明 (i)⇒(ii). 由 (i), 用与 4.2 节中一样的方法可以证明, 对于每个独立 0 均值 R.V. 序列 (d_n),

$$\left(E\left\|\sum_{i=1}^{n} d_i\right\|^2\right)^{1/2} \leqslant C\sqrt{L_2 n}\left(\sum_{i=1}^{n} \|d_i\|^2\right)^{1/2}. \tag{4.37}$$

特别地, 对于与 R.V. d 独立同分布的序列有

$$\left(E\left\|\sum_{i=1}^{n} d_i\right\|^2\right)^{1/2} \leqslant C\sqrt{nL_2 n}\|d\|_2, \tag{4.38}$$

此即 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\left\|\dfrac{S_n}{\sqrt{2nL_2 n}}\right\|_2 < \infty$. 我们证明依概率 $\dfrac{S_n}{\sqrt{2nL_2 n}} \to 0$. 果真如此, 则定理 4 中条件 (i), (ii′), (iii′) 都成立, 故 $d \in$CLIL.

实际上, 对于每个 $x^* \in X^*, x^*(d)$ 甚至满足中心极限定理的条件, 于是 $\dfrac{x^*(S_n)}{\sqrt{n}}$ $\xrightarrow{\alpha} U_{x^*}$, 于是又有 $x^*\left(\dfrac{S_n}{a_n}\right) \to 0$ 依概率成立. 这一事实对于有限维空间也成立. 现在应用 4.3 节中证明 Acosta 定理的方法和上述已经得到的条件可知 $\dfrac{S_n}{a_n} \to 0$ 依概率成立.

(ii)⇒(i). 我们知道 $d \in$CLIL 时, $\dfrac{S_n}{a_n} \to 0$ 依概率成立并且 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\left\|\dfrac{S_n}{a_n}\right\| < \infty$ a.e., 现在证明当 $E\|d\|^2 < \infty$ 时, $\sup\limits_{n\geqslant 1} E\left\|\dfrac{S_n}{a_n}\right\|^2 < \infty$.

实际上, 不妨设 d 是对称的, 令 $d_n^* = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \|d_i\|$, 取 $M > 0$ 使 $P(\|S_n\| > Ma_n) \leqslant 1/72$, 则

$$\begin{aligned} E\|S_n\|^2 &= \int_0^\infty P(\|S_n\|^2 > t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant 9\int_0^\infty P(d_n^* > \sqrt{t})\mathrm{d}t + 36\int_0^\infty P(\|S_n\| > \sqrt{t})^2\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\leqslant 5M^2a_n^2 + \int_{M^2a_n^2}^{\infty} P(d_n^* > \sqrt{t})\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{M^2a_n^2}^{\infty} P(\|S_n\| > \sqrt{t})\mathrm{d}t$$
$$\leqslant 90M^2a_n^2 + 18E(d_n^*)^2.$$

$$E(d_n^*)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} E\|d_i\|^2 = nE\|d\|^2 = 0(a_n^2),$$

故 $E\left\|\dfrac{S_n}{a_n}\right\|^2 \leqslant 90M^2 + 0(1)$, 即得出所要的结论.

现在定义 X 值 R.V. 的空间

$$H(X) = \left\{d : \sup_{n\geqslant 1}\left\|\frac{S_n}{a_n}\right\|_2 < \infty\right\},$$

以 $\|d\|_H = \sup\limits_{n\geqslant 1}\left\|\dfrac{S_n}{a_n}\right\|_2$ 作为 $H(X)$ 的范数, 则 $H(X)$ 是 Banach 空间. 上述论证表明 $I : L_2(\mu, X) \to H(X), Id = d$ 具有闭图像从而是连续的. 故有 $C > 0$ 使得

$$\sup_{n\geqslant 1}\left\|\frac{S_n}{a_n}\right\|_2 \leqslant C\|d\|_2 \quad 或者 \quad \left\|\sum_{i=1}^{n} d_i\right\|_2 \leqslant C\sqrt{nL_2n}\|d\|_2.$$

仍用 4.2 节中证明 Acosta 定理的方法可得到 (4.36).

4.5 Gauss 型 Kwapien 定理

Rademacher 函数序列是一种特殊的对称独立 R.V. 序列, 实际上借助于其他类型的对称独立 R.V. 序列也可以定义与之相应的型. 本节将先讨论在局部理论中有重要作用的 Gauss 型 (即平稳型) 及有关问题, 然后证明刻画 Hilbert 空间特征的 Kwapien 定理.

上节已经讲到 Gauss R.V., 对于 n 维标准 Gauss R.V. $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, 若 $A \subset R^n$ 是 Borel 集, 则

$$P((\xi_1, \cdots, \xi_n) \in A) = \frac{1}{(\sqrt{2n})^n}\int_A \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right)\mathrm{d}t_1, \cdots, \mathrm{d}t_n. \tag{5.1}$$

Gauss R.V. 是旋转不变的, 即若 $(\alpha_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 是正交矩阵, $\tilde{\xi}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i, i = 1, \cdots, n$, 则

$$P((\tilde{\xi}_1, \cdots, \tilde{\xi}_n) \in A) = P((\xi_1, \cdots, \xi_2) \in A).$$

由此可知

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i<t\right)=P\left(\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\right)^{1/2}\xi_1<t\right),$$

并且

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i\right\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\right)^{1/2}\|\xi_1\|_p,\quad 0<p<\infty.$$

此外注意在 $n=1$ 的情况, (5.1) 实际上等价于 ξ 的 Fourier 变换

$$E\exp(\mathrm{i}t\xi)=\exp(-t^2/2).$$

定义 1 一个实值 (对称)R.V. ξ 称为是 p-Gauss 的: 若 ξ 的 Fourier 变换满足

$$E\exp(\mathrm{i}t\xi)=\exp(-\sigma^p|t|^p/2),\quad -\infty<t<\infty, \tag{5.2}$$

其中 σ 为某个常数. $\sigma=1$ 时称 ξ 是标准 p-Gauss 的. 特别地, $p=2$ 的情况就是通常的 Gauss R.V.. 实际上, 指标 p 只能在 $0<p\leqslant 2$ 中变化, 而且 $p=2$ 与 $p<2$ 两种情况也有相当的差异. 例如, $p=2$, 则 $E|\xi|^2<\infty$. 但若 $p<2$, 则除非 $\xi\equiv 0$, 都有 $E|\xi|^p=\infty$, 即 ξ 不是 p 可积的. 此时 ξ 仅仅是 $r(r<p)$ 可积的并且 $\|\xi\|_r=C_{rp}\sigma$, C_{rp} 是仅与 r,p 有关的常数. 此外存在与 C 和 p 有关的常数 K 使得

$$\lim_{t\to\infty}t^pP(|\xi|>t)=K\sigma^p. \tag{5.3}$$

一个 n 维 R.V. $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 称为是 p-Gauss 的, 若任意线性组合 $\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j\xi_j$ 是 p-Gauss 的. p-Gauss R.V. 又称为是 p 平稳的. 这是因为若 $\{\xi_j\}$ 是独立标准 p-Gauss R.V., 则

$$E\exp\left(\mathrm{i}t\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\xi_j\right)=\prod_{j=1}^{n}E\exp(\mathrm{i}t\alpha_j\xi_j)=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^p|t|^p\right).$$

同时与 p-Gauss R.V. 类似地有 $\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j\xi_j\sim\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|\alpha_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\xi_1$, 并且

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\xi_j\right\|_r=\left(\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^p\right)^{1/p}\|\xi_1\|_r. \tag{5.4}$$

局部理论中常应用这一点建立空间 L_p 中由 $\{\xi_n\}$ 张成的子空间到 l_p 的等距同构. 今后我们说到标准 p-Gauss R.V. 序列总是指相互独立的标准 p-Gauss R.V. 序列.

定义 2 设 X 是 Banach 空间, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\{\xi_n\}$ 是标准 p-Gauss R.V. 序列, 称 X 是 p-Gauss (G-p) 型的, 若存在 $C > 0$ 使得对于任何 n 和 $x_1, \cdots, x_n \in X$,

$$\left(E\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\right\|^p\right)^{1/p} \leqslant C\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}x_j\right\|^p\right)^{1/p}, \quad 1 < p \leqslant 2, \tag{5.5}$$

$$\sup_{t>0} tP\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\right\| > t\right) \leqslant C\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|\right), \quad p = 1. \tag{5.6}$$

为了把这两个式子的形式统一起来, 可以将 (5.5) 的左端换为

$$\sup_{t>0} tP\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\right\| > t\right)^{1/p} \triangleq \left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\right\|_{wL_p}, \tag{5.7}$$

$\|\cdot\|_{wL_p}$ 是一个拟范数, 但 $p > 1$ 时, 它等价于一个范数. 显然对于任一个 R.V. $Z \in L_p(\mu, X)$, $\|Z\|_{wL_p} \leqslant \|Z\|_p$. 对于 p-Gauss R.V., 实际上我们有

命题 设 $0 < p < 2, d$ 是任一 X 值 p-Gauss R.V., 则 $\|d\|_{wL_p} < \infty$ 并且对于任何 $0 < r < p$, 存在 $C_{pr} > 0$ 使得

$$C_{pr}^{-1}\|d\|_r \leqslant \|d\|_{wL_p} \leqslant C_{pr}\|d\|_r. \tag{5.8}$$

因此 d 的任何小于 p 阶的矩都等价.

证明 取 t_0 足够大, 使得 $P(\|d\| > t_0/2) < 1/4$. 设 d_i 是 d 的独立 copy. 由于 $\forall n$, $\sum_{i=1}^{n} d_i/n^{1/p}$ 与 d 有相同分布. 由 (2.2),

$$\begin{aligned} P(\max_{i\leqslant n}\|d_i\| > t_0 n^{\frac{1}{p}}) &\leqslant P\left(2\max_{i\leqslant n}\left\|\sum_{i=1}^{n}d_i\right\| > t_0 n^{\frac{1}{p}}\right) \\ &\leqslant 2P\left(\max_{i\leqslant n}\left\|\sum_{i=1}^{n}d_i\right\| > t_0 n^{\frac{1}{p}}/2\right) \\ &= 2P(\|d\| > t_0/2) < 1/2. \end{aligned} \tag{5.9}$$

由不等式 $1 - t \leqslant \mathrm{e}^{-t}$, $\dfrac{t}{1+t} \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-t} (t \geqslant 0)$ 和独立性,

$$\begin{aligned} P(\max_{i\leqslant n}\|d_i\| > t) &= 1 - \prod_{i\leqslant n}(1 - P(\|d_i\| > t)) \\ &\geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{i\leqslant n}P(\|d_i\| > t)\right) \end{aligned}$$

$$\geqslant \left(\sum_{i\leqslant n} P(\|d_i\|>t)\right) \Big/ \left(1+\sum_{i\leqslant n} P(\|d_i\|>t)\right).$$

再由 (5.9) 式得到 $P(\|d\|>t_0 n^{1/p}) \leqslant n^{-1}$. 由 $\|\cdot\|_{wL_p}$ 的定义不难得出 $\|d\|_{wL_p} \leqslant 2^{\frac{1}{p}} t_0 < \infty$.

若 $\|d\|_r = 4^{-\frac{1}{r}} t_0$, 则有 $P(\|d\|>t_0) \leqslant t_0^{-r} E\|d\|^r \leqslant 1/4$, 从而一方面

$$\begin{aligned}\|d\|_{wL_p}^p &\geqslant t_0^p P(\|d\|>t_0) = (4\|d\|_r^r)^{\frac{p}{r}} P(\|d\|>t_0)\\ &= (4^{\frac{1}{r}} P(\|d\|>t_0)^{\frac{1}{p}})^p \|d\|_r^p,\end{aligned}$$

另一方面

$$\|d\|_{wL_p} \leqslant 2^{\frac{1}{p}} t_0 = 2^{\frac{1}{p}} 4^{\frac{1}{r}} \|d\|_r.$$

即得出 (5.8).

由此可以得到一个类似于 Kanane 定理的结论, 它表明 (5.5) 与 (5.6) 的左端与指标 p 是无关的.

定理 1 (Hoffmann-Jørgensen) 设 (z_n) 是实值 p-Gauss R.V. 序列, $x_n \in X$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n x_n$ a.e. 收敛, 则当 $q<p<2$ 或 $q \leqslant p = 2$ 时, 此级数 q 均方收敛. 因此存在常数 $c_{rp}>0$ 使得只要 $\max\{r,q\}<p<2$ 或者 $\max\{r,q\} \leqslant p = 2$, 则

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} z_j x_j\right\|_r \leqslant c_{rq} \|\sum_{j=1}^{n} z_j x_j\|_q, \quad n \geqslant 1. \tag{5.10}$$

证明 显然有 $d^* = \sup\limits_{n\geqslant 1} \|z_n x_n\| < \infty$ a.e., 此时存在 $a>0$ 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\|z_i x_i\|>a) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(|z_i| > \frac{a}{\|x_i\|}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(|z_1| > \frac{a}{\|x_i\|}\right) < \infty.$$

所以必有 $x_i \to 0$. 先设 $p=2$, 由 4.4 节引理 1 得到 q 平均收敛性. 由 $E(\mathrm{d}^*)^q < \infty$, 根据 4.2 节定理 6 和 Kanane 不等式得到 (5.10).

对于 $0<p<2$ 可使用上述命题. 实际上, 若 $d_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j x_j$ a.e.(甚至依概率) 收敛于 d, 则必有 $\forall t>0, P(\|d_n\|>t) \to P(\|d\|)>t$. 由定义, $\|d_n\|_{wL_p} \to \|d\|_{wL_p}$. 从而由命题中的等价关系, 对于任何 $r<p, \|d_n - d_\infty\|_r \to 0$. 至于 (5.10), 可直接由 (5.8) 得出.

定理 2 设 X 是 Banach 空间, $1 \leqslant q < p \leqslant 2$, 则

(i) 若 X 是 G-p 型的, 则 X 是 R-p 型的;

(ii) X 是 G-2 型的当且仅当 X 是 R-2 型的;

(iii) X 是 R-p 型的 $(p<2)$, 则 X 是 G-q 型的;

(iv) 若 X 是 G-p 型的, 则 X 是 G-q 型的.

证明　1°X 是 G-p 型的, 由于 (ξ_n) 是对称独立的, $r_n(t)|\xi_n(\omega)|$ 与 $\xi_n(\omega)$ 有相同分布, 这里 r_n 是 R 函数序列. 于是 $\forall x_1,\cdots,x_n\in X$,

$$\begin{aligned}
C\sum_{j=1}^n\|x_j\|^p &\geqslant E\left\|\sum_{j=1}^n\xi_jx_j\right\|^p=E_\omega\left\|\sum_{j=1}^n\xi_j(\omega)x_j\right\|^p\\
&=E_tE_\omega\left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)|\xi_j(\omega)|x_j\right\|^p\\
&\geqslant E_t\left\|E_\omega\left(\sum_{j=1}^n r_j(t)|\xi_j(\omega)|x_j\right)\right\|^p\\
&=E_t\left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)\|\xi_j\|_1x_j\right\|^p\\
&\geqslant \inf_{1\leqslant j\leqslant n}\|\xi_j\|_1E_t\left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)x_j\right\|^p,
\end{aligned}$$

最后的式子用到收缩原理. 由此知道 X 是 R-p 型的.

2° 只须证明若 X 是 R-2 型的, 则 X 是 G-2 型的. 实际上

$$\begin{aligned}
\left(E\left\|\sum_{j=1}^n\xi_jx_j\right\|^p\right)^{1/q}&=\left(E_\omega\left\|\sum_{j=1}^n\xi_jx_j\right\|^p\right)^{1/q}\\
&=\left(E_\omega E_t\left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)|\xi_j(\omega)|x_j\right\|^p\right)^{1/q}\\
&\leqslant T_p\left(E_\omega\sum_{j=1}^n|\xi_j(\omega)|^2\|x_i\|^2\right)^{1/2}\\
&\leqslant T_p\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\|\xi_j\|_2\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}\tag{5.11}$$

由此得出 X 是 G-2 型的.

3° 将上面 (5.11) 右端换为 p 是不行的, 因为 $p<2$ 时 $E|\xi_j|^2=\infty$. 但对于 $q<p$, 先由定理 1 得到

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\right\|_p \leqslant C\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\right\|_q.$$

然后由类似于 (5.11) 的证明得到

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\right\|_q \leqslant T_q \sup_{1\leqslant j\leqslant n}\|\xi_j\|_q\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^q\right)^{1/q}.$$

两式合并即得到所要的结论.

4° (iv) 由 (i), (iii) 得到.

例 1 空间 $L^p[0,1], l^p(1\leqslant p<2)$ 不是 G-p 型的.

实际上若不然, 由上面定理 2 (iii) 的证明, 必有某个 $\varepsilon>0$ 使得 $L^p[0,1], l^p$ 是 R-$(p+\varepsilon)$ 型的. 但由 4.1 节定理 4, 这是不可能的.

定理 3 设 X 是 Banach 空间, $1\leqslant p<2$, 则以下条件等价:

(i) X 是 G-p 型的;

(ii) 存在 $C>0$ 使得对于任一独立对称 Radon R.V. 序列 (d_n), 若 $d_n\in wL_p(X)$, 则

$$\sup_{t>0} t^p P\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} d_j\right\|>t\right)\leqslant C\sup_{t>0} t^p\sum_{j=1}^{n}P(\|d_j\|>t) \tag{5.12}$$

或者

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} d_j\right\|_{wL_p}\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\|d_j\|_{wL_p},\quad n\geqslant 1. \tag{5.13}$$

回忆一个 Borel 可测随机变量 d 是 Radon 随机变量, 若存在紧集序列 K_n, 使得 $P\left(d\in\bigcup_{n\geqslant 1}^{\infty}K_n\right)=1$.

证明 (i) $\Rightarrow$(ii). 由拟范数的齐性, 不妨设

$$\sup_{t>0} t^p\sum_{j=1}^{n}P(\|d_j\|>t)=1.$$

固定 $t>0$, 则 $t^pP(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\|d_j\|>t)\leqslant 1$. 从而

$$\sup_{t>0} t^p P\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} d_j\right\|>t\right)\leqslant t^pP(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|d_j\|>t)+t^pP\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} d_j\chi_{\{\|d_j\|\leqslant t\}}\right\|>t\right)$$

$$\leqslant 1+t^pP\left(\left\|\sum_{j=1}^n d_j\chi_{\{\|d_j\|\leqslant t\}}\right\|>t\right).$$

X 是 G-p 型的, 从而存在 $p'>p$ 使得 X 是 R-p' 型的, 于是

$$\begin{aligned}t^pP\left(\left\|\sum_{j=1}^n d_j\right\|>t\right)&\leqslant 1+t^{p-p'}E\left\|\sum_{j=1}^n d_j\chi_{\{\|d_j\|\leqslant t\}}\right\|^{p'}\\&\leqslant 1+Ct^{p-p'}\sum_{j=1}^n E\|d_j\chi_{\{\|d_j\|\leqslant t\}}\|^{p'}\\&\leqslant 1+Ct^{p-p'}\int_0^t\sum_{j=1}^n P(\|d_n\|>s)\mathrm{d}s^{p'}\\&\leqslant 1+Ct^{p-p'}\int_0^t\frac{\mathrm{d}s^{p'}}{s^p}\leqslant 1+\frac{Cp'}{p'-p}.\end{aligned}$$

总之

$$t^pP\left(\left\|\sum_{j=1}^n d_j\right\|>t\right)\leqslant 1+\frac{Cp'}{p'-p}$$

或者

$$\left\|\sum_{j=1}^n d_j\right\|_{wL_p}^p\leqslant\left(1+\frac{Cp'}{p'-p}\right)\sup_{t>0}\sum_{j=1}^n P(\|d_j\|>t).$$

(ii)⇒(i). 令 $d_j=\xi_jx_j$, 容易由 (5.12) 得到 (5.5) 或 (5.6), 所以 X 是 G-p 型的.

定理 4　设 X 是 Banach 空间, $1\leqslant p<2$, 若 X 是 G-p 型的, 则对于每个 X 值对称 Radon R.V. d, d_j 是 d 的独立 copy, $S_n=\sum_{j=1}^n d_j$, 则 $S_n/n\to 0$ 依概率收敛当且仅当 $\lim_{t\to\infty}t^pP(\|d\|>t)=0$.

证明　首先注意在任何空间中, $S_n/n^{1/p}\to 0$ 依概率收敛都意味着

$$\lim_{t\to\infty}t^pP(\|d\|>t)=0.$$

实际上, 由 (5.9) 后面的证明可以得出, 当 $P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|d_j\|>t)\leqslant 1/2$ 时,

$$\sum_{j=1}^n P(\|d_j\|>t)\leqslant 2P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|d_j\|>t),$$

此时

$$\begin{aligned}\frac14\geqslant P(\|S_n\|>\varepsilon n^{1/p})&\geqslant\frac12P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|d_j\|>\varepsilon n^{1/p})\\&\geqslant\frac n4P(\|d\|>\varepsilon n^{1/p}).\end{aligned}\tag{5.14}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} nP(\|d\| > \varepsilon n^{1/p}) = \lim_{n\to\infty} P(\|S_n\| > \varepsilon n^{1/p}) = 0.$$

后者是由于 $S_n/n^{1/p}$ 依概率收敛于 0. 对于 t, 取 n 使得 $n \leqslant t < n+1$, 则

$$tP(\|d\| > \varepsilon n^{1/p}) \leqslant \frac{n+1}{n} \cdot nP(\|d\| > \varepsilon n^{1/p}).$$

即得出所要的结论.

其次, 在有限维空间中这一事实的逆也成立. 为此只须考虑实值 R.V. 的情况. $\forall \varepsilon, \delta > 0$, 则

$$P(|S_n| > 2\varepsilon n^{1/p}) \leqslant nP(|d| > \delta n^{1/p}) + P\left(\left|\sum_{i=1}^n d_i \chi_{\{|d_i| \leqslant \delta n^{1/p}\}}\right| > 2\varepsilon n^{1/p}\right).$$

由于 $Ed = 0$, 故

$$\left|\sum_{i=1}^n Ed_i \chi_{\{|d_i| \leqslant \delta n^{1/p}\}}\right| \leqslant nE|d|\chi_{\{|d| > \delta n^{1/p}\}},$$

当 n 足够大时, 由所给条件第二部分可小于 $\varepsilon n^{1/p}$, 于是可以得到

$$\begin{aligned} &P\left(\left|\sum_{j=1}^n d_j \chi_{\{|d_j| \leqslant \delta n^{1/p}\}}\right| > 2\varepsilon n^{1/p}\right) \\ &\leqslant P\left(\left|\sum_{j=1}^n d_j \chi_{\{|d_j| \leqslant \delta n^{1/p}\}} - E(d_j \chi_{\{|d_j| \leqslant \delta n^{1/p}\}})\right| > \varepsilon n^{1/p}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 n^{2/p}} \sum_{j=1}^n E|d_j|^2 \chi_{\{|d_j| \leqslant \delta n^{1/p}\}}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

由分部积分

$$\begin{aligned} n^{1-\frac{2}{p}} E|d|^2 \chi_{\{|d| \leqslant \delta n^{1/p}\}} &\leqslant \int_0^\delta nt^p P(|d| > tn^{1/p}) \frac{\mathrm{d}t^2}{t^p} \\ &= \frac{2}{2-p} \int_0^\delta nt^p P(|d| > tn^{1/p}) \mathrm{d}t^{2-p}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty} nt^p P(|d| > tn^{1/p}) = 0$, 对 (5.16) 以及 t^{-p} 应用控制收敛定理, 则上述积分收敛于 0. 总之 $\lim\limits_{n\to\infty} P(|S_n| > 2\varepsilon n^{1/p}) = 0$.

最后假定 X 是 G-p 型的, 类似于 4.3 节定理 4 (i)⇒(iii) 的论证可知 $\dfrac{S_n}{n^{1/p}} \to 0$ 依概率成立.

现在让我们转到 Kwapien 定理.

以 $\{\xi_i\}$ 表示独立 Gauss-2 型 R.V. 序列, $\{\delta_i\}$ 表示 Bernoulli 独立 R.V. 序列, $P(\delta_i = \pm 1) = 1/2$. 固定正整数 n, 令

$$\delta_i^m = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{im+k}, \quad i = 1, \cdots, n, \quad m = 1, 2, \cdots. \tag{5.17}$$

由概率论的基本定理知道当 $m \to \infty$ 时, $(\delta_1^m, \cdots, \delta_n^m)$ 的联合分布收敛于 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 的联合分布, 或等价地, 对于任一有界连续函数 $h: R^n \to R$,

$$\lim_{m\to\infty} Eh(\delta_1^m, \cdots, \delta_n^m) = Eh(\xi_1, \cdots, \xi_n).$$

引理 1 若 $h: R^n \to R$ 是连续函数, 并且

$$h(s_1, \cdots, s_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n |s_i|\right) \to 0, \quad \sum_{i=1}^n |s_i| \to \infty, \tag{5.18}$$

则

$$\lim_{m\to\infty} Eh(\delta_1^m, \cdots, \delta_n^m) = Eh(\xi_1, \cdots, \xi_n). \tag{5.19}$$

证明 设 X 是满足 (5.18) 的所有连续函数 $h: R^n \to R$ 的空间, X 是线性空间. 若以

$$||h|| = \sup_{(s_1,\cdots,s_n)\in R^n} |h(s_1, \cdots, s_n)| \exp\left(-\sum_{i=1}^n |s_i|\right)$$

为 X 上的范数, 则 X 是 Banach 空间并且有界连续函数全体在其中稠密. 记

$$F_m(h) = Eh(\delta_1^m, \cdots, \delta_n^m), \quad h \in X,$$

$$\begin{aligned} F(h) &= Eh(\xi_1, \cdots, \xi_n) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h(s_1, \cdots, s_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n |s_i|\right) \mathrm{d}s_1 \cdots \mathrm{d}s_n. \end{aligned}$$

对于有界连续函数 h, 上面提到的依分布收敛将导致 $\lim\limits_{m\to\infty} F_m(h) = F(h)$. 注意 F_m, F 是 X 上的连续线性泛函, 故为证明所要的结论, 只须证明 F_m 的一致有界性. 然后通过稠密性得出 (5.19). 利用 $\{\delta_i\}$ 的独立性知道

$$\begin{aligned} ||F_m|| &\leqslant E\exp\left(\sum_{i=1}^n \delta_i^m\right) = (E\exp|\delta_1^m|)^n \\ &\leqslant (E\exp\delta_1^m + E\exp(-\delta_1^m))^n \end{aligned}$$

$$= \left(\left(E \exp \frac{\delta_1}{\sqrt{m}} \right)^m + \left(E \exp \left(-\frac{\delta_1}{\sqrt{m}} \right) \right)^m \right)^n$$

$$= 2^n \left(\frac{1}{2} \left(\exp \frac{1}{\sqrt{m}} + \exp \left(-\frac{1}{\sqrt{m}} \right) \right)^{mn} \right) \leqslant 2(2\sqrt{\mathrm{e}})^n.$$

故结论成立.

定理 5 (Kwapien) 对于任何 (实或复)Banach 空间 X, 以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间;

(ii) $\exists C \geqslant 1$ 使得 $\forall n \geqslant 1$, $x_1, \cdots, x_n \in X$,

$$C^{-1} \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2 \leqslant E \left\| \sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i \right\|^2 \leqslant CE \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2, \tag{5.20}$$

其中 $\{\delta_i\}$ 是独立 Bernoulli R.V. 序列;

(iii) $\exists C \geqslant 1$ 使得 $\forall n \geqslant 1$, $x_1, \cdots, x_n \in X$,

$$C^{-1} \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2 \leqslant E \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \right\|^2 \leqslant CE \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2, \tag{5.21}$$

其中 $\{\xi_i\}$ 是独立 Gauss R.V. 序列;

(iv) $\exists C \geqslant 1$ 使得 $\forall n \geqslant 1$, $x_1, \cdots, x_n \in X$ 以及满足

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ij} s_j \right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |s_j|^2, \quad \forall (s_1, \cdots, s_n) \in R^n \tag{5.22}$$

的 n 阶矩阵 (a_{ij}) 都有

$$\sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \right\|^2 \leqslant C \sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2. \tag{5.23}$$

特别地, (i) 与 (ii) 的等价性说明, 同时是 2- 型和 2- 余型的 Banach 空间必同构于 Hilbert 空间.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii). 注意 R 序列 $\{r_n\}$ 是 Bernoulli 序列, 并且 Hilbert 空间即是 R-2 型又是 R-2 余型的, 型和余型是同构不变的, 于是 (5.20) 成立.

(ii)$\Rightarrow$(iii). 令 $\tilde{x}_{im+k} = \dfrac{x_i}{\sqrt{m}}$, $\quad 1 \leqslant i \leqslant n, k \geqslant 0, m \geqslant 1$, 则

$$\sum_{j=1}^{mn} ||\tilde{x}_j||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2.$$

并且

$$E\left\|\sum_{i=1}^{n}\delta_i^m x_i\right\|^2 = E\left\|\sum_{j=1}^{mn}\delta_j\tilde{x}_j\right\|^2, \quad m \geqslant 1.$$

将 (5.20) 应用于 $x_j (1 \leqslant j \leqslant mn)$ 得到

$$C^{-1}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 \leqslant E\left\|\sum_{i=1}^{n}\delta_i^m x_i\right\|^2 \leqslant CE\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2. \tag{5.24}$$

令 $h(s_1,\cdots,s_n) = \left\|\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\right\|^2$, 由于

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\right\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}|s_i|^2\|x_i\|^2 \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\|x_i\|^2\left(\sum_{i=1}^{n}|s_i|\right)^2,$$

由此得到 (5.18), 应用引理 1 于 (5.24) 便得到 (5.21).

(iii)⇒(iv). 设 (a_{ij}) 满足 (5.22), 则 $T = (a_{ij})$ 成为 $l_2^n \to l_2^n$ 的有界线性算子, 这种算子全体构成 n^2 维的线性赋范空间 F, F 单位球 B 的每个元是 n^2+1 个 B 的端点的凸组合 (Krein-Milman 定理与 Caratheodory 定理), 而 B 的每个端点恰是 l_2^n 的等距同构. 因此为证明 (iv) 成立, 只须对每个端点证明 (5.23) 成立.

现设 $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} s_i a_{ij}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} s_i^2, \forall (s_1,\cdots,s_n) \in l_2^n$ 并且 $|\mathrm{Det}(a_{ij})| = 1$. 令 $t_j = \sum_{i=1}^{n} s_i a_{ij} (j = 1,\cdots,n)$, 利用 (5.21) 可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right\|^2 \leqslant CE\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right\|^2 \\
&= \frac{C}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n} s_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right\|^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}s_i^2\right)\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_n \\
&= \frac{C}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|\sum_{j=1}^{n} t_j x_j\right\|^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}s_i^2\right)|\mathrm{Det}(a_{ij})|^{-1}\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n \\
&= CE\left\|\sum_{j=1}^{n} r_j x_j\right\|^2 \leqslant C^2\sum_{i=1}^{n}\|x_j\|^2.
\end{aligned}$$

对于复空间, 容易化为实部和虚部得到上述结果.

(iv)⇒(i). 设 $y_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j (i = 1, \cdots, n)$, 其中 (a_{ij}) 满足 (5.22), 则 $\forall x^* \in X^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x^*(y_i)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^*(x_j) \right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x^*(x_j)|^2. \tag{5.25}$$

反之, 若 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ 满足 (5.25), 设 $t_j = x^*(x_j)(1 \leqslant j \leqslant n)$, $F = \{(t_1, \cdots, t_n) : x^* \in X^*\}$, 则 $F \subset l_2^n$ 并且是线性子空间. 定义 $A : F \to l_2^n$,

$$A(t_1, \cdots, t_n) = (x^*(y_1), \cdots, x^*(y_n)), \quad \forall (t_1, \cdots, t_n) \in F.$$

由 (5.25), $||A|| \leqslant 1$. 令 $\tilde{A} = AP : l_2^n \to l_2^n$, 其中 P 是从 l_2^n 到 F 的正交投影. 若 A 关于单位向量基的表现矩阵是 (a_{ij}), 即

$$A(t_1, \cdots, t_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_j, \quad \forall (t_1, \cdots, t_n) \in l_2^n,$$

则 (a_{ij}) 满足 (5.22). 因为 $||A|| = ||\tilde{A}|| \leqslant 1$, 并且 $\forall x^* \in X^*$,

$$\begin{aligned}(x^*(y_1), \cdots, x^*(y_n)) &= A(x^*(x_1), \cdots, x^*(x_n)) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x^*(x_j), \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x^*(x_j) \right).\end{aligned}$$

这说明 $x^*(y_i) = x^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right)$, $\forall x^* \in X^*$ 等价于 $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j (1 \leqslant i \leqslant n)$, 于是 (5.25) 意味着 (5.23). 应用下一节 (4.6 节) 将要证明的定理 11, X 同构于 Hilbert 空间.

引理 2 设 X 是 (实或复)Banach 空间, (θ_i) 是 $[0,1]$ 上的完备正交系. 若 $\exists C > 0$, 使得 $\forall x_1, \cdots, x_n \in X$,

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} \theta_i(t)x_i \right\|^2 \mathrm{d}t \leqslant C \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2, \tag{5.26}$$

则对于某个 $C > 0$ 有

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i \right\|^2 \mathrm{d}t \leqslant C \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2. \tag{5.27}$$

这里 (r_n) 是 R 函数序列. 若同时将 (5.26) 和 (5.27) 的 “$\leqslant$” 换为 “$\geqslant$”, 结论仍成立.

证明　由 (θ_k) 的完备性, $\varepsilon>0$, 存在正整数的增加序列 $(k_j),(m_j)$ 和规范正交序列 (h_j), 使得

$$h_j=\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}(h_j,\theta_k)\theta_k,\quad \int_0^1|h_j(t)-r_{m_j}(t)|^2\mathrm{d}t<\varepsilon 2^{-j}\quad (j=1,2,\cdots).$$

由于 $\forall x_1,\cdots,x_n\in X$, 有

$$\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^2\mathrm{d}t=\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^n r_{n_j}(t)x_j\right\|^2\mathrm{d}t.$$

由三角不等式

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^n r_{m_j}(t)x_j\right\|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}&\leqslant\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^n (r_{m_j}(t)-h_j(t))x_j\right\|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\\&\quad+\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^n h_j(t)x_j\right\|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\\&\leqslant\sqrt{\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^n\|x_j\|^2\right)^{1/2}+\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^n h_j(t)x_j\right\|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

由 $1=\|h_j\|_2^2=\sum\limits_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}|(h_j,\theta_k)|^2$, 根据 (5.26) 得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^n h_j(t)x_j\right\|^2\mathrm{d}t&=\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^n\left(\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}(h_j,\theta_k)\theta_k\right)x_j\right\|^2\mathrm{d}t\\&\leqslant C\sum_{j=1}^n\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}|(h_j,\theta_k)|^2\|x_j\|^2=C\sum_{j=1}^n\|x_j\|^2,\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)x_j\right\|^2\mathrm{d}t\leqslant(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{C})^2\sum_{j=1}^n\|x_j\|^2.$$

逆向不等式证明与此类似.

推论 1 设 X 是 (实或复)Banach 空间, $\{\theta_i\}$ 是 $[0,1]$ 上的完备正交系, 则 X 同构于 Hilbert 空间当且仅当存在 $C>0$, 使得 $\forall n\geqslant 1, x_1,\cdots,x_n\in X$,

$$C^{-1}\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2\leqslant\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j(t)x_j\right\|^2\mathrm{d}t\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2.$$

4.6 p 绝对可和算子

定义 1 设 X,Y 是 Banach 空间, $1\leqslant p<\infty, T:X\to Y$ 是线性算子. 称 T 是 p 绝对可和的, 若存在 $C>0$ 使得 $\forall n,\ x_1,\cdots,x_n\in X$,

$$\left(\sum_{i-1}^{n}\|Tx_i\|^p\right)^{1/p}\leqslant C\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\left(\sum_{i-1}^{n}\|x^*x_i\|^p\right)^{1/p}. \tag{6.1}$$

T 是 p 绝对可和的, 记为 $T\in\Pi_p(X,Y)$. 满足 (6.1) 的最小常数 C, 记为 $\Pi_p(T)$, 称之为 T 的 p 绝对可和范数. 1 绝对可和算子简称为绝对可和算子.

容易验证以下基本事实:

(i) p 绝对可和算子是有界算子, 并且 $\|T\|\leqslant\Pi_p(T)$.

(ii) 也可以定义 ∞ 绝对可和算子, 即满足

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\|Tx_i\|\leqslant\sup_{1\leqslant i\leqslant n,\ \|x^*\|\leqslant 1}|x^*x_i|$$

的算子. 不过由共鸣定理知道, 任何有界线性算子是 ∞ 绝对可和的.

(iii) $(\Pi_p(X,Y),\Pi_p(\cdot))$ 是 Banach 空间.

(iv) 若 $T\in\Pi_p(X,Y), S\in B(Y,Z)$ 或 $S\in B(Z,X)$, 这里 X、Y、Z 都是 Banach 空间, 则相应地 $ST\in\Pi_p(X,Z)$ 或者 $TS\in\Pi_p(Z,Y)$, 并且

$$\Pi_p(ST)\leqslant\|S\|\Pi_p(T),\quad \Pi_p(TS)\leqslant\Pi_p(T)\|S\|.$$

(v) 序列 $\{x_n\}\subset X$ 称为是 wl^p 的, 如果 $\forall x^*\in X^*, \sum_{i=1}^{\infty}|x^*(x_n)|^p<\infty$. 由闭图像定理知 (6.1) 的右端有限当且仅当 (x_n) 是 wl^p 的, 所以 T 是 p 绝对可和算子当且仅当 T 将每个 wl^p 序列变为 l^p 序列.

例 1 对于任何无穷维空间 X 和 $0<p<\infty$, 单位算子 $I:X\to X$ 不是 p 绝对可和的. 例如, $X=l^2,(e_n)$ 是标准正交基. 容易知道不存在常数 $C>0$ 使 (6.1) 成立.

例 2　设 Ω 是紧 Hausdorff 空间, μ 是 Ω 上的正则概率测度, 则单位算子 $I: C(\Omega) \to L^p(\Omega)$ 是 p 绝对可和算子 $(1 \leqslant p < \infty)$.

实际上, 若 $f_1, \cdots, f_n \in C(\Omega)$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|If_i\|_p^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |f(\omega)|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |\delta_\omega(f_i)|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p},$$

这里 $\delta_\omega \in C(\Omega), \delta_\omega(f) = f(\omega)$. 故

$$\text{上式} \leqslant \left[\int_\Omega \left(\sup_{x^* \in C(\Omega)^*, \|x^*\| \leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} |x^* f_i|^p\right) \mathrm{d}\mu\right]^{1/p} = \sup_{x^* \in C(\Omega)^*, \|x^*\| \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^* f_i|^p\right)^{1/p}, \tag{6.2}$$

于是 $I \in \Pi_p(C(\Omega), L_p(\Omega))$ 并且 $\Pi_p(I) \leqslant 1$.

例 3　自然包含算子 $l_1 \to l_2$ 是 1 绝对可和的. 实际上设 $x_1, \cdots, x_n \in l_1$, 应用 Khintchin 不等式, 还是记 (r_i) 为 R 函数列, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \|Ix_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{ij}|^2\right)^{1/2} &\leqslant C \sum_{i=1}^{n} \left\|\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} r_j\right\|_1 \\ &= C \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} r_j\right| \mathrm{d}\mu = C \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} r_j\right| \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

注意 $l_1^* = l_\infty$. 对于每个 $t \in [0,1], (r_i(t)) \in l_\infty$, 于是

$$\text{上式} \leqslant C \int_0^1 \left(\sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} |x^* x_i|\right) \mathrm{d}\mu = C \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} |x^* x_i|.$$

定理 1　设 X, Y 是 Banach 空间, $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$, 则

$$\Pi_{p_1}(X, Y) \subset \Pi_{p_2}(X, Y), \quad \Pi_{p_2}(T) \leqslant \Pi_{p_1}(T).$$

证明　设 $T \in \Pi_{p_1}(X, Y), p_1^{-1} - p_2^{-1} = r^{-1}$. 若 $x_1, \cdots, x_2 \in X$, 并且 $x_i \neq 0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是标量, 则

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i T x_i\|^{p_1}\right)^{1/p_1} &\leqslant \Pi_{p_1}(T) \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i x^* x_i|^{p_1}\right)^{1/p_1} \\ &\leqslant \Pi_{p_1}(T) \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^r\right)^{1/r} \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^* x_i|^{p_2}\right)^{1/p_2}.\end{aligned}$$

特别地, 取 $\lambda_i = \|Tx_i\|^{p_2/r}$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^n \|\lambda_i T x_i\|^{p_1}\right)^{1/p_1} = \left(\sum_{i=1}^n (\|Tx_i\|^{p_2/r}\|Tx_i\|^{p_1})\right)^{1/p_1} = \left(\sum_{i=1}^n \|Tx_i\|^{p_2}\right)^{1/p_1},$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^r\right)^{1/r} = \left(\sum_{i=1}^n \|Tx_i\|^{p_2}\right)^{1/r},$$

于是

$$\left(\sum_{i=1}^n \|Tx_i\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} = \left(\sum_{i=1}^n \|Tx_i\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{r}} = \left(\sum_{i=1}^n \|\lambda_i T x_i\|^{p_1}\right)^{1/p_1} \Big/ \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^r\right)^{1/r}$$

$$\leqslant \Pi_{p_1}(T) \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^n |x^* x_i|^{p_2}\right)^{1/p_2}.$$

定理 2 (Grothendieck-Pietsch) 设 $T: X \to Y$ 是 p 绝对可和算子, 则存在定义于 $(B(X^*), w^*)$ 上的正则 Borel 概率测度 μ 使得

$$\|Tx\| \leqslant \Pi_p(T) \left(\int_{B(X^*)} |x^* x_i|^p \mathrm{d}\mu(x^*)\right)^{1/p}, \quad \forall x \in X, \tag{6.3}$$

其中 $B(X^*) = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leqslant 1\}$.

证明 对于 $x_1, \cdots, x_n$, 定义函数

$$\varphi(x^*) = \Pi_p^p(T) \sum_{i=1}^n |x^* x_i|^p - \sum_{i=1}^n \|Tx_i\|^p, \tag{6.4}$$

φ 在 $B(X^*)$ 的 w^* 拓扑下是连续的. 若 $\Phi \subset C(B(X^*), w^*)$ 是如此的 φ 的全体, 由于 p 绝对可和性, 每个 $\varphi \in \Phi$ 在 $(B(X^*), w^*)$ 的某个点上取非负值. 注意 Φ 还是一个凸锥, 这一凸锥与在 $(B(X^*), w^*)$ 上全取负值的连续函数的凸锥 N 无公共点. 后者具有非空内部, 于是由隔离定理, $\exists \mu \in C(B(X^*), w^*)^*$, 使得

$$\mu(\psi) < 0 \leqslant \mu(\varphi), \quad \forall \varphi \in \Phi, \ \psi \in N. \tag{6.5}$$

不妨设 $\|\mu\| = 1, (B(X^*), w^*)$ 是紧的, 由 Riesz 表现定理

$$\mu(\varphi) = \int_{B(X^*)} \varphi \mathrm{d}\mu(x^*), \quad \forall \varphi \in C(B(X^*), w^*).$$

(6.5) 表明 μ 在 $(B(X^*), w^*)$ 上是非负 Borel 测度. $\|\mu\| = 1$ 表明 μ 是概率测度.

以 φ_x 表示由 x 确定的 $C(B(X^*),w^*)$ 中元, $\varphi_x(x^*)=x^*x$, 则

$$\mu(\varphi_x)=\int_{B(X^*)}\varphi_x \mathrm{d}\mu(x^*).$$

另一方面, 由于 $\varphi_x\in\Phi, x_1=\cdots=x_n=x$,

$$||Tx||^p=\int_{B(X^*)}||Tx||^p\mathrm{d}\mu(x^*)\leqslant \Pi_p^p(T)\int_{B(X^*)}|x^*x|^p\mathrm{d}\mu(x^*).$$

从而 (6.3) 成立.

推论 1 设 $T\in B(X,Y)$ 是 2 绝对可和的, 则存在 $(B(X^*),w^*)$ 上的概率测度 μ 和算子 $S:L_2(\mu)\to Y$, 使得 $||S||=\Pi_2(T)$, 并且 $T=SJI$. 其中 $I:X\to C(B(X^*),w^*), x\to x^*x; J:C(B(X^*),w^*)\to L_2(\mu)$ 是自然包含映射.

这由 Grothendieck-Pietsch 不等式直接得出.

设 X,Y 是 Hilbert 空间, $T\in B(X,Y)$, 称 T 是 Hilbert-Schmidt 算子, 若对于某个 (从而任何一个) 完备正交系 $\{e_i\}, \sum\limits_{i=1}^{\infty}||Te_i||^2<\infty$, 称 $\sigma(T)=\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}||Te_i||^2\right)^{1/2}$ 是 T 的 Hilbert-Schmidt 范数. 从 X 到 Y 的 Hilbert-Schmidt 算子全体记为 $\Sigma(X,Y)$. 事实上, $\Pi_2(X,Y)=\Sigma(X,Y)$ 并且 $\Pi_2(T)=\sigma(T)$.

每个 Hilbert-Schmidt 算子可表示为

$$T=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(\cdot,e_n)f_n, \tag{6.6}$$

其中 λ_i 是标量, $\{\lambda_i\}\in l_2, \{e_2\}$ 和 $\{f_n\}$ 分别是 X, Y 中的规范正交序列, 此时 $||(\lambda_i)||_2=\sigma(T)$.

定理 3 设 X,Y 是 Hilbert 空间, 则

(i) $\Pi_2(X,Y)=\Sigma(X,Y)$, $\Pi_2(T)=\sigma(T)$;

(ii) 若 $1\leqslant p\leqslant 2$, 则 $\Pi_p(X,Y)=\Pi_2(X,Y)$.

证明 1° 若 $T\in\Pi_2(X,Y), e_1,\cdots,e_n\in X$ 是规范正交向量, 则 $\forall x\in X$,

$$\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|\leqslant||x||^2,$$

从而

$$\left(\sum_{i=1}^{n}||Te_i||^2\right)^{1/2}\leqslant \Pi_2(T)\sup_{||x^*||\leqslant 1}\left(\sum_{i=1}^{n}|x^*e_i|^2\right)^{1/2}$$
$$=\Pi_2(T)\sup_{||x^*||\leqslant 1}\left(\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\right)^{1/2}\leqslant \Pi_2(T).$$

这说明 $T \in \Sigma(X,Y)$ 并且 $\sigma(T) \leqslant \Pi_2(T)$.

反之, 若 $T \in \Sigma(X,Y)$, 假设

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i) f_i,$$

其中 $\|(\lambda_2)\|_2 = \sigma(T)$, 注意 $\{e_i\}, \{f_i\}$ 分别是 X, Y 中的规范正交系, 故

$$\|Tx\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 |(x, e_i)|^2.$$

若 $x_1, \cdots, x_n \in X$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^2 &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 |(x_j, e_i)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \sum_{j=1}^{n} |(x_j, e_i)|^2 \leqslant \sigma^2(T) \sup_{\|x\| \leqslant 1} \sum_{j=1}^{n} |(x_j, x)|^2,\end{aligned}$$

故 $T \in \Pi_2(X,Y)$ 并且 $\Pi_2(T) \leqslant \sigma(T)$.

2° 只须证明 $\Pi_2(X,Y) \subset \Pi_p(X,Y)$. 若 $T \in \Pi_2(X,Y)$, 由 1°, T 可写成

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) f_n,$$

其中符号意义同上, 并且 $\sigma(T) = \|(\lambda_n)\|_2$. 定义算子 $T_1 : X \to l_1$,

$$T_1 x = (\lambda_1 (x, e_1), \lambda_2 (x, e_2), \cdots), \quad \forall x \in X,$$

则

$$\|T_1 x\|_1 = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) \right| \leqslant \|(\lambda_n)\|_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \right)^{1/2} \leqslant \|(\lambda_n)\|_2 \|x\|.$$

于是 $\|T_1\| \leqslant \sigma(T)$. 再定义 $S : l_2 \to Y, S(\alpha_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n, \forall (\alpha_n) \in l_2$, 则 $\|S\| \leqslant 1$.
于是 $T = SIT_1$, 其中 $I : l_1 \to l_2$, 是自然包含算子. 由例 3 知道 I 是 1 绝对可和的, 即 $T \in \Pi_1(X,Y)$, 从而

$$\Pi_2(X,Y) \subset \Pi_1(X,Y) \subset \Pi_p(X,Y).$$

定理 4 若 Banach 空间 Y 是 2 余型的, 则 $\forall q > 2$ 和 Banach 空间 X,

$$\Pi_2(X,Y) = \Pi_q(X,Y).$$

证明 只须证明 $\Pi_q(X,Y) \subset \Pi_2(X,Y)$. 设 $T \in \Pi_q(X,Y)$, 由 Grothendieck-Pietsch 定理

$$\|Tx\| \leqslant \Pi_q(T)\left(\int_{B(X^*)} |x^*x|^q \mathrm{d}\mu(x^*)\right)^{1/p}, \quad \forall x \in X.$$

由于 Y 是 2 余型的, 设 $C_2(Y)$ 是余型常数, 则

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^n \|Tx_j\|^2\right)^{1/2} &\leqslant C_2(Y)\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)Tx_j\right\|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \\ &\leqslant C_2(Y)\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)Tx_j\right\|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q} \\ &\leqslant C_2(Y)\Pi_q(T)\left(\int_0^1 \int_{B(X^*)} \left|\sum_{j=1}^n r_j(t)x^*x_j\right|^q \mathrm{d}t\mathrm{d}\mu(x^*)\right)^{1/q} \\ &= C_2(Y)\Pi_q(T)\left(\int_{B(X^*)} \int_0^1 \left|\sum_{j=1}^n r_j(t)x^*x_j\right|^q \mathrm{d}t\mathrm{d}\mu(x^*)\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

由 Khintchin 不等式,

$$\begin{aligned}\text{最后的式子} &\leqslant C_2(Y)\Pi_q(T)B_q\left(\int_{B(X^*)}\left(\sum_{j=1}^n |x^*x_j|^2\right)^{1/2} \mathrm{d}\mu(x^*)\right)^{1/q} \\ &\leqslant C_2(Y)\Pi_q(T)B_q\left(\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{j=1}^n |x^*x_j|^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

于是 $T \in \Pi_2(X,Y)$.

推论 2 设 $1 \leqslant p, q < \infty$, X, Y 是 Hilbert 空间, 则

$$\Pi_p(X,Y) = \Pi_q(X,Y).$$

定理 5 设 $1 \leqslant p < \infty$, 则每个 p 绝对可和算子是 w 紧的.

证明 由 Grothendieck-Pietsch 定理, (6.3) 成立. 记其中的 $B(X^*) = \Omega, \mu(x^*) = \mu, \omega = x^*, x^*x = x(\omega)$, 则

$$\|Tx\| \leqslant \Pi_p(T)\|x\|_{L_p(\mu)}. \tag{6.7}$$

于是 T 分解为两算子 SI 的乘积, 其中 $I: X \to L_p(\mu), x \mapsto x^*x$ 是从 X 到 $L_p(\mu)$ 的自然包含算子, $S: L_p(\mu) \to Y, x \mapsto Tx$, 上式表明 S 是有界算子. 注意 $L_p(\mu)$ 是自反空间, 于是作为子空间 X 是自反的, 其单位球 w 紧. 从而 T 是 w 紧算子.

又若 $\{x_n\}$ 是 X 中弱收敛序列, 不妨设 x_n 弱收敛于 0, 即 (x_n) 在 $B(X^*)$ 上点点收敛于 0. 由 Grothendieck-Pietsch 不等式和控制收敛定理, (Tx_n) 范数收敛于 0, 于是 T 全连续.

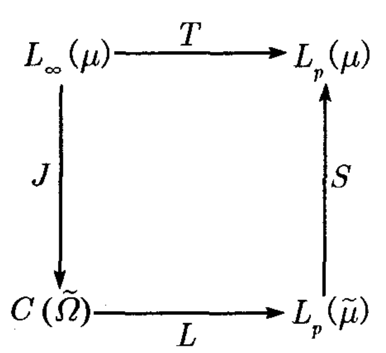
下面推论即 Dvoretzky-Rogers 定理.

推论 3 若对于某个 $p, 1 \leqslant p < \infty$, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^*x_n|^p < \infty$ $(\forall x^* \in X^*)$ 恒可推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$, 则 $\dim X < \infty$.

证明 若所述条件为真, 显然单位算子 I 是 p 绝对可和的. 由定理 5, I 是 w 紧的和全连续的. 若 $\{x_n\}$ 是 X 中的无穷序列, $\|x_n\| \leqslant 1$, 则 (Ix_n) 有子序列 (Ix_{n_k}) 弱收敛, 于是又依数收敛, 即 (x_{n_k}) 本身范数收敛. X 的单位球相对紧说明 $\dim X < \infty$.

定理 6 设 (Ω, Σ, μ) 是概率空间, $1 \leqslant p < \infty$, 则从 $L_\infty(\mu)$ 到 $L_p(\mu)$ 中的自然包含算子是 p 绝对可和的, 并且 $\Pi_p(T) = 1$.

证明 这里将引用一个事实, 它涉及某些布尔代数的知识, 即通过布尔代数的 Stone 表现定理, 对于给定的概率空间 (Ω, Σ, μ) 可以建立一个由某个紧 Hausdorff 空间的全体既开又闭子集构成的 σ 代数, 以及概率空间 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$, 使得 $L_\infty(\mu)$ 等距同构于 $C(\tilde{\Omega})$. 由此可以将 T 分解为 $T = SLJ$. 这里 $S: L_p(\tilde{\mu}) \to L_p(\mu)$ 是经过一个保测变换得来的, 故有界. 在例 3 中已经证明过, $L: C(\tilde{\Omega}) \to L_p(\tilde{\mu})$ 是 p 绝对可和的, 于是 T p 绝对可和.



定理 7 (Kwapien) 对于有限维 Banach 空间 X 上的恒等算子 $I_X, \Pi_2(I_X) = \sqrt{\dim X}$.

证明 1° 先证明

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{\dim X} \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^*x_i|^2\right)^{1/2},$$

从而 $\Pi_2(I_X) \leqslant \sqrt{\dim X}$.

固定 $x_1, \cdots, x_n \in X$, 考虑

$$T : l_2^n \to X, \quad T(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad \forall (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in l_2^n,$$

此时必有

$$T^* : X^* \to (l_2^n)^* = l_2^n, \quad T^* x^* = (x^* x_1, \cdots, x^* x_n)$$

并且

$$\|T\| = \|T^*\| = \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^* x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

映射 T 可写成 $Q\hat{T}$, 这里 $Q : l_2^n \to l_2^n / \mathrm{Ker} T = l_2^m, \mathrm{Ker} T$ 是 T 的核, 即空间 $\{x \in l_2^n : Tx = 0\}$; Q 是商映射, $\|Q\| = 1$; $\hat{T}$ 是一一映射与 T 有同一范数. 故

$$\begin{aligned} \Pi_2(T) = \Pi_2(\hat{T} I_{l_2^m} Q) &\leqslant \|\hat{T}\| \Pi_2(I_{l_2^m}) \|Q\| \\ &= \|T\| \Pi_2(I_{l_2^m}) = \|T\| \sqrt{m} \leqslant \|T\| \sqrt{\dim X}. \end{aligned}$$

上式中倒数第二步是由于 l_2^m 是 Hilbert 空间. 由定理 3 后面的说明知道

$$\Pi_2(I_{l_2^m}) = \sigma(I_{l_2^m}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{m},$$

于是

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{1/2} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant \Pi_2(T) \sup_{\|e^*\|_{l_2^m} \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |e^* e_i|^2 \right)^{1/2} \\ &= \Pi_2(T) \leqslant \|T\| \sqrt{\dim X} \\ &= \sqrt{\dim X} \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^* x_i|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

2° 由推论 1, 对于 $I_X : X \to X$, 存在紧 Hausdorff 空间 Ω 和 Ω 上的正则概率测度 μ, 使得 $I_X = SJI$. 其中 $I : X \to C(\Omega), J : C(\Omega) \to L_2(\mu), S : L_2(\mu) \to X$. 注意 $JI(X) = L_2(\mu), X$ 是有限维空间, 从而 $L_2(\mu) = l_2^{\dim X}$. 记 $JI = A$, 则 $A^{-1} = S$, 由推论 1 知道, $\|I\| \leqslant 1, \Pi_2(J) \leqslant 1$, $\|S\| = \Pi_2(I_X)$. 从而

$$\begin{aligned} \sqrt{\dim X} = \Pi_2(I_{l_2^{\dim X}}) = \Pi_2(AA^{-1}) &\leqslant \Pi_2(JI) \|A^{-1}\| \\ &\leqslant \|I\| \Pi_2(J) \|S\| \leqslant \Pi_2(I_X). \end{aligned}$$

定理得证.

为了下面的内容, 我们需要一个引理. 设 S^n 是 n 维实欧氏空间的单位球面, $S^n=\{x\in\Phi^n:\|x\|=1\}$, m 是 S^n 上旋转不变的 Borel 测度, $m(S^n)=1$. (x,y) 是通常的 $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)$ 的内积.

引理 1 对于任何 $x,y\in S^n$,

$$\int_{S^n}\text{sign}(x,u)\text{sign}(y,u)\mathrm{d}m(u)=1-\frac{2\theta}{\pi},\tag{6.8}$$

其中 $\theta=\theta(x,y)\in[0,\pi]$, $\cos\theta=(x,y)$.

证明 此结果通过一系列变换和计算得到. 选取 Φ^n 的一组基, 使 x 在其中有表达式 $x=(1,0,\cdots,0),y$ 有表达式 $(\cos\theta,\sin\theta,0,\cdots,0)$, 然后应用 S^n 上点的极坐标 $\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})$. 此时上述积分表达为 $n-1$ 维 Lebesgue 积分

$$\int_{S^n}g(u)\mathrm{d}m(u)=\frac{1}{S^n}\int_{t^{n-1}}g(u(\varphi))J(\varphi)\mathrm{d}\varphi,$$

其中

$$I^{n-1}=\{\varphi:0\leqslant\varphi_1<2\pi,0\leqslant\varphi_i\leqslant\pi,2\leqslant i\leqslant n-1\};$$

$$u(\varphi)=(u_1(\varphi),\cdots,u_n(\varphi));$$

$$u_1(\varphi)=\prod_{i=1}^{n-1}\sin\varphi_i,u_k(\varphi)=\cos\varphi_{k-1}\prod_{i=1}^{n-1}\sin\varphi_i,\quad 2\leqslant k\leqslant n-1,$$

$$u_n(\varphi)=\cos\varphi_{n-1};$$

$$J(\varphi)=\prod_{i=2}^{n-1}(\sin\varphi_i)^{i-1};$$

$$|S^n|=\int_{I^{n-1}}J(\varphi)\mathrm{d}\varphi=2\pi\prod_{i=2}^{n-1}\int_0^{\pi}(\sin\varphi_i)^{i-1}\mathrm{d}\varphi_i.$$

设 $h(u)=(x,u)(y,u)=u_1(u_1\cos\theta+u_2\sin\theta)$, 则将 u_1,u_2 代入得到

$$h(u(\varphi))=\left(\prod_{i=2}^{n-1}\sin\varphi_1\right)^2\sin\varphi_i(\sin\varphi_1\cos\theta+\cos\varphi_1\sin\theta).$$

于是

$$\begin{aligned}g(u)&=\text{sign}h(u(\varphi))=\text{sign}\sin\varphi_1(\sin\varphi_1\cos\theta+\cos\varphi_1\sin\theta)\\&=\text{sign}\sin\varphi_1\sin(\varphi_1+\theta)\\&=\begin{cases}1,&\varphi_1\in(0,\pi-\theta)\cup(\pi,2\pi-\theta),\\-1,&\varphi_1\in(\pi-\theta,\pi)\cup(2\pi-\theta,2\pi),\\0,&\text{其他}.\end{cases}\end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}\int_{S^n} g(u)\mathrm{d}m(u) &= \frac{1}{|S^n|}\int_{I^{n-1}} \operatorname{sign}\sin\varphi_1 \sin(\varphi_1+\theta)J(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{|S^n|}\int_0^{2\pi} \operatorname{sign}\sin\varphi_1 \sin(\varphi_1+\theta)\mathrm{d}\varphi_1 \cdot \prod_{i=2}^{n-1}\int_0^{\pi}(\sin\varphi_i)^{i-1}\mathrm{d}\varphi_i \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sign}\sin\varphi_1 \sin(\varphi_1+\theta)\mathrm{d}\varphi_1 = 1-\frac{2}{\pi}\theta.\end{aligned}$$

定理 8 设 $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 是实矩阵, M 是一正数, 使得对于任何实数 $t_1,\cdots,t_n$, $s_1,\cdots,s_n$, 当 $|t_i|\leqslant 1, |s_j|\leqslant 1$ 时都有

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}t_i s_j\right| \leqslant M. \tag{6.9}$$

则存在常数 K_{G} 使得对于实 Hilbert 空间 X 中的任何向量 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$, 当 $\|x_i\|\leqslant 1$, $\|y_j\|\leqslant 1$ 时就有

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_i,y_j)\right| \leqslant K_G M \tag{6.10}$$

(称 K_{G} 是 Grothendieck 常数, $K_G\leqslant(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}})/2$).

证明 由 (6.10) 式的齐性, 不妨设 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n\in X$, $\|x_i\|=\|y_i\|=1$, 对于任何 $u\in S^{2n}$(S^{2n} 是 Φ^{2n} 的单位球面), 令 $t_i(u)=\operatorname{sign}(u,x_i), s_j(u)=\operatorname{sign}(u,y_j), 1\leqslant i,j\leqslant n$, 由 (6.9) 式

$$-M\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}t_i(u)s_j(u)\leqslant M,\quad u\in S^{2n}.$$

对此式各部分关于 R^n 上的旋转不变测度积分, 由引理得到

$$-\frac{\pi}{2}M\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{\pi}{2}-\theta(x_i,y_i)\right)\leqslant \frac{\pi}{2}M.$$

令 $a_{ij}^{(1)}=a_{ij}\left(\frac{\pi}{2}-\theta(x_i,y_i)\right)$, 以 $\frac{\pi}{2}M$ 代替 M, 则类似于 (6.9) 的式子成立. 对新的不等式再积分, 得到

$$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 M\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{\pi}{2}-\theta(x_i,y_i)\right)^2\leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 M.$$

继续这一过程, 对于任何自然数 n 有

$$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^n M \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{\pi}{2}-\theta(x_i,y_i)\right)^n \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^n M. \tag{6.11}$$

由于

$$\begin{aligned}(x_i,y_i)=\cos\theta(x_i,y_i)&=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta(x_i,y_i)\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}\left(\frac{\pi}{2}-\theta(x_i,y_i)\right)^{2n+1},\end{aligned}$$

于是从 (6.11) 得出

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_i,y_j)\right| \leqslant M\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!!}=\frac{M}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}).$$

推论 4 设 $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 是满足 (6.9) 的实矩阵, 则对于内积空间中的任何向量 $x_1,\cdots,x_n$,

$$\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\right\| \leqslant K_G M \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\|x_i\|. \tag{6.12}$$

证明 取 $y_j, \|y_j\|=1$ 使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i, y_j\right)=\left\|\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\right\|,$$

代入 (6.10) 即得到 (6.12).

让我们转到 $\mathcal{L}_p$ 空间之间可和算子的关系. $\mathcal{L}_p$ 空间是 Lindenstrauss, Pelczynski 等在研究 Grothendieck 不等式与绝对可和算子时提出的一类空间.

定义 2 Banach 空间 X 称为是 $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ 空间 $(1\leqslant p\leqslant\infty, 1\leqslant\lambda<\infty)$, 若对于 X 的每个有限维子空间 B, X 中存在包含 B 的有限维子空间 E(如 $\dim E=n$), 使得 $d(E,l_p^n)\leqslant\lambda$. X 称为 $\mathcal{L}_p$ 空间, 若对于某个 λ, X 是 $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ 空间.

这里 l_p^n 是赋予 l_p 范数的 n 维空间,

$$d(E,l_p^n)=\inf\{\|T\|\|T^{-1}\|:T:E\to l_p^n \text{ 为同构映射}\},$$

其中 inf 是关于全体同构映射而取的.

一些基本事实可以得到: $L_p(\mu)(1\leqslant p<\infty)$ 对于任何 $\lambda>1$ 是 $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ 空间; 若 Ω 是某个紧 Hausdorff 空间, 则 $C(\Omega)$ 对于任何 $\lambda>1$ 是 $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ 空间. 反过来, 每个空

间 $\mathcal{L}_p$ 对于适当的测度 μ 同构于 $L_p(\mu)$ 的某个子空间. 而空间 $\mathcal{L}_2$ 类与 Hilbert 空间类相同.

定理 9 设 X 是 $\mathcal{L}_1$ 空间, Y 是 Hilbert 空间, 则 $B(X,Y) \subset \Pi_1(X,Y)$. 这里 $B(X,Y)$ 表示从 X 到 Y 的有界线性算子全体.

证明 设 X 是 $\mathcal{L}_{1,\lambda}$ 空间, 对于 $T \in B(X,Y)$, 不妨设 $x_1,\cdots,x_n$ 使得 $\sup\limits_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum\limits_{i=1}^n |x^*x_i| = 1$. 由定义, X 中存在子空间 $E, \dim E = m < \infty$ 和同构映射 $S: l_1^m \to E$ 使得 $\|S\| = 1, \|S^{-1}\| \leqslant \lambda$. 令 $y_i = S^{-1}x_i$, 若

$$y_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}e_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

其中 e_j 是 l_1^m 的标准基. 如果 $t_1,\cdots,t_m$ 与 $s_1,\cdots,s_m$ 是任意实数, $|t_i| \leqslant 1, |s_j| \leqslant 1$, 注意 $(l_1^m)^* = l_\infty^m$, 取 $y^* \in l_\infty^m, y^* = (s_1,\cdots,s_m)$, 则 $\|y^*\| \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i,j} a_{ij}t_is_j\right| &\leqslant \sum_i |t_i|\left|\sum_j a_{ij}s_j\right| \leqslant \sum_i \left|\sum_j a_{ij}s_j\right| \\ &= \sum_i |y^*(y_i)| = \sum_i |y^*(S^{-1}x_i)| \\ &= \sum_i |(S^{-1})^*y^*x_i| \leqslant \|(S^{-1})^*y^*\| \leqslant \lambda.\end{aligned}$$

现在设 $u_i = Tx_i = TSy_i = \sum\limits_{j=1}^m a_{ij}TSe_j, 1 \leqslant i \leqslant n$, 则

$$\sum_i \|u_i\| = \sum_i \left\|\sum_j a_{ij}TSe_j\right\|.$$

由定理 8 知道

$$\sum_{i=1}^n \|Tx_i\| \leqslant K_G\lambda \sup_{1\leqslant j\leqslant m} \|TSe_j\| \leqslant K_G\lambda\|TS\| \leqslant K_G\lambda\|T\|.$$

定理得证.

定理 10 设 X,Y 是无穷维 Banach 空间, X 具有无条件基, 若 $B(X,Y) \subset \Pi_1(X,Y)$, 则 X 必同构于某个 $l_1(\Gamma)$, Y 必同构于 Hilbert 空间.

证明 $B(X,Y), \Pi_1(X,Y)$ 都是 Banach 空间, 于是必有 $K > 0$ 使得

$$\Pi_1(T) \leqslant K\|T\|, \quad \forall T \in B(X,Y).$$

不妨设 (x_n) 是 X 的规范正交基 (当然, 这要求 X 是可分的, 但对于不可分的情况, 也可作适当的处理, 使之变为可分情况, 注意我们这里是 $l_1(\Gamma)$, Γ 是任意指标集), 由 Dvoretzky-Rogers 定理, 对于每个 n, 存在 $y_1,\cdots,y_n \in Y, \|y_i\|=1$ 使得

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i\right\| \leqslant 2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)^{1/2}, \tag{6.13}$$

$\forall \lambda_i \in R(1\leqslant i\leqslant n)$. 若 u_i 是 n 个正数, $\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2=1$, 定义

$$T: X\to Y,\quad Tx=\sum_{i=1}^{n}u_i a_i y_i,\quad \forall x=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i.$$

由无条件性质, 存在 $C>0$ 使得 $\left\|\sum\limits_i \pm a_i x_i\right\| \leqslant C\left\|\sum\limits_i a_i x_i\right\|$. 显然 $|a_i|\leqslant C\left\|\sum\limits_i a_i x_i\right\|$, $i\geqslant 1$, 从而

$$\|Tx\| \leqslant 2\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i u_i|^2\right)^{1/2} = 2C\|x\|,$$

故 $\|T\|\leqslant 2C, \Pi_1(T)\leqslant K\|T\| \leqslant 2CK$.

又由于每个 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i x_i \in X$ 满足 $\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}\pm a_i x_i\| \leqslant C\|x\|$. 注意 $\forall x_1,\cdots,x_n$, $\sup\limits_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum\limits_{i=1}^{n}|x^* x_i| = \max\limits_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right\|$, 于是 $\forall x=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i x_i \in X$,

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|u_i = \sum_{i=1}^{n}\|Ta_i x_i\| \leqslant \Pi_1(T)C\|x\| \leqslant 2C^2K\|x\|,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{1/2} = \sup\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|u_i : \sum_{i=1}^{n}|u_i|^2=1\right) \leqslant 2C^2K\|x\|.$$

现在定义 $S: X\to Y, x_i\mapsto y_i(1\leqslant i\leqslant n)$, 由 (6.13),

$$\|Sx\| \leqslant 2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2} \leqslant 4C^2K\|x\|.$$

由此知 $\Pi_1(S)\leqslant K\|S\| \leqslant 4C^2K^2$ 并且

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|a_i| = \sum_{i=1}^{n}\|Sa_i x_i\| &\leqslant \Pi_1(S)\sup_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i x_i\right\| \\ &\leqslant \Pi_1(S)C\|x\| \leqslant 4C^3K^3\|x\|,\end{aligned}$$

所以 $\forall x=\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$,

$$\|x\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|a_i| \leqslant 4C^3K^2\|x\|.$$

X 同构于 l_1.

为证 Y 同构于 Hilbert 空间, 只须对每个可分子空间 Y_0 加以证明. 我们知道每个可分 Banach 空间是 l_1 的商空间. 于是存在到上的有界线性算子 $T_0: X \to Y_0$. 由假设 T_0 是 1 绝对可和的, 从而 2 绝对可和, 由推论 1 存在 $T_1: X \to L_2(\mu), T_2: L_2(\mu) \to Y_0$, 使得 $T=T_2T_1$. 由 T_0 到上, T_2 必是商映射. 因此 Y_0 同构于 Hilbert 空间的商空间, 从而自身同构于 Hilbert 空间.

定理 11 (Grothendieck-Pelczynski)　设 X 是 Banach 空间, 若存在常数 K 使得每个满足

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}t_i s_j\Big| \leqslant 1, \quad \forall t_i, s_j, |t_i| \leqslant 1, \quad |s_j| \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n$$

的实矩阵 $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 都有

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_j^* x_i\Big| \leqslant K \sup_{1\leqslant j\leqslant n}\|x_i\| \sup_{1\leqslant j\leqslant n}\|x_j^*\|, \quad \forall x_i^* \in X, x_j^* \in X^*, \tag{6.14}$$

则 X 同构于 Hilbert 空间.

证明　利用条件 (6.14), 与定理 8 一样的证明可知每个 $T \in B(l_1, Y)$ 是绝对可和的. 由定理 9, Y 同构于 Hilbert 空间.

4.7　K 凸性与一致包含 l_p^n

本节将叙述关于 Banach 空间的以下条件的等价性: ① K 凸性, ② B 凸性, ③不一致包含 l_p^n, ④ R-p 型 $(p>1)$. 这些性质各有不同的来源. 例如, K 凸性来自算子的有界延拓, B 凸性来自大数定律的考察, 至于 R-p 型前面已经讨论过. 此外我们还将进一步讨论 R-p 型与 R-q 余型的对偶性质.

定义 1　设 E, F 是 Banach 空间, $\lambda \geqslant 1$, 称 E, F 是 λ 同构的, 若存在同构映射 $T: E \to F$ 使得 $\|T\|\,\|T^{-1}\| \leqslant \lambda$, 记为 $E \overset{\lambda}{\sim} F$. 令

$$d(E,F)=\inf\{\lambda : E \overset{\lambda}{\sim} F\},$$

称 $d(E,F)$ 是 E 与 F 的 Banach-Mazur 距离.

定义 2 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty, \lambda > 1$, 称 Banach 空间 X λ 一致包含 l_p^n, 若 $\forall n$, X 中存在子空间 X_n 使得 $X_n \overset{\lambda}{\sim} l_p^n$. 称 X 一致包含 l_p^n, 若 $\forall \lambda > 1$, X λ 一致包含 l_p^n. 这里 l_p^n 是指 n 维 l_p 空间.

我们知道 R 函数序列 $(r_n, n \geqslant 1)$ 是 $L_2(\mu)$ 中的正交函数系, 但它并非完备的. 记 R_1 是 $L_2(\mu)$ 到由 $(r_n, n \geqslant 1)$ 张成的闭子空间上的投影算子. 此外记 I_X 是 Banach 空间 X 上的恒等算子, 现在考虑 $L_2(\mu) \otimes X$ 上的算子 $R_1 \otimes I_X$:

$$(R_1 \otimes I_X)\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n (R_1\varphi_i)x_i, \quad \forall \varphi_i \in L_2(\mu), x_i \in X.$$

定义 3 Banach 空间 X 称为是 K 凸的, 若 $R_1 \otimes I_X$ 可延拓为 $L_2(\mu, X)$ 上的有界算子. 此时记 $K(X)$ 是 $R_1 \otimes I_X$ 在 $L_2(\mu, X)$ 上的范数, 即

$$K(X) = \|R_1 \otimes I_X\|_{L_2(\mu,X)\to L_2(\mu,X)}.$$

例 1 设 $X = l_1^{2^n}$, 记 $D_n = \{-1, 1\}^n$, 以 μ 为 D_n 上的 Haar 测度 (2.1 节例 4), 以 b_i 记 D_n 上的第 i 个坐标, 注意 $l_1^{2^n}$ 可以与 $L_1(D_n)$ 建立等距同构关系. 将 b_i 看成 $L_1(D_n)$ 的元素, 对于函数

$$F(t) = \prod_{i=1}^n (1 + r_i(t)b_i),$$

则 $\|F(t)\|_X = 1$, 从而 $\|F\|_{L_2(\mu,X)} = 1$, 但

$$((R_1 \otimes I_X)F)(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t)b_i,$$

$$\|(R_1 \otimes I_X)F\|_{L_2(\mu,X)} = E\left\|\sum_{i=1}^n r_i\right\| \geqslant A_1 n^{1/2}.$$

后者是根据 Khintchin 不等式, 于是 $K(l_1^{2^n}) \geqslant A_1 n^{1/2} \to \infty$. 由此知道一个 K 凸空间 X 不可能一致包含 l_1^n. 因为 l_1^n 作为 X 的闭子空间必有 $K(l_1^n) \leqslant K(X)$, 得出矛盾.

由此还知道 $l_1, L_1, l_\infty, L_\infty, c_0$ 都不是 K 凸的.

例 2 空间 l_2 是 K 凸的.

设 $f \in L_2(\mu) \otimes l_2$, 若 (e_i) 是 l_2 的标准基, 令 $\varphi_i = (f, e_i)$, 则

$$\|f\|_{L_2(l_2)} = (E\|f\|^2)^{1/2} = \left(E\sum_{i=1}^\infty \|\varphi_i\|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^\infty \|\varphi_i\|_2^2\right)^{1/2}.$$

另一方面,

$$((R_1\otimes I_{l_2})f(\omega),e_i)=R_1\,(I_{l_2}f(\omega),e_i)=R_1\varphi_i,$$

所以

$$\|(R_1\otimes I_{l_2})f\|_{l_2}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|R_1\varphi_i|^2\right)^{1/2},$$

$$\begin{aligned}\|(R_1\otimes I_{l_2})f\|_{L_2(l_2)}&=\left[E\left(\sum_{i=1}^{\infty}(R_1\varphi_i)^2\right)\right]^{1/2}\\&\leqslant\|R_1\|\left(E\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i|^2\right)^{1/2}=\|R_1\|\,\|f\|_{L_2(l_2)}.\end{aligned}$$

从而

$$\|R_1\otimes I_{l_2}\|_{L_2(l_2)\to L_2(l_2)}\leqslant\|R_1\|<\infty.$$

由此还容易得出, 同构于 Hilbert 空间的 Banach 空间是 K 凸的.

下面定理可以看成 4.1 节定理 4(3) 的逆, 但需要补充空间的 K 凸条件.

定理 1 (Maurey, Pisier) 设 X 是 K 凸 Banach 空间, X^* 是 X 的共轭, 若 X^* 是 R-q 余型的 $(2\leqslant q\leqslant\infty)$, 则 X 是 R-p 型的, 这里 p,q 是一对共轭数.

证明 X^* 是 q 余型的, 故存在 $C>0$ 使得 $\forall x_1^*,\cdots,x_n^*\in X^*,n\geqslant1$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i^*\|^q\right)^{\frac1q}\leqslant C\left\|\sum_{i=1}^{n}r_ix_i^*\right\|_{L_2(X^*)}.\tag{7.1}$$

以下对于 $x_1,\cdots,x_n\in X$, 记 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 并且

$$|||x|||=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i^*x_i;\left\|\sum_{i=1}^{n}r_ix_i^*\right\|_{L_2(X*)}\leqslant1\right\}.\tag{7.2}$$

设 $S=\left\{\sum_{i=1}^{n}r_ix_i^*:t\in[0,1]\right\},S\subset L_2(X*)$. 注意 S 是闭子空间, 故

$$S=S^{\perp\perp}=\left(\frac{L_2(X)}{S^{\perp}}\right)^*.$$

(7.2) 又可写成 $|||x|||=\sup\left\{E\sum_{i=1}^{n}(r_ix_i)(r_jx_j^*):\left\|\sum_{i=1}^{n}r_ix_i^*\right\|_{L_2(X*)}\leqslant1\right\}$, $|||\cdot|||$ 是共轭范数. 根据商范数得到

$$|||x|||=\inf\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}r_ix_i+\varPhi\right\|_{L_2(X)}:\varPhi\in L_2(X),Er_i\varPhi=0,1\leqslant i\leqslant n\right\}.\tag{7.3}$$

现在由 (7.1) 和 (7.2) 知道

$$|||x|||\leqslant\sup\left\{\left(\sum_{i=1}^n\|x_i^*\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}:\left\|\sum_{i=1}^n r_ix_i^*\right\|_{L_2(X*)}\leqslant 1\right\}\leqslant C\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

不妨设 $\sum_{i=1}^n\|x_i\|^p\leqslant 1$, 由 (7.3), 存在 $\Phi\in L_2(X), Er_i\Phi=0(1\leqslant i\leqslant n)$ 使得 $\left\|\sum_{i=1}^n\varepsilon_ix_i+\Phi\right\|_{L_2(X)}\leqslant C$. 但 $\sum_{i=1}^n\varepsilon_ix_i=(R_1\otimes I_X)\left(\sum_{i=1}^n\varepsilon_ix_i+\Phi\right)$, 所以

$$\left\|\sum_{i=1}^n\varepsilon_ix_i\right\|_{L_2(X)}\leqslant\|R_1\otimes I_X\|\left\|\sum_{i=1}^n\varepsilon_ix_i+\Phi\right\|_{L_2(X)}\leqslant K(X)C.$$

由范数的齐性得到

$$\left\|\sum_{i=1}^n\varepsilon_ix_i\right\|_{L_2(X)}\leqslant K(X)C\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7.4}$$

X 是 p 型空间.

推论 1 (1) 若 X^* 是 R-p 型的, 则 X 为 R-q 余型的;

(2) 若 X 是 K 凸空间并且是 R-q 余型的, 则 X^* 是 R-p 型的.

证明 (1) 可以根据 4.1 节定理 4(iii) 得到. 实际上, 若 X^* 是 p 型的, 则 X^{**} 是 q 余型的, 作为子空间 X 是 q 余型的.

为证明 (2), 只须注意到 $L_2(\mu,X)^*=L_2(\mu,X^*)$ 并且 $R_1\otimes I_X$ 在 $L_2(\mu,X)$ 上有界当且仅当 $R_2\otimes I_{X^*}$ 在 $L_2(\mu,X^*)$ 上有界, 因此 X K 凸当且仅当 X^* K 凸, 剩下的证明与定理 1 类似.

定理 2 (Pisier) Banach 空间 X 是 K 凸的当且仅当 X 不一致包含 l_1^n.

这一定理的必要性已在例 1 末尾说明了. Pisier 不仅证明了充分性成立, 而且证明了 K 凸性与一种特殊类型的算子半群的解析性, 以及空间的局部 π-Euclid 性质等价. 连同充分性的证明这里不拟叙述了.

定义 4 (Beck) X 称为 B 凸空间, 若存在自然数 k 和 $\varepsilon>0$, 对于 X 的单位球中的任何元素 $x_1,\cdots,x_k$ 都可取一组 "+", "−" 符号使得

$$\|x_1\pm x_2\pm\cdots\pm x_k\|<k(1-\varepsilon). \tag{7.5}$$

定义 5 称 X 满足 (B) 型大数定律, 若任何 X 值独立 R.V. 序列 (d_n), 当 $Ed_n=0, E\|d_n\|^2\leqslant M<\infty$ 时强大数定律成立.

定理 3 设 X 是 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) X 是 B 凸的;

(ii) X 满足 (B) 型大数定律;

(iii) X 是 R-p 型的, $p>1$;

(iv) X 不一致包含 l_1^n.

证明 由 Hoffmann-Jørgensen, Pisier 定理 (4.3 节定理 1) 可得到 (iii) $\Rightarrow$ (ii). 实际上, 例如, X 是 $p(>1)$ 型的, $\{d_n\}$ 满足 (B) 型大数定律的条件, 由于 $E\|d_n\|^p \leqslant (E\|d_n\|^2)^{\frac{p}{2}} \leqslant M^{\frac{p}{2}} < \infty$, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} E\|d_n\|^p \leqslant M^{p/2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} < \infty.$$

从而 $n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} d_i \to 0$ a.e. (B) 型大数定理的结论成立.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 若 X 不是 B 凸的, 由定义 $\forall k$ 和 $\varepsilon>0, \exists x_1,\cdots,x_k, \|x_i\| \leqslant 1 (1\leqslant i \leqslant k)$, 对于 $\pm$ 号的任何选择都有

$$\|x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_k\| \geqslant k(1-\varepsilon).$$

选取正数序列 $\varepsilon_i, \delta_i \to 0$, 而后取自然数 $k_1 > \delta_1^{-1}(1-\delta_1)$ 和 $x_1^{(1)},\cdots,x_{k_1}^{(1)}$ 使得

$$\left\|x_1^{(1)} \pm \cdots \pm x_{k_1}^{(1)}\right\| \geqslant k_1(1-\varepsilon_i), \quad \left\|x_i^{(1)}\right\| \leqslant 1,$$

$\pm$ 号可任意选取将不再复述. 归纳地, 对于每个 $n>1$, 令 $m_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} k_i$, 取 $k_n > \delta_n^{-1}(1-\delta_n)m_n$ 和相应元素 $x_1^{(n)},\cdots,x_{k_n}^{(n)}$ 使得

$$\left\|x_1^{(n)} \pm \cdots \pm x_{k_n}^{(n)}\right\| \geqslant k_n(1-\varepsilon_n),$$

注意 $\dfrac{k_n}{m_{n+1}} > 1-\delta_n, \dfrac{m_n}{m_{n+1}} < \delta_n$.

现在定义独立 R.V. 序列 (d_i). 对于每个自然数 i, 若有 $m_j < i \leqslant m_{j+1}$, 即 $i = m_{j+r}$, 其中 $1 \leqslant r \leqslant k_j$, 则令 $x_i = x_r^{(j)}$. 再令

$$P(d_i = x_i) = P(d_i = -x_i) = 1/2$$

且 $\{d_i\}$ 彼此独立, 则 $Ed_i = 0$ 并且 $E\|d_i\|^2 = \|x_i\|^2 \leqslant 1$. 但

$$\left\|\frac{1}{m_{j+1}}\sum_{i=1}^{m_{j+1}} d_i(\omega)\right\| \geqslant \left\|\frac{1}{m_{j+1}}\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} d_i(\omega)\right\| - \left\|\frac{1}{m_{j+1}}\sum_{i=1}^{m_j} d_i(\omega)\right\|$$

$$\geqslant \frac{1}{m_{j+1}}\left\|x_1^{(j)}\pm\cdots\pm x_{k_j}^{(j)}\right\|-\frac{1}{m_{j+1}}m_j$$
$$\geqslant \frac{1}{m_{j+1}}k_j(1-\varepsilon_j)-\frac{m_j}{m_{j+1}}\geqslant(1-\delta_j)(1-\varepsilon_j)-\delta_j,$$

从而 $\limsup\limits_{n\to\infty}\left\|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n d_i(\omega)\right\|=1$ a.e., 与 (ii) 矛盾.

(i) $\Rightarrow$ (iv). 反设 X 一致包含 l_1^n, 则 $\forall\varepsilon>0$ 和 $n\geqslant 1,\exists x_1,\cdots,x_n$, 不妨设 $\|x_i\|=1$, 使得任何标量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 有

$$(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^n|\alpha_i|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i\right\|\leqslant\sum_{i=1}^n|\alpha_i|, \tag{7.6}$$

此时无论 $\alpha_i=\pm1$ 都有 $(1-\varepsilon)n\leqslant\left\|\sum\limits_{i=1}^n\pm x_i\right\|\leqslant n$, 与 B 凸性矛盾.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). 对于自然数 n, 记

$$\lambda_n=\inf\left\{\lambda:\left(\int_0^1\|r_i(t)x_i\|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\leqslant\lambda\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2\right)^{\frac12},\quad\forall x_1,\cdots,x_n\in X\right\}. \tag{7.7}$$

我们首先证明

$$\lambda_{nk}\leqslant\lambda_n\lambda_k,\quad\forall n,k\in N. \tag{7.8}$$

为此设 $x_1,\cdots,x_{nk}\in X$, 令 $x_i(\theta)=\sum\limits_{j=(i-1)k+1}^{ik}r_j(\theta)x_j$. $\theta\in[0,1]$, $1\leqslant i\leqslant n$, 则

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\theta)\right\|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\leqslant\lambda_n\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n\|x_i(\theta)\|^2\right)^{1/2},$$

于是

$$\left(\int_0^1\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\theta)\right\|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta\right)^{1/2}\leqslant\lambda_n\sqrt{n}\left(\int_0^1\sum_{i=1}^n\|x_i(\theta)\|^2\,\mathrm{d}\theta\right)^{1/2}.$$

最后有

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{nk}r_j(t)x_j\right\|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}=\left(\int_0^1\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\theta)\right\|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta\right)^{1/2}$$
$$\leqslant\lambda_n\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n\int_0^1\left\|\sum_{j=(i-1)k+1}^{ik}r_i(\theta)x_j\right\|^2\mathrm{d}\theta\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \lambda_n \lambda_k \sqrt{nk} \left(\sum_{j=1}^{nk} \|x_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

故得到 (7.8).

现在有两种情况：(1) 每个 $\lambda_n = 1$, 此时 $\forall \varepsilon > 0, \exists x_1, \cdots, x_n$ 使得

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 \mathrm{d}t \geqslant (1-\varepsilon) n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2. \tag{7.9}$$

注意 4.1 节开头所说的均值性质, 对于 $r_1, \cdots, r_n$ 有 2^n 种选择, 设有 K 个满足

$$\left\| \sum_{i=1}^n r_i x_i \right\|^2 \leqslant (1-\sqrt{\varepsilon}) n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2,$$

对于 (7.9) 有

$$(1-\varepsilon) n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \leqslant \frac{1}{2^n} K (1-\sqrt{\varepsilon}) n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + \frac{1}{2^n}(2^n - K) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\| \right)^2.$$

由 $\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\| \right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$ 得出 $K \leqslant 2^n \sqrt{\varepsilon}$. 由于 $\varepsilon < 2^{-2^n}$ 知道 $K = 0$, 于是不论 $r_i = \pm 1$ 如何, 相应的 $x_1, \cdots, x_n$ 都有

$$\left\| \sum_{i=1}^n r_i x_i \right\|^2 \geqslant (1-\sqrt{\varepsilon}) n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

仍将 $\sqrt{\varepsilon}$ 换为 ε, 若 $\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 = n$, 则 $\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\| \right)^2 \geqslant (1-\varepsilon) n^2$. 于是

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\|x_i\| - \|x_j\|)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\|x_i\|^2 - 2\|x_i\|\|x_j\| + \|x_j\|^2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(n\|x_i\|^2 - 2\|x_i\| \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\| \right) + \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right) \\
&= \frac{n}{2} \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 - \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\| \right) \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\| \right) + \frac{n}{2} \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\|x_i\| - \|x_j\|)^2 = n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 - \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right) \leqslant \varepsilon n^2. \tag{7.10}$$

故 $\max\|x_i\|-\min\|x_i\|\leqslant\sqrt{2\varepsilon}n$. 这说明 x_i 的范数彼此非常接近从而接近于 1, 特别地

$$1-\sqrt{2\varepsilon}n\leqslant\|x_i\|\leqslant 1+\sqrt{2\varepsilon}n. \tag{7.11}$$

令 $y_i=x_i/\|x_i\|$, $\forall\alpha_i\in R$, 若 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_i|=1$, 取 $\beta_i=(1-\sqrt{2\varepsilon}n)\alpha_i/\|x_i\|$, $\varepsilon_i=\text{sign}\beta_i$, 则 $|\beta_i|\leqslant 1$ 并且

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)^{1/2}n\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right\|&=\left\|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-|\beta_i|)x_i-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\right\|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}(1-|\beta_i|)\|x_i\|+\left\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\right\|\\&\leqslant n(1+\sqrt{2\varepsilon}n)+(1-\sqrt{2\varepsilon}n)\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right\|\end{aligned}$$

或者

$$1=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\geqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right\|\geqslant\frac{(1-\varepsilon)^{1/2}n-n(1-\sqrt{2n}\varepsilon)}{1-\sqrt{2\varepsilon}n}.$$

令 $\delta=\dfrac{1-\sqrt{2\varepsilon}n-(1-\varepsilon)^{1/2}n+n(1+\sqrt{2}n\varepsilon)}{1-\sqrt{2\varepsilon}n}$, 当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\delta\to 1$, 故总可以得到 $\delta>0$. 由范数的齐次性, 对任何 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in R$,

$$(1-\delta)\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$$

(由此式还知 $y_1,\cdots,y_n$ 线性无关). X 一致包含 l_1^n, 与条件 (iv) 矛盾.

(2) $\exists\, k\in N$ 使得 $\lambda_k<1$, 取 $q\geqslant 2$, 使得 $\lambda_k=k^{-\frac{1}{q}}$, 则由 (7.7),

$$\lambda_{k^n}\leqslant(\lambda_k)^n=k^{-\frac{n}{q}}. \tag{7.12}$$

我们证明 $\forall\, 1<r<p, X$ 具有 R-p 型. 实际上, $\forall n$, $x_1,\cdots,x_n\in X$, 记

$$A_i=\left\{j:\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\|x_j\|^r\right)^{1/r}}{k^{(i+1)/r}}<\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\|x_j\|^r\right)^{1/r}}{k^{i/r}}\right\},$$

若以 $|A_i|$ 记 A_i 的基数, 则

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\right\|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\leqslant\left(\sum_{i\geqslant 0}\int_0^1\left\|\sum_{j\in A_i}r_j(t)x_j\right\|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{i\geqslant 0}\left(\int_0^1\left\|\sum_{j\in A_i} r_j(t)x_j\right\|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}\\
&\leqslant \sum_{i\geqslant 0}\lambda_{\bar{A}_i}\sqrt{|A|}\left(\sum_{j\in A_i}\|x_j\|^2\right)^{1/2}\\
&\leqslant \sum_{i\geqslant 0}\lambda_{\bar{A}_i}\sqrt{|A_i|}\sqrt{|A_i|}\frac{1}{k^{i/r}}\left(\sum_{j=1}^n\|x_j\|^r\right)^{1/r}.
\end{aligned}\tag{7.13}$$

又

$$\left(\sum_{j=1}^n\|x_j\|^r\right)^{1/r}\geqslant\left(\sum_{j\in A_i}\|x_j\|^r\right)^{1/r}\geqslant |A_i|\left(\sum_{j=1}^n\|x_j\|^r\right)^{1/r}/k^{(i+1)/r},$$

从而 $|A_i|^{1/r}\leqslant k^{(i+1)/r}$, 此外由 λ_n 的定义, 当 $m\leqslant n$ 时, $\sqrt{m}\lambda_m\leqslant\sqrt{n}\lambda_n$. 故由 (7.12),

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geqslant 0}\lambda_{\bar{A}_i}|A_i|k^{-i/r}&\leqslant\sum_{i\geqslant 0}\lambda_{k^{i+1}}k^{i+1}k^{-i/r}\leqslant\sum_{i\geqslant 0}k^{-(i+1)/q}k^{i+1}k^{-i/r}\\
&\leqslant\sum_{i\geqslant 0}k^{i(1-\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}=\sum_{i\geqslant 0}k^{i(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}<\infty.
\end{aligned}$$

证毕.

推论 2　设 X 是 Banach 空间, 则 X B 凸当且仅当 X K 凸.

对于 Banach 空间 X, 记

$$p_X=\sup\{p: X \text{ 是 R-}p\text{ 型的}\},$$
$$q_X=\inf\{q: X \text{ 是 R-}q\text{ 余型的}\}.$$

现在我们有

定理 4　设 X 是 Banach 空间, 若 $p_X>1$, 则 $p_X^{-1}+q_X^{-1}=1$.

因为此时 X 是 K 凸的, 由推论 1 得出所要的结论. 但要注意 $p_X>1$ 的条件不能少. 例如, l_1 有 2 余型, 而 c_0 仅有 1 型.

定理 5 (Maurey-Pisier-Krivine)　设 X 是无穷维 Banach 空间, 则

(i) X 一致包含 $l_{p_X}^n$;

(ii) X 一致包含 $l_{q_X}^n$.

我们不准备在证明此定理, 只给出它的几种等价形式.

首先, 若 X 一致包含 l_p^n, 即 $\forall\varepsilon>0$ 和 $n\geqslant 1$, 存在 $x_1,\cdots,x_n\in X$, $\|x_i\|=1$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 使得

$$\left(\sum_{i=1}^n|\alpha_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left\|\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i\right\|\leqslant(1+\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^n|\alpha_i|^p\right)^{1/p}. \tag{7.14}$$

将 α_i 换为 r_i, 再积分有

$$n^{1/p}\leqslant\left\|\sum_{i=1}^n r_ix_i\right\|_2\leqslant(1+\varepsilon)n^{1/p}.$$

注意 $\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^r\right)^{1/r}=n^{1/r}$, 所以 X 不可能有大于 p 的型和小于 p 的余型. 由此可以得出定理 5 的等价叙述:

定理 6 设 X 是 Banach 空间, $1<p\leqslant q<\infty$, 则

(i) X 是 R-p 型的当且仅当 X 不一致包含 l_1^n;

(ii) X 是 R-q 余型的当且仅当 X 不一致包含 l_∞^n.

当 $p_x=2$ 时, 其结果已包含在 Dvoretzky 定理中. 当 $p=1$ 或 $q=\infty$ 时正是定理 5.

回忆 R^n 中的一个集合 E 称为凸体, 若 E 是对称的闭凸子集并且其内部不是空集. 特别地, 椭球是指形如

$$A=\left\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n,\sum_{i=1}^n\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2\leqslant 1\right\}$$

的集合, 其中 $0<a_i<\infty, 1\leqslant i\leqslant n$. 容易验证 A 是欧氏空间 l_2^n 的闭单位球在某个线性变换之下的象. 并且 A 的 Minkowski 泛函必导致一个内积范数. 现在我们假设 R^n 赋有范数 $\|\cdot\|$, 而 $|\cdot|$ 是 R^n 上的欧氏范数, 即它是由某个内积 $(\cdot,\cdot)$ 诱导的, $|x|^2=(x,x)$. 对于 $x\in R^n$, 定义 x 的共轭范数

$$\|x\|^*=\sup_{y\neq 0}\frac{|(x,y)|}{\|y\|}=\sup_{\|y\|\leqslant 1}|(x,y)|. \tag{7.15}$$

容易知道, 若存在 $a,b>0$ 使得 $\forall\, x\in R^n$ 有 $a^{-1}|x|\leqslant\|x\|\leqslant b|x|$, 则

$$b^{-1}|x|\leqslant\|x\|^*\leqslant a|x|,\quad\forall x\in R^n. \tag{7.16}$$

实际上通过不等式 $|x|^2=(x,x)\leqslant\|x\|\,\|x\|^*$, 即可得到所要的结论.

设 E 是有限维空间, $\dim E=n$. 考虑算子空间 $B(R^n,E)$ 及其共轭 $B(E,R^n)$, 分别以 $\|u\|,\|v\|^*$ 表示 $u\in B(R^n,E)$ 和 $v\in B(E,R^n)$ 的范数. 我们知道 u,v 都可

以用矩阵来表示, 令 $\langle u,v\rangle=\mathrm{tr}\,uv$, 后者表示 u,v 乘积的迹, 即乘积矩阵的主对角线上各元素之和.

引理 1　设 E 是向量空间, $\dim E=n$. 则存在等距同构 $u:R^n\to E$ 使得 $\|u\|=1$, $\left\|u^{-1}\right\|^*=n$.

证明　设 $K=\{u\in B(R^n,E):\|u\|\leqslant 1\}$, 则 K 是紧集. 令 $\varphi(u)=\det u$, 后者是 u 的行列式的值, 则 φ 在 K 上可达到极大值. 即 $\exists\, u_0\in K$ 使得

$$|\det u_0|=\sup\{|\det u|:u\in K\},$$

从而

$$\left|\det\left(\frac{u_0+u}{\|u_0+u\|}\right)\right|\leqslant|\det u_0|\ \text{或者}\ |\det(u_0+u)|\leqslant|\det u_0|\,\|u_0+u\|^n.$$

显然 $|\det u_0|\neq 0$, 因此 u_0 可逆. 注意 $u_0^{-1}\in B(E,R^n)$, 上式两端除以 $|\det u_0|$ 得到

$$\left|\det(I+u_0^{-1}u)\right|\leqslant\left\|I+u_0^{-1}u\right\|^n.$$

u 是任意的, 又可得出 $\forall\varepsilon>0$,

$$\left|\det(I+\varepsilon u_0^{-1}u)\right|\leqslant(I+\varepsilon\|u\|)^n,$$

由于 $\left|\det(I+u_0^{-1}u)\right|=1+\varepsilon\,\mathrm{tr}\,u_0^{-1}u+o(\varepsilon)$, 故 $\varepsilon\to 0$ 时, $\mathrm{tr}\,u_0^{-1}u\leqslant n\|u\|$. 根据范数共轭性得到

$$\left\|u_0^{-1}\right\|=\sup\{\mathrm{tr}\ u_0^{-1}u:\|u\|\leqslant 1\}\leqslant n.$$

另一方面, 不失一般性, 若采用正交基底, 则有

$$n=\mathrm{tr}\ u_0^{-1}u_0\leqslant\left\|u_0^{-1}\right\|^*\|u_0\|.$$

得证.

现在让我们来判定 n 维空间之间的距离, 在这方面内积空间有着良好的性质. 我们知道维数相同的两个内积空间 E,F 是等距同构的, 故 $d(E,F)=1$. 下面定理给出了更广泛情况的结论. 以下以 $B(X)$ 表示 X 的闭单位球.

定理 7 (John)　设 X 是 n 维线性赋范空间, 则 $d(X,l^n)\leqslant\sqrt{n}$. 详细地说, 若 $\dim X=n, u:l_2^n\to X$ 是线性算子, $\|u\|\leqslant 1$, 使得 $u(B(l_2^n))$ 是包含在 $B(X)$ 中的体积最大的凸体, 则必有 $\Pi_2(u^{-1})=\sqrt{n}$, 这里 Π_2 是 2 绝对可和范数.

证明　设 $u:l_2^n\to X$ 满足 $\|u\|=1$, $\left\|u^{-1}\right\|^*=n$, 其中 $\|\cdot\|$ 是 $B(l_2^n,X)$ 的范数, $\|\cdot\|^*$ 是 $B(X,l_2^n)$ 上的与 $\|\cdot\|$ 共轭的范数. 回忆引理中用到范数最大的算子 u 存在这一事实. 现在 X 与 l_2^n 都是有限维空间, 因此 $\|\cdot\|^*$ 是核范数, 即

$$\|v\|^*=\inf\sum_{i=1}^m\|x_i^*\|\|y_i\|. \tag{7.17}$$

这里下确界是对于所有满足 $v(x)=\sum_{i=1}^{m}x_1^*(x)y_i(\forall x\in X)$ 的 $\{x_i^*\}\subset X^*$, $\{y_i\}\in l_2^n$ 而取的.

由 Carathéodory 定理, 有至多 n^2+1 个 $B(X,l_2^n)$ 中的元作为其单位球的端点, 我们现在在 (3.3) 中审查这 $m\leqslant n^2+1$ 个端点的情况. 设 u^{-1} 是这样的一个, 此时可以找到 $\{x_i^*\}\subset X^*$, $\{y_i\}\subset l_2^n$ 使得

$$u^{-1}(x)=\sum_{i=1}^{m}x_i^*(x)y_i,\quad \forall x\in X,\quad \sum_{i=1}^{m}\|x_i^*\|^2=\sum_{i=1}^{m}\|y_i\|^2=n. \tag{7.18}$$

若 $T:X\to l_2^m$, $S:l_2^m\to l_2^n$ 如此定义: $T(x)=\{x_i^*(x)\},S(e_i)=y_i$, 则容易验证 $ST=u^{-1}$. 由 (3.10), $\|S\|_{HS}=\sqrt{n}(\|\cdot\|_{HS}$ 定义见 4.6 节) 并且

$$\Pi_2(T)\leqslant\left(\sum\|x_i^*\|^2\right)^{1/2}\leqslant n^{1/2}.$$

考虑到 X 是 n 维空间, 故可以将一个算子 T 与正交投影 (正交矩阵) 复合. 因此可改写 $u^{-1}=\beta\alpha$, 其中 $\alpha:X\to l_2^n,\Pi_2(\alpha)\leqslant\sqrt{n};\beta:l_2^n\to l_2^n,\|\beta\|_{HS}=\sqrt{n}$. 由于

$$\|\alpha u\|_{HS}\leqslant\Pi_2(\alpha u)\leqslant\Pi_2(\alpha)\|u\|\leqslant n^{1/2},$$

$$n=\mathrm{tr}\ u^{-1}u=\mathrm{tr}\ \beta(\alpha u),$$

于是 $\mathrm{tr}\ \beta(\alpha u)\geqslant\|\alpha u\|_{HS}\|\beta\|_{HS}$, 这说明在算子的标量积 $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\ B*A$ 的情况 Hölder 不等式中等号成立. 以 $B^*=\beta^*,A=\alpha u$, 则 $\beta^*=\alpha u$. 但 $u^{-1}=\alpha\beta$, $\beta^{-1}=\alpha u$, 从而 $\beta^*=\beta^{-1},\beta$ 是正交矩阵, $\|\beta\|=1$. 总之

$$\Pi_2(u^{-1})=\Pi_2(\beta\alpha)\leqslant\|\beta\|\,\Pi_2(\alpha)\leqslant n^{1/2}.$$

另一方面

$$n^{1/2}=\|I\|_{HS}=\Pi_2(u^{-1}u)\leqslant\Pi_2(u^{-1})\|u\|\leqslant\Pi_2(u^{-1}),$$

故 $\Pi_2(u^{-1})=n^{1/2}$. 由 $\left\|u^{-1}\right\|^*\leqslant\Pi_2(u^{-1})\leqslant n^{1/2}$, 最后得出

$$d(X,l_2^n)\leqslant\|u\|\left\|u^{-1}\right\|^*\leqslant n^{1/2}.$$

推论 3 对于任何两个 n 维赋范空间 $X,Y,d(X,Y)\leqslant n$.

定理 8 $d(l_p^n,l_2^n)\leqslant n^{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|}(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

证明 首先设 $1\leqslant p\leqslant2$, 由 Hölder 不等式,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}\leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}. \tag{7.19}$$

根据 Banach-Mazur 距离的定义有 $d(l_p^n, l_2^n) \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$. 对于 $2 \leqslant p \leqslant \infty$ 的情况利用共轭性以及 $d(X,Y) = d(X^*,Y^*)$ 的事实得到. 当然也可以用类似于 (3.5) 的式子得到.

对于 $p=\infty$, 由于

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2} \leqslant n^{1/2} \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i|,$$

得到 $d(l_\infty^n, l_2^n) \leqslant n^{1/2}$.

现在由距离的次可乘性得出：

推论 4 对于任何 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty, d(l_p^n, l_q^n) \leqslant n^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|}$.

第 4 章评注:

每个 0 均值独立 R.V. 序列都是一个鞅差, 所以本章内容实际上属于鞅论的一部分. 型和余型渗入到 Banach 空间现代理论的许多问题中. 本章内容前一部分是独立 R.V. 序列的极限理论, 后一部分是属于 Banach 空间局部理论的基础知识.

4.1 节、4.2 节 Radmacker 函数与 Khintchin 不等式很早就受到人们的关注, Kahane[129] 总结了有关向量值独立 R.V. 和随机级数的属性, Maurey 等 [163~165] 讨论了 Banach 空间的型和余型, Hoffmann-Jøgensen 与 Pisier 证明了一系列重要的不等式, 见文献 [114]、[115]、[179].

4.3 节、4.4 节这里的内容是 Banach 空间值独立 R.V. 序列极限理论的主体, 通常又被称为 Banach 空间上的概率论. Hoffmann-Jøgensen, Pisier 定理见文献 [116], Acosta 定理见文献 [1], Woyczynski[208] 证明了 Marcinkiewicz-Zygmund 型大数定律. 以上诸位还和 Kuelbs[2~4], Chobanyan[62], Pelczynski[170,171], Pisier[184], Goodman, Kuelbs[102,103], Zinn[100,223] 以及 Jain[124] 等系统地研究了大数定律、重对数律和中心极限定理. Ledoux 与 Talagrand[142] 确定了重对数律与空间几何性质等价的条件, 即定理 4、5, 定理 6 可用它的证明和 Acosta 定理证明的思想得到.

4.5 节关于 Gauss 型的定义和相关讨论见文献 [141]、[143]、[179]. Kwapien 定理今后会频繁用到, 证明来自文献 [139].

4.6 节 p 可和算子在本书中看上去是孤立的, 实际上它自身有着丰富的内容, 特别是作为一个算子理想它在算子理论和 Banach 空间的同构理论中很有用. 我们在本节顺便地得到著名的 Dvoretzky-Rogers 定理. 这里的几个基本定理可见文献 [175], Grothendieck- Pietsch 不等式是一个关键的结论和工具. 定理 9, 10, 11 涉及 Hilbert 空间的结构性质, 见文献 [144].

4.7 节所述属于局部理论的基础知识, 定理 1 及其推论、定理 2 都见文献 [178]、[185] 或者参见文献 [179]、[181]~[183]. 关于 B 凸的概念和定理 3 的一部分见文献 [34]、[36], 另见文献 [12], K 凸性见文献 [183]. 定理 5, 6 的证明用到所谓的 "等周不等式方法", 由于篇幅有限, 这里只得舍去, 可参见文献 [7]、[169]. 关于 l_p^n 之间距离的估计见文献 [134].

第 5 章　超自反空间

超自反空间是 Enflo 在研究自反空间的属性时引入的. 事实证明超自反空间有许多优良的性质, 特别地它可以赋予等价范数使之成为一致凸空间. 本章我们将叙述这些性质. 首先讨论凸性模与光滑模函数的属性, 而后给出 Enflo 等价赋范定理的鞅证明. 我们还将叙述有重要应用的 Assouad 定理和 Pisier 定理, p 光滑空间值鞅的大数定律, 最后讨论空间的有限树与 J 凸性质.

5.1　凸性模与光滑模

定义 1　设 X 是实空间, $\dim X \geqslant 2$, 称

$$\delta_X(\varepsilon)=\inf\{1-\|x+y\|/2:\ \|x\|=\|y\|=1,\ \|x-y\|=\varepsilon\} \tag{1.1}$$

$(0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2)$ 是 X 的凸性模. 称

$$\rho_X(\tau)=\sup\{(\|x+y\|+\|x-y\|)/2-1:\ \|x\|=1,\|y\|=\tau\} \tag{1.2}$$

$(\tau>0)$ 是 X 的光滑模.

称 X 是一致凸的, 若 $\forall \varepsilon>0, \delta_X(\varepsilon)>0$; 称 X 是一致光滑的, 若 $\lim\limits_{\tau\to 0}\rho_X(\tau)/\tau=0$.

在此定义中, 应该注意:

1° 将 (1.1) 中 x,y 的变化范围换为 $\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1,\|x-y\|\geqslant\varepsilon$, $\delta_X(\varepsilon)$ 的值不会改变. 将 (1.2) 中的换为 $\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant\tau$, $\rho_X(\tau)$ 的值也不会改变, 这些都可以用初等方法予以证明.

2° 凸性模与光滑模并不是等价范数不变的. 甚至于空间的一致凸性或一致光滑性也可能因换为等价范数而失去.

例 1　对于 Hilbert 空间, 由平行四边形公式直接得出

$$\delta_X(\varepsilon)=1-(1-\varepsilon^2/4)^{1/2}=\varepsilon^2/8+o(\varepsilon^4),\quad 0<\varepsilon<2, \tag{1.3}$$

$$\rho_X(\tau)=(1+\tau^2)^{1/2}-1=\tau^2/2+o(\tau^4),\quad \tau>0. \tag{1.4}$$

所以 Hilbert 空间既是一致凸的又是一致光滑的.

例 2　设 $\|\cdot\|_2$ 是 l_2 上的范数, 定义新范数

$$\|x\|=\max\{2|x_1|,\|x\|_2\},\quad \forall x=(x_n)\in l^2,$$

容易知道 $\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant 2\|x\|_2$, 所以 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是等价范数. 但 l^2 在新范数下不是一致凸的, 甚至不是严格凸的. 例如, 取

$$x = (1/2, 0, \cdots), \quad y = (1/2, 1/2, 0, \cdots),$$

则 $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x+y\| = 2$. 此时 $\delta_{(l^2, \|\cdot\|)}(1/2) = 0$.

一个 Banach 空间的属性依照下述方法可以分为两类, 一类称为拓扑性质, 一类称为度量性质. 前者是指仅依赖于拓扑, 因此在等价范数下不会改变的性质. 例如, 紧性、自反性、RN 性质、p 型、q 余型等. 后者是指由空间特定范数确定, 当范数改为等价范数时可能会改变的性质. 例如, 严格凸性、一致凸性、一致光滑性等.

下面给出 $\delta_X(\varepsilon)$ 和 $\rho_X(\varepsilon)$ 的更精确的描述, 首先我们有

定理 1 设 X 是 Banach 空间, X^* 是 X 的共轭, 则

(i) $\rho_{X^*}(\tau) + \delta_X(\varepsilon) \geqslant \dfrac{\tau\varepsilon}{2}, \tau > 0, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2;$ (1.5)

(ii) $\rho_{X^*}(\tau) = \sup\limits_{0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2} \left(\dfrac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_X(\varepsilon)\right), \tau > 0;$ (1.6)

(iii) $\rho_X(\tau) = \sup\limits_{0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2} \left(\dfrac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_{X^*}(\varepsilon)\right), \tau > 0;$ (1.7)

(iv) X 是一致凸空间当且仅当 X^* 是一致光滑的.

证明 1° 设 $\|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| = \varepsilon$, 取 $\|x^*\| = \|y^*\| = 1$ 使得 $x^*(x+y) = \|x+y\|, y^*(x-y) = \|x-y\|$, 则

$$\begin{aligned} 2\rho_{X^*}(\tau) &\geqslant \|x^* + \tau y^*\| + \|x^* - \tau y^*\| - 2 \\ &\geqslant x^*x + \tau y^*x + x^*y - \tau y^*(y) - 2 \\ &= x^*(x+y) + \tau y^*(x-y) - 2 \\ &= \|x+y\| + \tau\varepsilon - 2 \end{aligned}$$

或 $2\rho_{X^*}(\tau) + 2 - \|x+y\| \geqslant \tau\varepsilon$, 故必有 (i) 成立.

实际上, 在上述证明中只要关于 x^*、y^* 或关于 x、y(保持 $\|x-y\| = \varepsilon$) 取上确界, 上述各式均为等式, 所以 (ii) 成立.

2° 设 $\|x^*\| = \|y^*\| = 1, \|x^* - y^*\| = \varepsilon$. $\forall \eta > 0$, 取 $\|x\| = \|y\| = 1$, 使得 $(x^* + y^*)x \geqslant \|x^* + y^*\| - \eta, (x^* - y^*)y \geqslant \|x^* - y^*\| - \eta$, 则

$$\begin{aligned} 2\rho_X(\tau) &\geqslant \|x + \tau y\| + \|x - \tau y\| - 2 \\ &\geqslant x^*x + \tau x^*y + y^*x - \tau y^*y - 2 \\ &= (x^* + y^*)x + \tau(x^* - y^*)y - 2 \\ &\geqslant \|x^* + y^*\| + \tau\|x^* - y^*\| - 2 - (1+\tau)\eta \\ &= \|x^* + y^*\| + \tau\varepsilon - 2 - (1+\tau)\eta, \end{aligned}$$

即 $2\rho_X(\tau)+2-\|x^*+y^*\|\geqslant\tau\varepsilon-(1+\tau)\eta$, η 是任意的, 由此可知 (iii) 成立.

3° 设 X^* 是一致光滑的, 则 $\rho_{X^*}(\tau)/\tau\to 0\ (\tau\to 0)$. 若 $0\leqslant\varepsilon\leqslant 2$, 取 τ 足够小, 则 $\rho_{X^*}(\tau)<\tau\varepsilon/4$. 利用 (1.5) 得出 $\delta_X(\varepsilon)>\varepsilon\tau/4>0$, 故 X 一致凸.

设 X 是一致凸的 (实际上只要对充分小的 $\varepsilon, \delta_X(\varepsilon)>0$), 将 (1.6) 改写为

$$\frac{\rho_{X^*}(\tau)}{\tau}=\sup_{0<\varepsilon\leqslant 2}\left(\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\delta_X(\varepsilon)}{\tau}\right).$$

若 $\overline{\lim\limits_{\tau\to 0}}\rho_{X^*}(\tau)/\tau=a>0$, 则必有序列 ε_n,τ_n, 其中 $\tau_n\to 0$ 使得 $\varepsilon_n/2-\delta_X(\varepsilon_n)/\tau_n\geqslant a/2$. 不妨设 $\varepsilon_n\to a_0$(否则过渡到子序列), 则 $a_0\geqslant a$, 从而 $\delta_X(\varepsilon_n)\leqslant(\varepsilon_n/2-a/2)\tau_n$. 此时必有 $\delta_X(a_0)=0$, 矛盾.

定理 2 一致凸空间与一致光滑空间都是自反空间.

证明 由定理 1(iv), 只须证明一致凸空间自反.

$\forall x\in X^{**}, \|x\|=1$. 由于单位球 B_X 在单位球 $B_{X^{**}}$ 中 w^* 稠密, 取网 $(x_\lambda,\lambda\in\Lambda)$ 使 $w^*-\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda=x$, 再取 $f\in X^*, \|f\|=1$ 使得 $f(x)>1-\delta_X(\varepsilon)$. 于是 $\exists\lambda_0$ 使得 $\lambda,\lambda'\geqslant\lambda_0$ 时

$$f(x_\lambda)\geqslant 1-\delta_X(\varepsilon),\quad f(x_{\lambda'})\geqslant 1-\delta_X(\varepsilon),$$

$$\left\|\frac{x_\lambda+x_{\lambda'}}{2}\right\|\geqslant f\left(\frac{x_\lambda+x_{\lambda'}}{2}\right)\geqslant 1-\delta_X(\varepsilon).$$

由一致凸性, $\|x_\lambda-x_{\lambda'}\|\leqslant\varepsilon$. X 完备, 故存在 $y\in X$, 依 X 的范数 $y=\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda=x$, 即 $x\in X$, $X=X^{**}, X$ 自反.

定理 3 设 X 是 Banach 空间, 则

(i) $\rho_X(0)=0, \rho_X(\tau)$ 递增并且是凸函数;

(ii) $\rho_X(\tau)/\tau$ 递增;

(iii) $\exists C>0$ 使得 $0<\tau<\eta$ 时, $\rho_X(\eta)/\eta^2\leqslant C\rho_X(\tau)/\tau^2$;

(iv) $\delta_X(0)=0, \delta_X(\varepsilon)$ 在 [0, 2] 上递增;

(v) $\delta_X(\varepsilon)/\varepsilon$ 在 [0, 2] 上递增;

(vi) $\exists C>0$ 使得 $0<\varepsilon<\eta$ 时, $\delta_X(\varepsilon)/\varepsilon^2\leqslant C\delta_X(\eta)/\eta^2$.

证明 (i) 可由定理 1(iii) 得到. 为证明 (ii), 由 $\rho_X(0)=0$, 若 $0<\tau<\eta$, 记 $\tau=t\eta, 0<t<1$, 则

$$\frac{\rho_X(\tau)}{\tau}=\frac{\rho_X(t\eta)}{t\eta}=\frac{\rho_X((1-t)0+t\eta)}{t\eta}\leqslant\frac{t\rho_X(\eta)}{t\eta}=\frac{\rho_X(\eta)}{\eta}.$$

(iv) 是显然的. 我们证明 (v). 其余的也可用初等方法证明, 见文献 [145].

为证 (v), 设 $0<\eta<\varepsilon<2, \|x\|=\|y\|=1$, $\|x-y\|=\varepsilon$, 考虑 x, y 张成的二维子空间, 在由四个向量 $0, x, y, \|x+y\|^{-1}(x+y)$ 构成的四边形中, 一定存在 x', y' 使得 $\|x'\| \leqslant 1, \|y'\| \leqslant 1, \|x'-y'\|=\eta$, 并且

$$(1-\|x'+y'\|/2)/\eta=(1-\|x+y\|/2)/\varepsilon,$$

由此关于 x, y 在所说范围内取下确界即得 (v).

前面已计算过 Hilbert 空间的凸性模和光滑模, 对于一般的 Banach 空间来说, $\delta_X(\varepsilon)$ 和 $\rho_X(\tau)$ 的计算并非易事, 这里给出 $\delta_{L^p}(\varepsilon)(1<p<\infty)$ 的估计值, 具体计算仍见文献 [145] .

例 3　设 $L^p=L^p(\Omega, \Sigma, \mu),(\Omega, \Sigma, \mu)$ 是有限正测度空间, 则

$$\delta_{L_p}(\varepsilon)=\begin{cases} 8^{-1}(p-1)\varepsilon^2+o(\varepsilon^2), & 1<p<2, \\ p^{-1}2^{-p}\varepsilon^p+o(\varepsilon^p), & 2 \leqslant p<\infty. \end{cases}$$

定义 2　设 X, Y 是两个 Banach 空间, 称 Y 在 X 中有限可表现, 若 $\forall \varepsilon>0$ 和 Y 的有限维子空间 E, 存在 X 的有限维子空间 F 使得 $E \overset{1+\varepsilon}{\sim} F$. 对于 Banach 空间的某种属性 (P), 称 X 具有超 (P) 性质, 若每个在 X 中有限可表现的 Banach 空间都具有此种性质.

例如, 若每个在 X 中有限可表现的 Banach 空间都是自反的, 就称 X 是超自反空间. 由定义可知, 若 X 一致包含 l_p^n, Y 在 X 中有限可表现, 则 Y 一致包含 l_p^n. 现在我们有

定理 4　设 X、Y 是 Banach 空间, Y 在 X 中有限可表现.

(i) 若 X 一致凸, 则 Y 一致凸. 此时对于任何 $0<\alpha<1$,

$$\delta_Y(\varepsilon) \geqslant \delta_X(\alpha\varepsilon), \quad 0<\varepsilon<2. \tag{1.8}$$

(ii) 若 X 一致光滑, 则 Y 一致光滑, 此时对于任何 $0<\alpha<1$,

$$\rho_Y(\tau) \leqslant \rho_X(\alpha\tau), \quad \tau>0. \tag{1.9}$$

证明　设 $x, y \in Y, \|x\|=\|y\|=1, \|x-y\| \geqslant \varepsilon$, 对于 $\eta>0$, 设 T 是从 X 的 2 维子空间到由 x, y 张成的 Y 的 2 维子空间的同构映射, $\|T\| \leqslant 1, \|T^{-1}\| \leqslant 1+\eta$, 记 $x'=T^{-1}x, y'=T^{-1}y, x', y' \in X$, 则

$$\|x'\| \leqslant 1+\eta, \qquad \|y'\| \leqslant 1+\eta,$$

$$\|x'-y'\| \geqslant\|T(x'-y')\|=\|x-y\| \geqslant \varepsilon,$$

由 X 的一致凸性

$$\left\|\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{1+\eta}+\frac{y'}{1+\eta}\right)\right\| \leqslant 1-\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{1+\eta}\right)$$

或者 $\left\|\frac{x'+y'}{2}\right\| \leqslant (1+\eta)\left(1-\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{1+\eta}\right)\right)$, 于是

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant \left\|\frac{x'+y'}{2}\right\| \leqslant (1+\eta)\left(1-\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{1+\eta}\right)\right).$$

对于任何 $0<\alpha<1$, 由于 η 可任意小 (适当选择同构映射 T), $\delta_X(\varepsilon)$ 是递增的, 故可得到 $\delta_Y(\varepsilon) \geqslant \delta_X(\alpha\varepsilon)$, (i) 得证.

(ii) 的证明与 (i) 类似.

定义 3 称空间 X 是 p(一致) 光滑的, 若存在 $c>0$, 使得

$$\rho_X(\tau) \leqslant c\tau^p, \quad \tau>0. \tag{1.10}$$

称 X 是 q(一致) 凸的, 若存在 $c>0$, 使得

$$\delta_X(\varepsilon) \geqslant c\varepsilon^q, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2. \tag{1.11}$$

称 X 是 p 可光滑的 (q 可凸的), 若存在等价范数使之成为 p 光滑 (q 凸的).

定理 5 对于任何空间 X, 其光滑性定义中的指数 p 不可能大于 2, 凸性定义中指数 q 不可能小于 2.

证明 设有 $0<q<2$ 和 $c>0$ 使得

$$\delta_X(\varepsilon) \geqslant c\varepsilon^q, \quad 0<\varepsilon<2.$$

注意由 Dvoretzky 定理, l^2 在任一 Banach 空间中有限可表现, 根据例 1 中计算出的结果 $\delta_{l^2}(\varepsilon)=\varepsilon^2/8+o(\varepsilon^2)$, 故

$$\delta_{l^2}(\varepsilon) \geqslant \delta_X(\alpha\varepsilon) \geqslant c\alpha^q\varepsilon^q, \quad 0<\alpha<1, \quad 0<\varepsilon<2.$$

由 $\varepsilon^2/8+o(\varepsilon^2) \geqslant c\alpha^q\varepsilon^q$ 或 $\varepsilon^{2-q}/8+o(\varepsilon^{2-q}) \geqslant c\alpha^q$, ε 可任意小, 容易得出 $c=0$, 矛盾.

同样地, 若有 $2<p<\infty$ 和 $c>0$ 使得 $\rho_X(\tau) \leqslant c\tau^p$, 由于 $\rho_{l_2}(\tau)=\tau^2/2+o(\tau^2)$, $\rho_{l_2}(\tau) \leqslant \rho_X(\tau)$, 容易得出 $c=0$.

定理 6 设 p,q 是一对共轭数 ,$2 \leqslant q<\infty$, 则 X 是 q 凸的当且仅当 X^* 是 p 光滑的.

证明　1° 设 $2 \leqslant q < \infty, \delta_X(\varepsilon) \geqslant c\varepsilon^q, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2$. 我们有

$$\rho_{X^*}(\tau) = \sup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 2}\left(\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_X(\varepsilon)\right) \leqslant \sup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 2}\left(\frac{\tau\varepsilon}{2} - c\varepsilon^q\right).$$

$\varphi(\varepsilon) = \tau\varepsilon/2 - c\varepsilon^q$ 是凹函数, 其极大值在 $\left(\dfrac{\tau}{2cq}\right)^{\frac{1}{q-1}}$ 达到, 即是

$$\frac{\tau}{2}\left(\frac{\tau}{2cq}\right)^{\frac{1}{q-1}} - c\left(\frac{\tau}{2cq}\right)^{\frac{q}{q-1}} \sim c'\tau^{\frac{q}{q-1}} = c'\tau^p.$$

c' 为常数, 于是得到 $\rho_{X^*}(\tau) \leqslant c'\tau^p (\tau > 0)$.

2° 若 $1 < p \leqslant 2$, $\rho_{X^*}(\tau) \leqslant c\tau^p$, 考虑函数

$$\tilde{\delta}_X(\varepsilon) = \sup_{\tau>0}\left(\frac{\tau\varepsilon}{2} - \rho_{X^*}(\tau)\right).$$

类似于上面的讨论 (注意 $\delta_X(\varepsilon) \geqslant \tilde{\delta}_X(\varepsilon)$) 可得到 $\delta_X(\varepsilon) \geqslant c'\varepsilon^q$.

定理 7　设 X 是 Banach 空间, $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$.

(i) X 是 p 光滑的当且仅当存在 $K > 0$, 使得

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leqslant 2\|x\|^p + K\|y\|^p, \quad \forall x, y \in X; \tag{1.12}$$

(ii) X 是 q 凸的当且仅当存在 $K > 0$, 使得

$$\|x+y\|^q + \|x-y\|^q \geqslant 2\|x\|^q + K\|y\|^q, \quad \forall x, y \in X. \tag{1.13}$$

证明　1° 若 (1.12) 成立, 取 $x, y \in X, \|x\| = 1, \|y\| = \tau$, 则

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p + \|x-y\|^p) - 1 \leqslant \frac{K}{2}\tau^p,$$

根据 $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| + \left\|\dfrac{x-y}{2}\right\| \geqslant \left\|\dfrac{1}{2}(x+y) + \dfrac{1}{2}(x-y)\right\| = 1$ 和 $\varphi(t) = t^p$ 的凸性

$$\begin{aligned}\rho_X(\tau) &= \sup\left\{\left(\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2}\right) - 1\right\} \\ &\leqslant \sup\left\{\left(\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2}\right)^p - 1\right\} \\ &\leqslant \sup\left\{\frac{1}{2}(\|x+y\|^p + \|x-y\|^p) - 1\right\} \leqslant \frac{K}{2}\tau^p.\end{aligned}$$

反过来, 应用实值不等式

$$u^p - v^p \leqslant pu^{p-1}(u-v), \quad u, v \geqslant 0, \tag{1.14}$$

$$\frac{1}{2}|u+v|^p + \frac{1}{2}|u-v|^p \leqslant |u|^p + |v|^p, \quad u, v \in R. \tag{1.15}$$

若 $c>0, \rho_X(\tau) \leqslant c\tau^p (\tau>0)$, 则 $\forall x, y \in X, \|x\|=1, \|y\|=\tau$,

$$\|(x+y)/2\| + \|(x-y)/2\| - 1 \leqslant c\|y\|^p.$$

由于范数的齐性, $\forall\, x, y \in X (x \neq 0)$,

$$\|(x+y)/2\| + \|(x-y)/2\| \leqslant \|x\| \left(1 + c\|y\|^p / \|x\|^p\right)$$

或者

$$(\|x+y\| - (\|x\|+\|y\|) + \|x-y\| - (\|x\|-\|y\|))/2 \leqslant c\|x\| \|y\|^p / \|x\|^p. \tag{1.16}$$

若 $\|y\| \leqslant \|x\|$, 则 $\|x+y\| \leqslant 2\|x\|$, 应用 (1.14), 第一次令 $u=\|x+y\|, v=\|x\|+\|y\|$; 第二次令 $u=\|x-y\|, v=\|x\|-\|y\|$; 则

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|x+y\|^p - \frac{1}{2}(\|x\|+\|y\|)^p &\leqslant \frac{p}{2}\|x+y\|^{p-1}(\|x+y\| - (\|x\|+\|y\|)),\\
\frac{1}{2}\|x-y\|^p - \frac{1}{2}(\|x\|-\|y\|)^p &\leqslant \frac{p}{2}\|x-y\|^{p-1}(\|x-y\| - (\|x\|-\|y\|)),
\end{aligned}$$

两式相加应用 (1.16) 得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\|x+y\|^p + \|x-y\|^p) \leqslant{}& \frac{1}{2}[(\|x\|+\|y\|)^p + (\|x\|-\|y\|)^p]\\
&+p(2\|x\|)^{p-1} 2\|x\| c\|y\|^p / \|x\|^p,
\end{aligned}$$

再由 (1.15) 得到

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p + \|x-y\|^p) \leqslant \|x\|^p + (1+p2^p c)\|y\|^p.$$

若 $\|y\| \geqslant \|x\|$, 直接由 $\|x \pm y\| \leqslant 2\|y\|$ 得到

$$(\|x+y\|^p + \|x-y\|^p)/2 \leqslant \|2y\|^p \leqslant \|x\|^p + 2^p\|y\|^p.$$

于是必有 $K>0$ 使 (1.12) 成立.

2° 现证 (ii). $\forall u, v \in X$, 考虑 $x=\|u\|v+\|v\|u, y=\|u\|v-\|v\|u$, 代入 (1.13) 得到

$$2(2\|u\|\|v\|)^q \geqslant 2\|\|u\|v+\|v\|u\|^q + K\|\|u\|v-\|v\|u\|^q,$$

若 $\|u\|=\|v\|=1$, $\|u-v\|=\varepsilon$, 则

$$2^{q+1} \geqslant 2\|u+v\|^q + K\varepsilon^q, \quad \|(u+v)/2\|^q \leqslant 1-(K/2)(\varepsilon/2)^q.$$

由不等式 $1-\alpha^q \leqslant q(1-\alpha)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ 得到

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right\} \geqslant \frac{1}{q}\inf\left\{1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|^q\right\} = \frac{K\varepsilon^q}{2^{q+1}q}.$$

反之, 若 $\delta_X(\varepsilon) \geqslant c\varepsilon^q$, 由定理 6, 存在 $c' > 0$ 使得 $\rho_{X^*}(\tau) \leqslant c'\tau^p$. 于是由上面 1° 的证明, $\forall\, x^*, y^* \in X^*$, 有 $K > 0$ 使得

$$\|x^* + y^*\|^p + \|x^* - y^*\|^p \leqslant 2\|x^*\|^p + K\|y^*\|^p.$$

令 $K = 2\tau^p$ 并且用 y^* 代替 τy^* 得到

$$\left\|x^* + \tau^{-1}y^*\right\|^p + \left\|x^* - \tau^{-1}y^*\right\|^p \leqslant 2\|x^*\|^p + \|y^*\|^p, \tag{1.17}$$

x^*, y^* 仍是任意的, 现在 $\forall x, y \in X$, 取 $x^*, y^* \in X^*$ 使得

$$\begin{aligned} &\|x^*\|^2 + \|y^*\|^2 = 1, \\ &x^*(x+y) + \tau^{-1}y^*(x-y) = (\|x+y\|^q + \|x-y\|^q)^{1/q}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

这是可行的, 例如, 先取 $\bar{x}^*, \bar{y}^* \in X^*$ 使得

$$\begin{aligned} &\|\bar{x}^*\| = \|\bar{y}^*\| = 1, \\ &\bar{x}^*(x+y) = \|x+y\|, \quad \bar{y}^*(x-y) = \|x-y\|. \end{aligned}$$

再令 $x^* = \alpha\bar{x}^*, y^* = \beta\bar{y}^*$, 则问题变为解

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 1, \\ \alpha\|x+y\| + \beta\tau^{-1}\|x-y\| = (\|x+y\|^q + \|x-y\|^q)^{1/q}. \end{cases}$$

α, β 总是存在的. 应用 (1.17), (1.18) 和 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned} \|x+y\|^q + \|x-y\|^q &= \left|x^*(x+y) + \tau^{-1}y^*(x-y)\right|^q \\ &\leqslant \left(\left\|x^* + \tau^{-1}y^*\right\| \ \|x\| + \left\|x^* - \tau^{-1}y^*\right\| \ \|y\|\right)^q \\ &\leqslant \left(\left\|x^* + \tau^{-1}y^*\right\|^p + \left\|x^* - \tau^{-1}y^*\right\|^p\right)^{q/p} \cdot (\|x\|^q + \|y\|^q) \\ &\leqslant (2\|x^*\|^p + \|y^*\|^p)^{q/p}(\|x\|^q + \|y\|^q) \\ &= 2^{q/p}(\|x\|^q + \|y\|^q). \end{aligned}$$

于是 $\|x\|^q + \|y\|^q \geqslant (\|x+y\|^q + \|x-y\|^q)2^{-q/p}$, 用 $x+y$ 替换 x, $x-y$ 替换 y 即得到

$$\|x+y\|^q + \|x-y\|^q \geqslant (\|2x\|^q + \|2y\|^q)2^{-q/p} = 2\|x\|^q + 2\|y\|^q.$$

定理 8 设 $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$, 则 p 可光滑空间是 R-p 型的, q 可凸空间是 R-q 余型的.

证明 若 X p 光滑, 则 $\forall\, x_1, \cdots, x_n \in X$, 由定理 7 中不等式

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i \right\|^p \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\left\| \sum_{i=1}^{n-1} r_i(t)x_i + x_n \right\|^p + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} r_i(t)x_i - x_n \right\|^p \right) \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \left(\left\| \sum_{i=1}^{n-1} r_i(t)x_i \right\|^p \right) \mathrm{d}t + \frac{K}{2}\left\| x_n \right\|^p,$$

递推地最后得到

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i \right\|^p \mathrm{d}t \leqslant \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p,$$

所以 X 是 p 型的. 对于 p 可光滑空间, 换为等价范数, 结论仍成立.

对于 q 可凸空间, 证明完全类似.

在第 4 章中已经指出, 一个 2 型空间可以不是自反的, 因此 p 型空间可以不是 p 光滑的. 同样, q 余型空间可以不是 q 凸的.

5.2 Enflo-Pisier 重赋范定理

让我们继续讨论 p 光滑空间和 q 凸空间, 首先给出由条件期望和鞅确定的某些特征性质.

定理 1 (Assouad) 设 X 是 Banach 空间, (Ω, Σ, P) 是概率空间, 则

(i) X 是 p 光滑的 $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ 当且仅当存在 $c > 0$ 使得对于任何 σ 代数 $\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \Sigma$ 和 R.V. g_1, g_2, 其中 g_i 关于 Σ_i 可测, $i = 1, 2$, $g_2 \in L_p(\mu, X)$, $g_1 = E(g_2 \,|\, \Sigma_1)$, 则

$$E(\|g_2\|^p - \|g_1\|^p \,|\, \Sigma_1) \leqslant cE(\|g_2 - g_1\|^p \,|\, \Sigma_1); \tag{2.1}$$

(ii) X 是 q 凸的 $(2 \leqslant q \leqslant \infty)$ 当且仅当存在 $c > 0$, 使得对于如上的 σ 代数和函数 g_1, g_2 有

$$E(\|g_2 - g_1\|^q \,|\, \Sigma_1) \leqslant cE(\|g_2\|^q - \|g_1\|^q \,|\, \Sigma_1). \tag{2.2}$$

证明 1° 设 X 是 p 光滑的, 则 $\exists\, K > 0$ 使得

$$\|x + y\|^p + \|x - y\|^p \leqslant 2\|x\|^p + K\|y\|^p, \quad \forall x, y \in X. \tag{2.3}$$

由于 $2g_1 - E(g_2 \,|\, \Sigma_1) = g_1$, 由 Jensen 不等式

$$\|g_1\|^p = \|E(2g_1 - g_2 \,|\, \Sigma_1)\|^p \leqslant E(\|2g_1 - g_2\|^p \,|\, \Sigma_1).$$

应用此式, 将 $x=g_1, y=g_2-g_1$ 代入 (2.3) 并且关于 Σ_1 取条件期望,

$$\begin{aligned}E(\|g_2\|^p+\|g_1\|^p\,|\Sigma_1) &\leqslant E(\|g_2\|^p+\|2g_1-g_2\|^p\,|\Sigma_1)\\ &\leqslant 2E(\|g_1\|^p\,|\Sigma_1)+KE(\|g_2-g_1\|^p\,|\Sigma_1),\end{aligned}$$

此即 (2.1).

反之, 若 (2.1) 成立, $\forall x,y\in X$, 令 $g_1=x,\ g_2=x+\varepsilon y$, 其中 ε 是 Bernoulli 随机变量, $P(\varepsilon=\pm 1)=1/2$, 则 $E(g_2\,|\Sigma_1)=g_1$, 其中 $\Sigma_1=\{\phi,\Omega\}, \Sigma_2=\sigma(\{\varepsilon=1\},\{\varepsilon=-1\})$. 代入 (2.1) 并对两端取期望得到

$$E(\|x+\varepsilon y\|^p-\|x\|^p)\leqslant c\,\|y\|^p$$

或者

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x+y\|^p)-\|x\|^p\leqslant c\,\|y\|^p, \tag{2.4}$$

此即 (2.3), 所以 X 是 p 光滑的.

2° (ii) 可借助于 q 凸空间的不等式 (1.13) 类似地得到.

今后我们将记鞅为 $f=(f_n)$, 其中 $n\geqslant 0$, 记 $\mathrm{d}f=(\mathrm{d}f_n)$ 为 f 的鞅差, 即 $\mathrm{d}f_n=f_n-f_{n-1}$, 其中 $f_{-1}\equiv 0, B_{-1}=\{\varnothing,\Omega\}$.

定理 2 (Pisier)　设 X 是 Banach 空间, $1<p\leqslant 2\leqslant q<\infty$.

(i) X 是 p 光滑的当且仅当存在 $c>0$ 使得每个 X 值鞅满足

$$\sup_{n\geqslant 0}E\,\|f_n\|^p\leqslant E\,\|f_0\|^p+c\sum_{n=1}^{\infty}E\,\|\mathrm{d}f_n\|^p; \tag{2.5}$$

(ii) X 是 q 凸的当且仅当存在 $c>0$ 使得每个 X 值鞅满足

$$\sup_{n\geqslant 0}E\,\|f_n\|^q\geqslant E\,\|f_0\|^q+c\sum_{n=1}^{\infty}E\,\|\mathrm{d}f_n\|^q. \tag{2.6}$$

证明　对于 $f=(f_n)$, 以 $g_2=f_n, g_1=f_{n-1}$, 则 p 光滑情况有

$$E(\|f_n\|^p-\|f_{n-1}\|^p\,|\Sigma_{n-1})\leqslant KE(\|f_n-f_{n-1}\|^p\,|\Sigma_{n-1}),$$

q 凸情况有

$$E(\|f_n\|^q-\|f_{n-1}\|^q\,|\Sigma_{n-1})\geqslant KE(\|f_n-f_{n-1}\|^q\,|\Sigma_{n-1}),$$

取期望再相加即得到 (2.5) 或 (2.6). 由定理 1, 反过来的证明是显然的.

称 $f=(f_n)$ 是 Walsh-Paley(WP) 鞅, 若 (Ω,Σ,P) 是 [0, 1) 上的 Lebesgue 测度, B_n 是由二进区间 $\left\{\left[\dfrac{i-1}{2^n},\dfrac{i}{2^n}\right):1\leqslant i\leqslant 2^n\right\}$ 生成的 σ 代数, 并且在每个

$\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$ 上, $P(\mathrm{d}f_{n+1} = \pm x) = \frac{1}{2^{n+1}}$, 这里 x 随 n, i 不同而改变. WP 鞅是一种特殊形式的鞅, 自然对于它们 (2.5), (2.6) 成立. 另一方面, 定理 1 的充分性证明中所举出的 x 与 $x + \varepsilon y$ 可以看作一个 WP 鞅的最前面两项.

定理 3 (Pisier) (i) X 是 p 可光滑的当且仅当 $\exists c > 0$ 使得 X 值鞅满足

$$\sup_{n \geqslant 0} E\|f_n\|^p \leqslant c\sum_{n=0}^{\infty} E\|\mathrm{d}f_n\|^p; \tag{2.7}$$

(ii) X 是 q 可凸的当且仅当存在 $c > 0$ 使得任何 X 值鞅满足

$$c\sup_{n \geqslant 0} E\|f_n\|^q \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} E\|\mathrm{d}f_n\|^q. \tag{2.8}$$

上述鞅换为 WP 鞅结论仍成立.

证明 1° 设 X 的范数是 $\|\cdot\|$, 在等价范数 $|\cdot|$ 之下 p 光滑, 则 (2.5) 变为

$$\begin{aligned}\sup_{n \geqslant 0} E|f_n|^p &\leqslant E|f_0|^p + c\sum_{n=1}^{\infty} E|\mathrm{d}f_n|^p \\ &\leqslant (c \vee 1)\left(E|f_0|^p + \sum_{n=1}^{\infty} E|\mathrm{d}f_n|^p\right) = (c \vee 1)\sum_{n=0}^{\infty} E|\mathrm{d}f_n|^p.\end{aligned}$$

若 $a\|x\| \leqslant |x| \leqslant b\|x\|, \forall\, x \in X$, 则

$$a^p \sup_{n \geqslant 0} E\|f_n\|^p \leqslant (c \vee 1)b^p\left(\sum_{n=1}^{\infty} E\|\mathrm{d}f_n\|^p\right),$$

即 (2.7) 成立. 同样的证明可知 (2.8) 成立.

2° 现在证明 (2.8) 对于 X 的 q 可凸性是充分的, 至于 (2.7) 对于 p 光滑的充分性可类似证明.

考虑 WP 鞅的集合

$$M(x) = \{f = (f_n) : f_0 = x, \sup_{n \geqslant 0} \|f_n\|_q < \infty\}. \tag{2.9}$$

令

$$|x|^q = \inf\left\{c\sup_{n \geqslant 0} E\|f_n\|^q - \sum_{n=1}^{\infty} E\|\mathrm{d}f_n\|^q : f \in M(x)\right\}, \tag{2.10}$$

由 (2.8), 显然 $|x| \geqslant 0$. 由于 $M(\alpha x) = \alpha M(x)$, 后者的意义是用 α 乘以 $M(x)$ 中的每个元, 于是 $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|$. 又由 $|x|$ 的定义知道

$$\|x\| \leqslant |x| \leqslant c^{1/q}\|x\|. \tag{2.11}$$

右边的不等式通过取 $f_0 = x, \mathrm{d}f_n = 0\ (n \geqslant 1)$ 得到. 左边的不等式是因为 (2.8) 的右端可以写成

$$\|x\|^q = \|f_0\|^q = E\|\mathrm{d}f_0\|^q \leqslant c\sup_{n\geqslant 0} E\|f_n\|^q - \sum_{n=1}^{\infty} E\|\mathrm{d}f_n\|^q.$$

代替验证关于 $|\cdot|$ 的三角不等式, 我们验证 $\{x : |x| \leqslant 1\}$ 是凸集, 这只需证明

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^q + c^{-1/q}\left|\frac{x-y}{2}\right|^q \leqslant \frac{1}{2}(|x|^q + |y|^q), \quad \forall x, y \in X. \tag{2.12}$$

这个不等式还说明 $(X, |\cdot|)$ 是 q 凸空间.

$\forall \delta > 0$, 取 $f = (f_n) \in M(x), g = (g_n) \in M(y)$ 使得

$$f_0 = x, \quad \sup_{n\geqslant 0} E\|f_n\|^q < \infty, \quad c\sup_{n\geqslant 0} E\|f_n\|^q - \sum_{n=1}^{\infty} E\|\mathrm{d}f_n\|^q \leqslant |x|^q + \delta,$$

$$g_0 = y, \quad \sup_{n\geqslant 0} E\|g_n\|^q < \infty, \quad c\sup_{n\geqslant 0} E\|g_n\|^q - \sum_{n=1}^{\infty} E\|\mathrm{d}g_n\|^q \leqslant |y|^q + \delta.$$

f, g 都是 WP 鞅. 取 ε 是 Bernoulli 随机变量, 令 $h = (h_n)$ 是鞅,

$$h_0 = \frac{x+y}{2}, \quad h_n = \frac{1+\varepsilon}{2} f_{n-1} + \frac{1-\varepsilon}{2} g_{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

显然 $\sup\limits_n E\|h_n\|^q < \infty, h \in M\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$. 利用 $\varphi(t) = t^q$ 的凸性,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x+y}{2}\right|^q &\leqslant c\sup_{n\geqslant 0} E\|h_n\|^q - \sum_{n=1}^{\infty} E\|\mathrm{d}h_n\|^q \\
&\leqslant \frac{c}{2}\sup_{n\geqslant 0} E(\|f_n\|^q + \|g_n\|^q) - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} E(\|\mathrm{d}f_n\|^q + \|\mathrm{d}g_n\|^q) \\
&\leqslant \frac{1}{2}(|x|^q + |y|^q) - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^q + 2\delta \\
&\leqslant \frac{1}{2}(|x|^q + |y|^q) - c^{-1/q}\left|\frac{x-y}{2}\right|^q + 2\delta,
\end{aligned}$$

δ 是任意的, 故得 (2.12). 以 $x + y$ 代替 $x, x - y$ 代替 y 得到

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^q + \left|\frac{x-y}{2}\right|^q \geqslant 2|x|^q + c^{-1/q}|y|^q,$$

$(X, |\cdot|)$ 是 q 凸的. 证毕.

注意, 一致凸空间一定是超自反空间. 实际上由 5.1 节定理 6 知道, 一致凸性质是超性质: 若 X 是一致凸的, 则每个在 X 中有限可表现的空间是一致凸的从而是自反的, 所以 X 是超自反的.

例 1 超自反空间不必是一致凸的.

在 5.1 节例 2 中定义的 $(l^2,\|\cdot\|)$ 有一个等价范数使之成为 $(l^2,\|\cdot\|_2)$. 由于自反性是同构不变的, 从而超自反性也是同构不变的. 因此 $(l^2,\|\cdot\|)$ 是超自反空间, 但它不是严格凸的. 尽管有这个反例, 但一个十分深刻的结论是超自反空间容许有等价范数使之成为一致凸空间, 这一结论被称为重赋范定理, 它首先是由 Enflo 证明的. 它的鞅方法的证明是由 Pisier 给出的. 为证明重赋范定理, 还需要两个基本的事实, 它们的证明将留到本章最后一节中去进行:

(I) (5.4 节推论 3)X 是超自反的当且仅当 $L_2(\mu,X)$ 是超自反的.

(II) (5.4 节推论 4) 若 X 是超自反的, 则存在 $c>0$ 和 $q>2$ 使得对于 X 的每个单调基序列 $\{x_n\}$ 和实数列 $\{a_n\}$,

$$(\Sigma\,|a_n|^q)^{1/q}\leqslant c\,\|\Sigma a_n x_n\|. \tag{2.13}$$

定理 4 (Enflo-Pisier) 设 X 超自反, 则存在 $q\geqslant 2$ 和 $c>0$ 以及 X 上的等价范数使得在此范数下 $\delta_X(\varepsilon)\geqslant c\varepsilon^q$ $(0\leqslant\varepsilon\leqslant 2)$.

证明 设 X 超自反, 仍以 $M(x)$ 记以 x 为起点的 L_2 有界 WP 鞅全体, 其中 $x=f_0=Ef_n$. 由上述基本事实 (I), $L_2(\mu,X)$ 是超自反空间, $L_2(\mu,X)$ 中的每个鞅差可视为它的单调基,

$$\left\|\sum_{i=0}^{n}\mathrm{d}f_i\right\|_2=\|f_n\|_2\leqslant\|f_m\|_2=\left\|\sum_{i=0}^{m}\mathrm{d}f_i\right\|_2,\quad m\geqslant n.$$

由基本事实 (II),

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\|\mathrm{d}f_n\|_2^q\right)^{1/q}\leqslant c\left\|\sum_{i=0}^{n}\mathrm{d}f_i\right\|_2,\quad \forall n\geqslant 1. \tag{2.14}$$

应用 Hölder 不等式得到

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\|\mathrm{d}f_i\|_2^2\right)^{1/2}\leqslant(n+1)^{\frac12-\frac1q}\left(\sum_{i=0}^{n}\|\mathrm{d}f_i\|_2^q\right)^{1/q}\leqslant c(n+1)^{\frac12-\frac1q}\left\|\sum_{i=0}^{n}\mathrm{d}f_i\right\|_2, \tag{2.15}$$

记 $c_n=\sqrt{3}(2c)^{-1}(n+1)^{\frac12-\frac1q}$. 下面分几步证明:

1° $\forall f\in M(x)$, f_n a.e. 和 $L_2(\mu,X)$ 收敛, 记其极限为 f_∞, 令

$$|x|_n^2=\inf\left\{\|f_\infty\|_2^2-c_n^2\sum_{i\in A}\|\mathrm{d}f_i\|_2^2: f\in M(x),\ A\subset\mathbf{N}, |A|=n\right\}, \tag{2.16}$$

这里 $\mathbf{N}$ 是自然数集, $|A|$ 表示 A 中自然数的个数, 关于 $|x|_n$ 有:

(i) $|x|_n \leqslant \|x\|, \forall x \in X$. 只需取 $f_n \equiv x$ 即得之.

(ii) 将 (2.15) 应用于 $\sum\limits_{i\in A} \|\mathrm{d}f_i\|_2^2$ 同样会得到

$$\left(\sum_{i\in A} \|\mathrm{d}f_i\|_2^2\right)^{1/2} \leqslant c(n+1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \left\|\sum_{i\in A} \mathrm{d}f_i\right\|_2^2 \leqslant c(n+1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \|f_\infty\|_2^2,$$

后者是由于 $(\mathrm{d}f_i, i \geqslant 1)$ 是单调基序列. 于是

$$\sum_{i\in A} \|\mathrm{d}f_i\|_2^2 \leqslant \frac{3}{4c_n^2} \|f_\infty\|_2^2. \tag{2.17}$$

$\forall x \in X, \varepsilon > 0$, 由 $|\cdot|_n$ 的定义, 取 $f \in M(x)$ 和 $A \subset \mathbf{N}, |A| = n$ 使得

$$|x|_n^2 \geqslant \|f_\infty\|_2^2 - c_n^2 \sum_{i\in A} \|\mathrm{d}f_i\|_2^2 - \varepsilon.$$

应用 (2.17) 得出

$$|x|_n^2 \geqslant \frac{1}{4} \|f_\infty\|_2^2 - \varepsilon. \tag{2.18}$$

由于 $x = Ef_\infty$, 故 $\|x\| \leqslant E\|f_\infty\| \leqslant \|f_\infty\|_2$, 代入上式得到 $|x|_n^2 \geqslant \frac{1}{4}\|x\|^2 - \varepsilon$. ε 是任意的, 故 $|x|_n \geqslant \frac{1}{2}\|x\|$. 总之

$$2^{-1}\|x\| \leqslant |x|_n \leqslant \|x\|. \tag{2.19}$$

2° 现证不等式

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|_n^2 \leqslant \frac{1}{2}(|x|_n^2 + |y|_n^2). \tag{2.20}$$

对于 $x, y \in X$ 和 $\varepsilon > 0$, 取 $f = (f_n) \in M(x)$ 和 $g = (g_n) \in M(y)$ 使得

$$|x|_n^2 \geqslant \|f_\infty\|_2^2 - c_n^2 \sum_{i\in A} \|\mathrm{d}f_i\|_2^2 - \varepsilon, \quad |y|_n^2 \geqslant \|g_\infty\|_2^2 - c_n^2 \sum_{i\in A'} \|\mathrm{d}g_i\|_2^2 - \varepsilon, \tag{2.21}$$

其中 $|A| = |A'| = n$. 现在我们调整 A 与 A' 使之一致并且仍使 (2.21) 成立, 做法是当 k_1 是 A 的第一个不在 A' 中的指标时, 若 $n \leqslant k_1 - 1$, 令 $\tilde{g}_n = g_n$; 若 $n \geqslant k_1$, 则令 $\tilde{g}_n = g_{n-1}$. 显然 $\tilde{g} = (\tilde{g}_n) \in M(x), \tilde{g}_\infty = g_\infty$ 并且

$$\mathrm{d}\tilde{g}_n = \begin{cases} \mathrm{d}g_{n-1}, & n > k_1; \\ 0, & n = k_1; \\ \mathrm{d}g_n, & n < k_1. \end{cases}$$

于是

$$|y|_n^2 = \|\tilde{g}_\infty\|_2^2 - c_n^2 \sum_{i\in\tilde{A}'} \|\mathrm{d}\tilde{g}_i\|_2^2 - \varepsilon,$$

这里 $\tilde{A}'$ 是包含 k_1 且 $\left|\tilde{A}'\right| = n$ 的指标集. 若 k_2 是下一个在 A 中而不在 A' 中 (或反过来在 A' 中而不在 A 中) 的指标, 作类似的移动, 经有限步之后, A 与 A' 就成为同一集合. 仍记之为 A. 现在定义 $h = (h_n) \in M\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ 使得

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+y}{2}\right|_n^2 &\leqslant \|h_\infty\|_2^2 - c_n^2 \sum_{i\in A} \|\mathrm{d}h_i\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2}(\|f_\infty\|_2^2 + \|g_\infty\|_2^2) - \frac{1}{2}c_n^2 \sum_{i\in A}(\|\mathrm{d}f_i\|_2^2 + \|\mathrm{d}g_i\|_2^2) \\ &\leqslant \frac{1}{2}(|x|_n^2 + |y|_n^2) - \varepsilon,\end{aligned}$$

ε 是任意的, 故 (2.20) 成立.

3° 映射 $x \to |x|_n$ 在 X 上连续. $\forall\varepsilon > 0$, 取 $f \in M(x)$ 使得

$$|x|_n^2 \geqslant \|f_\infty\|_2^2 - c_n^2 \sum_{i\in A} \|\mathrm{d}f_i\|_2^2 - \varepsilon.$$

若 $u \in X$ 是任一元, 容易知道 $g = (f_n + u) \in M(x+u)$, $\mathrm{d}g = (\mathrm{d}f_n) = \mathrm{d}f$, 所以

$$\begin{aligned}|x+u|_n^2 &\leqslant \|f_\infty + u\|_2^2 - c_n^2 \sum_{i\in A} \|\mathrm{d}f_i\|_2^2 \\ &\leqslant \|f_\infty\|_2^2 + 2\|u\| \ \ \|f_\infty\|_1 + \|u\|^2 - c_n^2 \sum_{i\in A} \|\mathrm{d}f_i\|_2^2 \\ &\leqslant |x|_n^2 + 2\|u\| \ \ \|f_\infty\|_1 + \|u\|^2 + \varepsilon.\end{aligned}$$

但由 (2.18), $\|f_\infty\|_1 \leqslant \|f_\infty\|_2 \leqslant (4|x|_n + \varepsilon)^{1/2}$, 故

$$|x+u|_n^2 - |x|_n^2 \leqslant 4\|u\| \ \ \|x\| + 5\|u\|^2,$$

这说明

$$\left||x+u|_n^2 - |x|_n^2\right| \leqslant 4\|u\| \ \ \|x\| + 5\|u\|^2.$$

由此得到连续性.

4° $|x|_n$ 是 X 上的范数. 实际上由 2°, 当 $|x|_n = |y|_n = 1$ 时, $|x+y|_n \leqslant 2$. 由连续性 $|\cdot|_n$ 是 X 上的凸函数. 容易知道 $|x|_n \geqslant 0$, $|\alpha x|_n = |\alpha| \ \ |x|_n$, 所以 $|\cdot|_n$ 是 X 上的范数.

5° 若 $f \in M(x)$, $g \in M(y)$ 满足 (2.21), $h = (h_n) \in M\left(\frac{x+y}{2}\right)$ 仍如上面定义, 则由 (2.18),

$$\begin{aligned} c_n^2 \sum_{i \in A} \|\mathrm{d}h_n\|_2^2 &= \frac{1}{2} c_n^2 \sum_{i \in A} (\|\mathrm{d}f_{i-1}\|_2^2 + \|\mathrm{d}g_{i-1}\|_2^2) \\ &\leqslant \frac{3}{8}(\|f_\infty\|_2^2 + \|g_\infty\|_2^2) \leqslant \frac{3}{2}(|x|_n^2 + |y|_n^2 + 2\varepsilon) \end{aligned}$$

或者 $c_n^2 \sum_{i \in A} \|\mathrm{d}h_i\|_2^2 \leqslant 3(1+\varepsilon)$, 从而必有 $2 \leqslant j_0 \leqslant n$, $c_n^2 \|\mathrm{d}h_{j_0}\|_2^2 \leqslant 3(1+\varepsilon)/n$. 注意 $\|\mathrm{d}h_1\| = \|(x-y)/2\|$, 设 $c_n^2 \|(x-y)/2\|^2 \geqslant 4/n$, 则 $\|\mathrm{d}h_1\|_2^2 \geqslant 4/nc_n^2$.

令 $B = ((A \backslash \{j_0\}) + 1) \cup \{1\}$, 则 $|B| = n$ 并且

$$\begin{aligned} c_n^2 \sum_{i \in B} \|\mathrm{d}h_i\|_2^2 &\geqslant c_n^2 \sum_{i \in A} \|\mathrm{d}h_{i+1}\|_2^2 - \frac{3(1+\varepsilon)}{n} + \frac{4}{n} \\ &\geqslant c_n^2 \sum_{i \in A} \|\mathrm{d}h_{i+1}\|_2^2 + \frac{1-3\varepsilon}{n}. \end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned} \left|\frac{x+y}{2}\right|_n^2 &\leqslant \|h_\infty\|_2^2 - c_n^2 \sum_{i \in B} \|\mathrm{d}h_i\|_2^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}(\|f_\infty\|_2^2 + \|g_\infty\|_2^2) - c_n^2 \sum_{i \in A} \|\mathrm{d}h_{i+1}\|_2^2 - \frac{1-3\varepsilon}{n} \\ &\leqslant \frac{1}{2}(\|f_\infty\|_2^2 + \|g_\infty\|_2^2) - c_n^2 \sum_{i \in A} \frac{1}{2}\left(\|\mathrm{d}f_i\|_2^2 + \|\mathrm{d}g_i\|_2^2 - \frac{1-3\varepsilon}{n}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}(|x|_n^2 + |y|_n^2 + 2\varepsilon) - \frac{1-3\varepsilon}{n}. \end{aligned}$$

ε 是任意的, 故当 $|x|_n^2 + |y|_n^2 = 2, c_n^2 \|(x+y)/2\| \geqslant 4/n$ 时, $|(x+y)/2|_n^2 \leqslant 1 - n^{-1}$. 换句话说, $\|x-y\| \, [(|x|_n^2 + |y|_n^2)/2]^{-1/2} \geqslant 4/\sqrt{n}c_n$ 时

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|_n^2 \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2}(|x|_n^2 + |y|_n^2). \tag{2.22}$$

以上事实对于每个 n 都成立, 于是得到可列个范数 $|\cdot|_n$, 注意 $4/\sqrt{n}c_n \sim \alpha n^{-1/q}$, 故不妨设 $\|x-y\| \geqslant \alpha n^{-1/q}\left[\frac{1}{2}(|x|_n^2 + |y|_n^2)\right]^{1/2}$ 时,

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|_n^2 \leqslant \left(1 - \frac{\beta}{n}\right) \frac{(|x|_n^2 + |y|_n^2)}{2}. \tag{2.23}$$

6° 令

$$|x|^2 = \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}|x|_{2^n}^2, \quad \forall x \in X, \tag{2.24}$$

$|\cdot|$ 也是 X 上的范数并且也有

$$\frac{1}{2}\|x\| \leqslant |x| \leqslant \|x\|, \quad \forall x \in X. \tag{2.25}$$

我们证明对于某个 $q' > q, (x, |\cdot|)$ 是 q' 凸的.

设 $x, y \in X, |x|^2 + |y|^2 = 2, |x-y| \geqslant \varepsilon$, 此时由 (2.25)$\|x-y\| \geqslant \varepsilon$. 对于所有 n,

$$\frac{1}{2}(|x|_n^2 + |y|_n^2) \leqslant \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leqslant 2(|x|^2 + |y|^2) = 4,$$

故有

$$\|x-y\|\left((|x|_n^2 + |y|_n^2)/2\right)^{-1/2} \geqslant \varepsilon/2.$$

取 $n = 2^k$, 其中 k 是 $\alpha 2^{-k/q} \leqslant \varepsilon/2$, 或 $\geqslant q\log_2(2\alpha/\varepsilon)$ 的最小自然数, 则

$$\|x-y\|\left((|x|_n^2 + |y|_n^2)/2\right)^{-1/2} \geqslant \alpha 2^{-k/q}.$$

于是由 (2.22),

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|_{2^k}^2 \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\frac{1}{2}(|x|_{2^k}^2 + |y|_{2^k}^2),$$

再由 (2.24),

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+y}{2}\right|^2 &\leqslant \frac{6}{\pi^2}\sum_{n\neq k}\frac{1}{2n^2}(|x|_{2^n}^2 + |y|_{2^n}^2) + \frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\frac{|x|_{2^k}^2 + |y|_{2^k}^2}{2} \\ &\leqslant \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2) - \frac{6\beta}{k^2\pi^2 2^k}\frac{1}{2}(|x|_{2^k}^2 + |y|_{2^k}^2).\end{aligned}$$

由 (2.19) 和 (2.24) 有 $|x|_{2^k}^2 + |y|_{2^k}^2 \geqslant \frac{1}{4}(|x|^2 + |y|^2)$, 故得出

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+y}{2}\right|^2 &\leqslant \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2) - \frac{6\beta}{k^2\pi^2 2^{k+3}}(|x|^2 + |y|^2) \\ &\leqslant 1 - \frac{\beta}{k^2\pi^2 2^{k+1}}, \quad |x|^2 + |y|^2 = 2.\end{aligned}$$

这说明 $(X, |\cdot|)$ 是一致凸的. 注意 $\alpha 2^{-(k-1)/q} \leqslant \varepsilon/2$ 或 $2^k \leqslant 2\left(\frac{2\alpha}{\varepsilon}\right)^q$, 故在范数 $|\cdot|$ 之下

$$\delta_X(\varepsilon) \geqslant \frac{\beta}{k^2\pi^2 2^{k+1}} \geqslant \frac{\beta\varepsilon^q}{4k^2\pi^2(2\alpha)^q} \geqslant \frac{\beta\varepsilon^q}{4\pi^2(2\alpha)^q\left(q\log_2\frac{2\alpha}{\varepsilon} + 1\right)^2}.$$

对于任何 $q' > q$, 容易找到 c 使得

$$\delta_X(\varepsilon) \geqslant c\varepsilon^{q'}, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2. \tag{2.26}$$

定理 5 设 X 超自反, 则存在 $c > 0$ 和 $p(1 < p \leqslant 2)$ 以及等价范数 $|\cdot|$ 使得在此范数之下,

$$\rho_X(\tau) \leqslant c\tau^p, \quad \tau > 0. \tag{2.27}$$

证明 这里要用到我们将在 5.4 节中证明的第三个基本事实:

(III) (5.4 节推论 1)X 超自反当且仅当 X^* 超自反.

现在设 X^* 超自反. 由刚刚证明的定理, X^* 存在等价范数 $|\cdot|^*$, 例如, $2^{-1}\|x^*\| \leqslant |x^*|^* \leqslant \|x^*\|, \forall\, x^* \in X^*$, 在此等价范数下, X^* 的凸性模

$$\delta_{(X^*,|\cdot|^*)}(\varepsilon) \geqslant c\varepsilon^q, \quad c > 0, \quad q \geqslant 2. \tag{2.28}$$

在 X 上定义范数

$$|x| = \sup_{|x^*|^* \leqslant 1} |x^*x|, \quad \forall x \in X,$$

则 $\|x\| \leqslant |x| \leqslant 2\|x\|, \forall x \in X$. 利用 5.1 节的结论必有

$$\rho_{(X,|\cdot|)}(\tau) \geqslant \sup_{0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2} \left(\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta^*_{(X^*,|\cdot|^*)}(\varepsilon) \right).$$

在 5.1 节定理 8 我们提到过, 当 $\delta^*_{(X^*,|\cdot|^*)}$ 满足 (2.28) 时必有

$$\rho_{(X,|\cdot|)}(\tau) \leqslant c'\tau^p, \quad \tau > 0. \quad p = q(q-1)^{-1}.$$

上述证明还说明, 一致凸空间可赋予等价范数使之成为 p 光滑 $(1 < p \leqslant 2)$ 的, 同时也可赋予等价范数使之成为 q 凸 $(2 \leqslant q < \infty)$ 的.

5.3 p 光滑空间值鞅的大数定律

本节讨论空间的 p 光滑性与在其中取值的鞅的大数定律之间的相互联系. 我们先给出两个简单条件.

定理 1 设 X 是 p 光滑空间, $1 < p \leqslant 2$, $f = (f_n)$ 是 X 值鞅.

(i) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E(\|df_n\|^p \,|B_{n-1}) < \infty$ a.e., 则 f_n a.e. 收敛;

(ii) 若 $0 < a_n \uparrow \infty, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{-p} E(\|df_n\|^p \,|B_{n-1}) < \infty$ a.e., 则

$$a_n^{-1} f_n \to 0 \text{ a.e.}.$$

证明 1° $\forall\, \lambda > 0$, 令 $\tau = \inf\left\{n : \sum_{i=1}^{n+1} E(\|\mathrm{d}f_i\|^p\,|B_{i-1}) > \lambda\right\}$, 则

$$E\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathrm{d}f_{\tau\wedge n}\|^p = E\sum_{i=1}^{\tau} \|\mathrm{d}f_i\|^p = E\sum_{i=1}^{\tau} E(\|\mathrm{d}f_i\|^p\,|B_{i-1}) \leqslant \lambda.$$

由 p 光滑性, 对于停止鞅 $f^{(\tau)} = (f_{\tau\wedge n})$,

$$\sup_{n\geqslant 1} E\,\|f_{\tau\wedge n}\|^p \leqslant c\sum_{n=1}^{\infty} E\,\|\mathrm{d}f_{\tau\wedge n}\|^p \leqslant c\lambda.$$

由 RN 性质 $f_{\tau\wedge n}$ a.e. 收敛. 在 $\{\tau = \infty\}$ 上 $f_{\tau\wedge n} = f_n$, 故在 $\{\tau = \infty\}$ 上 f_n a.e. 收敛. λ 是任意的以及由 $\sum_{i=1}^{\infty} E(\|\mathrm{d}f_i\|^p\,|B_{i-1})$ a.e. 有限性, 故 f_n a.e. 收敛.

2° 令 $\mathrm{d}\tilde{f}_n = \mathrm{d}f_n/a_n, \tilde{f} = (\tilde{f}_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\tilde{f}_i\right)$, $\tilde{f}$ 满足 (i), 从而 a.e. 收敛. Kronecker 引理保证了 $a_n^{-1} f_n \to 0$ a.e..

定理 2 (Pisier, Rosenski) 设 X 是 Banach 空间, 则下述条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间 $(1 < p \leqslant 2)$;

(ii) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} E\,\|\mathrm{d}f_n\|^p < \infty$, 则 X 值鞅 $f = (f_n)$ L_p 收敛;

(iii) 在上述条件下, f_n a.e. 收敛;

(iv) 在上条件下 f_n 依概率收敛.

以上结论换为 WP 鞅仍成立.

证明 只有 (i) $\Rightarrow$ (ii) 和 (iv) $\Rightarrow$ (i) 是需要证明的.

设 X 同构于 p 光滑空间, $\sum_{n=1}^{\infty} E\,\|\mathrm{d}f_n\|^p < \infty$, 由 Pisier 不等式, f_n 是 L_p 有界的. 由于 p 光滑空间具有 RN 性质, 所以 f_n、L_p 收敛, (i) $\Rightarrow$ (ii) 成立. 对于 (iv) $\Rightarrow$ (i), 假定每个 WP 鞅满足 (iv). 不妨假定 $f_0 = 0$. 考虑 WP 鞅的两类空间

$$G = \left\{f = (f_n) :\ \|f\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E\,\|\mathrm{d}f_n\|^p\right)^{1/p} < \infty\right\},$$

$$G_0 = \left\{f = (f_n) :\ d(f,0) = \sup_{n\geqslant 1} E\,\|f_n\|\,(1 + \|f_n\|)^{-1}\right\}.$$

标准的验证说明 $(G, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, G_0 是以 $d(f,g) = d(f-g,0)$ 为完备度量的 F 空间. 由条件 (iv) 应用标准方法可以证明恒等映射 $I : G \to G_0$ 具有闭图像,

从而 I 连续. 这说明 $\forall\, 0<\varepsilon<1, \exists\delta>0$, 使得当每个鞅满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E\|\mathrm{d}f_n\|^p<\delta$ 时,

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}P(\|f_n\|>\varepsilon)\leqslant E\left(\frac{\|f_n\|}{1+\|f_n\|}\right)\leqslant\varepsilon^2,\quad n\geqslant 1$$

或者

$$\sup_{n\geqslant 1}P(\|f_n\|>\varepsilon)<2\varepsilon. \tag{3.1}$$

定义 $\tau=\inf\{n:\|f_n\|>\varepsilon\}$, 则 $f^{(\tau)}=(f_{\tau\wedge n})$ 是停止鞅, 由于 $\mathrm{d}f_{\tau\wedge n}=\mathrm{d}f_n\chi_{\{\tau\geqslant n\}}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\|\mathrm{d}f_{\tau\wedge n}\|^p\leqslant\sum_{n=1}^{\tau}E\|\mathrm{d}f_n\|^p<\delta,$$

于是

$$P(\|f_{\tau\wedge n}\|>\varepsilon)=P(\tau\leqslant n)<2\varepsilon.$$

从而

$$P(f^*>\varepsilon)=P(\tau<\infty)=\lim_{n\to\infty}P(\tau\leqslant n)=\lim_{n\to\infty}P(\|f_{\tau\wedge n}\|>\varepsilon)\leqslant 2\varepsilon.$$

这说明 $\exists c>0$, 当 $f^*>1$ a.e. 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E\|\mathrm{d}f_n\|^p\geqslant c$. 以下证明 $\forall k\geqslant 1$,

$$\lambda^p P(f_k^*>2)\leqslant c\sum_{n=1}^{k}E\|\mathrm{d}f_n\|^p. \tag{3.2}$$

不妨设 $P(f_k^*>2)>0$, 取 $f^{(j)}=(f_n^{(j)})$ 是 f 的独立同分布鞅 (见附录), 令 $A_j=\{f_k^{(j)*}\leqslant 2\}$, $u_j=\chi_{A_j}$ 并且定义鞅 $\tilde{f}=(\tilde{f}_n)$, 其鞅差为

$$(\mathrm{d}f_1^{(1)},\cdots,\mathrm{d}f_k^{(1)},u_1\mathrm{d}f_1^{(2)},\cdots,u_1\mathrm{d}f_k^{(2)},u_1u_2\mathrm{d}f_1^{(3)},\cdots,u_1u_2\mathrm{d}f_k^{(3)},\cdots).$$

注意 $Eu_j=P(f_k^*\leqslant 2)$, 对于 $\tilde{f}=(\tilde{f}_n)$ 有

$$\sum_{n=1}^{kj}E\left\|\mathrm{d}\tilde{f}_n\right\|^p=[1+Eu_1+\cdots+(Eu_1)^{j-1}]\sum_{n=1}^{k}E\|\mathrm{d}f_n\|^p,$$

令 $j\to\infty$ 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\left\|\mathrm{d}\tilde{f}_n\right\|^p\leqslant\frac{1}{1-Eu_1}\sum_{n=1}^{k}E\|\mathrm{d}f_n\|^p. \tag{3.3}$$

u_j 相互独立并且 $\sum_{j=1}^{\infty} P(u_j=0)=\infty$, 由 Borel-Cantelli 引理$P(A_k^c, \text{i.o.})=1$. 这说明 $\tilde{f}^*>1$ a.e., 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} E\left\|\mathrm{d}\tilde{f}_n\right\|^p \geqslant c$. (3.3) 变为

$$cP(f_k^*>2) \leqslant \sum_{n=1}^{k} E\|\mathrm{d}f_n\|^p. \tag{3.4}$$

此不等式对于任何鞅成立. 将 f 换为 $2\lambda^{-1}f, c$ 记为 $c^{-1}2^p$, 则 (3.2) 成立. k 是任意的, 故有

$$\lambda^p P(f^*>\lambda) \leqslant c\sum_{n=1}^{\infty} E\|\mathrm{d}f_n\|^p. \tag{3.5}$$

现在设 $f=(f_n)$ 是 WP 鞅, $\delta,\lambda>0, \beta>\delta+1$, 定义

$$\mu=\inf\{n: f_n^*>\lambda\},$$
$$v=\inf\{n: f_n^*>\beta\lambda\},$$
$$\sigma=\inf\left\{n: \sum_{i=1}^{n+1}\|\mathrm{d}f_i\|^p>(\delta\lambda)^p\right\}.$$

由于 $\|\mathrm{d}f_n\|$ 关于 B_{n-1} 可测, μ,v,σ 为停时. 令 $u_k=\chi_{\{\mu<k\leqslant\sigma\wedge v\}}$, u_k 可料, $\tilde{f}=(\tilde{f}_n)=\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\mathrm{d}f_k, n\geqslant 1\right)$ 仍是 WP 鞅. 注意在 $\{\mu<k\leqslant\sigma\wedge v\}$ 上, 只要 $\mu<\infty$ 就有 $\sum_{i=1}^{n}\|u_i\mathrm{d}f_i\|^p=\sum_{i=1}^{n}\|\mathrm{d}f_i\|^p\leqslant(\delta\lambda)^p$. 于是

$$E\sum_{i=1}^{\infty}\|u_i\mathrm{d}f_i\|^p \leqslant \delta^p\lambda^p P(\mu<\infty)=\delta^p\lambda^p P(f^*>\lambda). \tag{3.6}$$

因此在 $\{v=n,\sigma=\infty\}$ 上 $f_n^*>\beta\lambda$, $\sum_{i=1}^{n}\|u_i\mathrm{d}f_i\|^p\leqslant(\delta\lambda)^p$. 此时存在 $k_0, 1\leqslant k_0\leqslant n$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\mathrm{d}f_i = f_n-f_{k_0}=f_n-f_{k_0-1}-\mathrm{d}f_{k_0},$$
$$\left\|\sum_{i=1}^{n} u_i\mathrm{d}f_i\right\| \geqslant f_n^*-\|f_{k_0-1}\|-\|\mathrm{d}f_{k_0}\|\geqslant(\beta-\delta-1)\lambda,$$

n 是任意的, 故

$$\left\{f^*>\beta\lambda, \left(\sum_{i=1}^{\infty}\|\mathrm{d}f_i\|^p\right)^{1/p}\leqslant\delta\lambda\right\}\subset\{\tilde{f}^*\geqslant(\beta-\delta-1)\lambda\}.$$

由 (3.5), (3.6),

$$P\left\{f^*>\beta\lambda,\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|\mathrm{d}f_i\|^p\right)^{1/p}\leqslant\delta\lambda\right\}\leqslant P\{\tilde{f}^*\geqslant(\beta-\delta-1)\lambda\}$$
$$\leqslant c(\beta-\delta-1)^{-p}\lambda^{-p}E\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n\mathrm{d}f_n\|^p$$
$$\leqslant c\delta^p(\beta-\delta-1)^{-p}P(f^*>\lambda).$$

记 $\varepsilon=c\delta^p(\beta-\delta-1)^{-p}$, 则

$$P(f^*>\beta\lambda)\leqslant P\left(f^*>\beta\lambda,\sum_{i=1}^{\infty}\|\mathrm{d}f_i\|^p\leqslant(\delta\lambda)^p\right)+P\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|\mathrm{d}f_i\|^p\geqslant(\delta\lambda)^p\right)$$
$$\leqslant\varepsilon P(f^*>\lambda)+P\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|\mathrm{d}f_i\|^p\geqslant(\delta\lambda)^p\right),\tag{3.7}$$

于是

$$E(f^*)^p=\beta^p p\int_0^{\infty}\lambda^{p-1}P(f^*>\beta\lambda)\mathrm{d}\lambda$$
$$\leqslant\varepsilon\beta^p p\int_0^{\infty}\lambda^{p-1}P(f^*>\lambda)\mathrm{d}\lambda$$
$$+\beta^p p\int_0^{\infty}\lambda^{p-1}P\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|\mathrm{d}f_i\|^p\geqslant(\delta\lambda)^p\right)\mathrm{d}\lambda$$
$$\leqslant\varepsilon\beta^p E(f^*)^p+\frac{\beta^p}{\delta^p}E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|\mathrm{d}f_i\|^p\right).$$

取 β 使 $\varepsilon\beta^p<1$, 则

$$E(f^*)^p\leqslant\beta^p\delta^{-p}(1-\varepsilon\beta^p)^{-1}E\sum_{i=1}^{\infty}\|\mathrm{d}f_i\|^p,\tag{3.8}$$

令 $c=\beta^p\delta^{-p}(1-\varepsilon\beta^p)^{-1}$, 则

$$\sup_{n\geqslant1}E\|f_n\|^p\leqslant cE\sum_{i=1}^{\infty}\|\mathrm{d}f_i\|^p.$$

X 是 p 可光滑的.

下面定理属于 Hoffmann-Jørgensen, Pisier.

定理 3 X 是 p 可光滑的当且仅当下面条件之一对于任何 X 值鞅 $f=(f_n)$ 成立:

(i) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}E\|\mathrm{d}f_n\|^p<\infty$, 则 $n^{-1}f_n\to 0$ a.e.;

(ii) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\|\mathrm{d}f_n\|^p\in L_\infty$, 则 $n^{-1}f_n\to 0$ 依概率收敛.

将其中的鞅换为 WP 鞅, 结论仍成立.

证明 若 X 是 p 可光滑的, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}E\|\mathrm{d}f_n\|^p<\infty$, 定义 $\mathrm{d}\tilde{f}_n=\mathrm{d}f_n/n$, $\tilde{f}_n=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}\tilde{f}_i$, 则鞅 $\tilde{f}=(\tilde{f}_n)$ L_p 有界. X 具有 RN 性质, 于是 $\tilde{f}_n$ 依 L_p 范数收敛, 从而 a.e. 收敛. 由 Kronecker 引理 $n^{-1}f_n\to 0$ a.e..

为证 (ii) $\Rightarrow$ (i), 考虑 WP 鞅的两类空间

$$G_0=\left\{f=(f_n):\|f\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}E\|\mathrm{d}f_n\|^p\right)^{1/p}<\infty\right\},$$

$$G_1=\left\{f=(f_n):d(f,0)=\sup_{n\geqslant 1}E\left(\frac{\|f_n\|}{n+\|f_n\|}\right)<\infty\right\}.$$

类似于定理 2(i) $\Rightarrow$ (ii) 的证明知映射 $I:G_0\to G_1$ 有闭图像, 从而连续. 故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得当 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}E\|\mathrm{d}f_n\|^p<\delta^p$ 时,

$$\sup_{n\geqslant 1}P(\|f_n\|>n\varepsilon)<\varepsilon. \tag{3.9}$$

现在若 $f=(f_n)$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}E\|\mathrm{d}f_n\|^p<\delta^p$, 考虑由鞅差序列

$$(\underbrace{0,\cdots,0}_{j},(j+1)\mathrm{d}f_1,\cdots,(j+k)\mathrm{d}f_k,0,\cdots) \tag{3.10}$$

确定的鞅 $\tilde{f}=(\tilde{f}_n)$, 由于

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{-p}E\left\|\mathrm{d}\tilde{f}_i\right\|^p=\sum_{i=1}^{\infty}E\|\mathrm{d}f_n\|^p<\delta^p,$$

从而由 (3.9),

$$P\left(\frac{\left\|\tilde{f}_{j+k}\right\|}{j+k}>\varepsilon\right)=P\left(\frac{1}{j+k}\left\|\sum_{i=1}^{k}(j+i)\mathrm{d}f_i\right\|>\varepsilon\right)<\varepsilon.$$

令 $j\to\infty$ 得到 $P(\|f_k\|>\varepsilon)\leqslant\varepsilon$.

由此若 $f^* > 1$ a.e., 则必有 $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathrm{d}f_n\|^p \geqslant c^p > 0$, c 是某个常数. 由定理 2(iv) ⇒ (i) 的证明知道 X 是 p 可光滑的.

在 (ii) 的条件之下, 可定义一个满足 (i) 的鞅使同样的结论成立. 故也可得到 X 的 p 可光滑性.

推论 1　X 是超自反空间当且仅当对于任何 X 值鞅, 若 $\sup_{n\geqslant 1} E\|\mathrm{d}f_n\|^2 < \infty$, 则 $n^{-1}f_n \to 0$ a.e..

证明　若 X 是超自反的, $M = \sup_{n\geqslant 1} E\|\mathrm{d}f_n\|^2 < \infty$. 由重赋范定理, $\exists\, p, 1 < p \leqslant 2$ 使得 X 是 p 光滑的. 由于 $E\|\mathrm{d}f_n\|^p \leqslant (E\|\mathrm{d}f_n\|^2)^{p/2}$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} E\|\mathrm{d}f_n\|^p \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\right) M^{p/2} < \infty.$$

由定理 3 (i) 知 $n^{-1}f_n \to 0$ a.e..

反过来的证明依赖于下面基本事实, 即若 X 不是超自反的, 必可在 $L_\infty(P,X)$ 中构造鞅 $f = (f_n)$ 使得 $\sup_{n\geqslant 1} E\|\mathrm{d}f_n\|_\infty \leqslant 1$, 但 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \|f_n\|/n > 0$, 这与所给条件矛盾. 这一基本事实的证明也留在 5.4 节定理 6 进行.

定理 4 (Woyczynski)　设 X 是 p 可光滑的, $q \geqslant 1$, $f = (f_n)$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-pq-1+q} E\|\mathrm{d}f_n\|^{pq} < \infty$, 则 $n^{-1}f_n \to 0$ a.e..

证明　若 $q = 1$, 则变为定理 3 的情况. 现设 $q > 1$, 由 Hajek-Renyi-Chow 不等式 (见 4.3 节), $\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\varepsilon^{pq} P(\sup_{j\geqslant n} \|f_j/j\| > \varepsilon) &= \varepsilon^{qp} \lim_{m\to\infty} P(\sup_{n\leqslant j\leqslant m} \|f_j/j\|^{qp} > \varepsilon^{qp}) \\ &= n^{-qp} E\|f_n\|^{qp} + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{-qp} E(\|f_j\|^{qp} - \|f_{j-1}\|^{qp}). \quad (3.11)\end{aligned}$$

再由 Pisier 不等式和 Hölder 不等式

$$E\|f_j\|^{qp} \leqslant cE\left(\sum_{i=1}^{j} E\|\mathrm{d}f_j\|^p\right)^q \leqslant cj^{q-1}\left(\sum_{i=1}^{j} E\|\mathrm{d}f_i\|^{qp}\right).$$

由定理条件和 Kronecker 引理 $j^{-qp}E\|f_j\|^{qp} \to 0 (j \to \infty)$. 另外由上面不等式, (3.11)

右端的级数也是收敛的, 因为

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}((j-1)^{-qp}+j^{-qp})E\|f_j\|^{qp}\\
&\leqslant c\sum_{j=1}^{n}((j-1)^{-qp}+j^{-qp})j^{q-1}\sum_{i=1}^{j}E\|\mathrm{d}f_i\|^{qp}\\
&\leqslant c\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{E\|\mathrm{d}f_j\|^{qp}}{j^{qp+1-q}}+\frac{1}{n^{qp+1-q}}\sum_{i=1}^{j}E\|\mathrm{d}f_i\|^{qp}\right),
\end{aligned}$$

从而 $\forall\varepsilon>0, P(\sup\limits_{j\geqslant n}\|f_j/j\|>\varepsilon)\to 0$.

引理 设 $\{y_n\}$ 是实值适应序列, $\{y_n\}\succ y_0$, $0<p<\infty$ 并且

$$y_n'=y_n\chi_{\{|y_n|\leqslant n^{1/p}\}},\quad y_n''=y_n\chi_{\{|y_n|>n^{1/p}\}}.$$

则 $\forall\ r>0$, $\exists\ c=c_{rp}>0$ 使得:

$$\text{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty}n^{-r/p}E|y_n'|^r\leqslant cEy_0^p,\quad p<r;\tag{3.12}$$

$$\text{(ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}n^{-r/p}E|y_n''|^r\leqslant\begin{cases}cEy_0^p, & p>r,\\ c(Ey_0^p+Ey_0^p\log^+y_0), & p=r.\end{cases}\tag{3.13}$$

证明 1° 若 $p<r$, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}n^{-r/p}E|y_n'|^r&=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-r/p}\int_0^{n^{1/p}}P(|y_n|>\lambda)\mathrm{d}\lambda^r\\
&\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}n^{-r/p}\int_0^{n^{1/p}}P(y_0>\lambda)\mathrm{d}\lambda^r\\
&=c\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1P(y_0>n^{1/p}\lambda)\mathrm{d}\lambda^r\\
&=c\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}P(y_0^p\lambda^{-p}>n)\mathrm{d}\lambda^r\\
&\leqslant c\int_0^1Ey_0^p\lambda^{-p}\mathrm{d}\lambda^r=\frac{cr}{r-p}Ey_0^p.
\end{aligned}$$

2° 若 $p>r$, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}n^{-r/p}E|y_n''|^r&=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-r/p}\int_{n^{1/p}}^{\infty}P(|y_n|>\lambda)\mathrm{d}\lambda^r\\
&\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}P(y_0>n^{1/p}\lambda)\mathrm{d}\lambda^r
\end{aligned}$$

$$= c\int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty P(y_0^p \lambda^{-p} > n)\mathrm{d}\lambda^r$$

$$\leqslant c\int_1^\infty E y_0^p \lambda^{-p}\mathrm{d}\lambda^r = \frac{cr}{p-r} E y_0^p.$$

3° 若 $p = r$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty n^{-1} E\left|y_n''\right|^r &= \sum_{n=1}^\infty n^{-1}\int_{n^{\frac{1}{r}}}^\infty P(|y_n| > \lambda)\mathrm{d}\lambda^r \\ &\leqslant c\sum_{n=1}^\infty n^{-1}\int_n^\infty P(y_0 > \lambda^{1/r})\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant c\sum_{n=1}^\infty n^{-1}\sum_{k=n}^\infty P(y_0^r > k) \\ &\leqslant c\sum_{k=1}^\infty P(y_0^r > k)\ (1+\log k) \\ &\leqslant cEy_0^r + c\sum_{k=1}^\infty P(y_0^r > k)\log k \\ &\leqslant c'(Ey_0^r + Ey_0^r \log^+ y_0).\end{aligned}$$

定理 5 (Marcinkiewicz-Zygmund 型大数定律) 设 $(\mathrm{d}f_n) \succ y_0$, 则

(i) 若 $y_0 \in L\log^+ L, X$ 是超自反的, 则 $n^{-1}f_n \to 0$ a.e.;

(ii) 若 $y_0 \in L^p(1 < p < 2)$, $r > p$, X r 可光滑, 则 $n^{-\frac{1}{p}} f_n \to 0$ a.e..

证明 记 $y_n' = \mathrm{d}f_n \chi_{\{\|\mathrm{d}f_n\| \leqslant n^{1/p}\}}, y_n'' = \mathrm{d}f_n \chi_{\{\|\mathrm{d}f_n\| > n^{1/p}\}}$,

$$\Delta_n' = y_n' - E(y_n' | B_{n-1}), \quad \Delta_n'' = y_n'' - E(y_n'' | B_{n-1}),$$

$(\Delta_n'), (\Delta_n'')$ 是鞅差序列并且 $\mathrm{d}f_n = (\Delta_n') + (\Delta_n'')$.

为证 (i), 设 $p = 1, X$ 是超自反的, 由重赋范定理, $\exists\, r > 1$, 使得 X 是 r 光滑的, 于是

$$\begin{aligned}E\left\|\sum_{k=1}^n \frac{\mathrm{d}f_k}{k}\right\| &\leqslant \left(E\left\|\sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k'}{k}\right\|^r\right)^{1/r} + \sum_{k=1}^n \frac{E\|\Delta_k''\|}{k} \\ &\leqslant c\left(\sum_{k=1}^n \frac{E\|\Delta_k'\|^r}{k^r}\right)^{1/r} + \sum_{k=1}^n \frac{E\|\Delta_k''\|}{k} \\ &\leqslant c\left(\sum_{k=1}^n \frac{E\|y_k'\|^r}{k^r}\right)^{1/r} + \sum_{k=1}^n \frac{E\|y_k''\|}{k}.\end{aligned}$$

由引理中 (3.12) 式, 最后式子前一部分收敛. 由 (3.13) 式第二部分收敛. 于是 $\left\{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}f_k/k, n \geqslant 1\right\}$ 是 $L_1(P,X)$ 有界的, 因此鞅收敛, 由 Kronecker 引理 $f_n/n \to 0$ a.e..

对于 (ii), 由于

$$E\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}f_k}{k^{1/p}}\right\| \leqslant c\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{E\|y_k'\|^r}{k^{r/p}}\right)^{1/r} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{E\|y_k''\|}{k^{1/p}},$$

第一部分由 (3.12), 第二部分由 (3.13) 的第一个不等式得出有限值, 再用 Kronecker 引理得出 $\frac{f_n}{n^{1/p}} \to 0$ a.e.. 证毕.

5.4 有限树与 J 凸性

本节叙述超自反空间的有限树性质、J 凸性质、基底不等式及某些超性质. 在此过程中, 本章前几节中用到而未加证明的几个基本事实将得到证明.

定义 1 称空间 X 具有有限树性质, 若存在 $\delta(0<\delta\leqslant 2)$ 使得对于任何 $n\geqslant 1, X$ 的单位球中可以找到 2^n 个元素满足

$$\|x_{+1}-x_{-1}\|\geqslant\delta,$$

$$\|x_{+1,+1}-x_{+1,-1}\|\geqslant\delta,\quad \frac{x_{+1,+1}-x_{+1,-1}}{2}=x_{+1},$$

$$\|x_{-1,+1}-x_{-1,-1}\|\geqslant\delta,\quad \frac{x_{-1,+1}+x_{-1,-1}}{2}=x_{-1},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\|x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},+1}-x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},-1}\|\geqslant\delta,\quad \frac{x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},+1}+x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},-1}}{2}=x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}},$$

其中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 取 ±1 值. 称这 2^n 个元素为一个 (n,δ) 枝. 为简便起见, 记 $x_0=(x_{+1}+x_{-1})/2$. 简单地说, X 具有有限树性质当且仅当对于每个自然数 n, X 的单位球中可以找到一个 (n,δ) 枝.

例 1 空间 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus l_{2^n}^1\right)_2$, 这里 l_k^1 是赋予 l^1 范数的 k 维空间, 取 $\delta=2$, 则标准基 $e_1,e_2,\cdots,e_{2^n}$ 满足

$$\|e_1-e_2\|_1=\|e_2-e_3\|_1=\cdots=\|e_{2^n-1}-e_{2^n}\|_1=2,$$

$$\left\|\frac{e_1+e_2}{2}-\frac{e_3+e_4}{2}\right\|_1=\cdots=\left\|\frac{e_{2^n-3}+e_{2^n-2}}{2}-\frac{e_{2^n-1}+e_{2^n}}{2}\right\|_1=2.$$

适当安排下标, 可知 l_k^1 中包含 $(n,2)$ 枝.

现在 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\oplus l_{2^n}^1\right)_2$ 是 $l_{2^n}^1(n=1,2,\cdots)$ 的乘积空间, 赋予 l^2 范数. 显然, 对于任何 n, 此空间单位球中含有 $(n,2)$ 枝. 但是 $(n,2)$ 枝存在于子空间 $l_{2^n}^1$ 中, 而 $(n+1,2)$ 枝存在于 $l_{2^{n+1}}^1$ 中, 两者没有公共元素. 此例还说明, $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\oplus l_{2^n}^1\right)_2$ 具有有限树性质. 马上我们将会看到这种空间不是超自反的, 但应注意它却是自反的, 这可以用标准方法去进行, 只须注意每个 $l_{2^n}^1$ 是有限维空间, 上面的任一范数均等价. 由此知道自反性不等价于超自反性.

定义 2 Banach 空间 X 称为是 J 凸的, 若存在 $\delta>0$ 和自然数 $K\geqslant 2$ 使得对于 X 的单位球中的任何元素 $x_1,\cdots,x_K$, 都有 $\pm$ 号的循序选择 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_K$ 使之满足

$$\left\|\sum_{i=1}^{K}\varepsilon_i x_i\right\|\leqslant(1-\delta)K. \tag{4.1}$$

所谓循序选择, 即正号集中于前段, 负号集中于后段, 没有交互出现的情况.

可以直接验证, J 凸性是超性质. 为了刻画超自反空间, 我们需要下面引理, 这里只简单叙述其证明.

引理 1 (James) 设 X 是 Banach 空间, X^* 是 X 的共轭, $0<\theta<1$, 则下述条件等价:

(i) X 不是自反空间;

(ii) 存在 $(x_n)\subset X,(x_n^*)\subset X^*,\|x_n\|=\|x_n^*\|=1$ 使得

$$x_n^*(x_k)=\begin{cases}\theta, & n\leqslant k,\\ 0, & n>k;\end{cases} \tag{4.2}$$

(iii) 存在 $(x_n)\subset X,\|x_n\|=1$ 使得对于任何 $K,k(1\leqslant k\leqslant K)$,

$$d(\mathrm{co}(x_1,\cdots,x_k),\mathrm{co}(x_{k+1},\cdots,x_K))\geqslant\theta, \tag{4.3}$$

这里 co 代表后面括号中元素的凸组合.

将定理中的某个 θ 换为任意 $\theta(0<\theta<1)$, 结论仍成立.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 设 X 不自反, $J:X\to X^{**}$ 是自然嵌入. 因 $J(X)$ 在 X^{**} 中闭但 $J(X)\neq X^{**}$, 故存在 $f\in X^{***}$ 使得 $\|f\|=1,\quad f(x)=0,\forall\, x\in X$. 对于 $0<\theta<1$, 取 $x^{**}\in X^{**}$ 使得 $\|x^{**}\|<1,\quad f(x^{**})>\theta$, 此时

$$\begin{aligned}d(x^{**},J(X))&=\inf_{x\in X}\|x^{**}-J(x)\|\\&\geqslant\inf_{x\in X}f(x^{**}-J(x))=f(x^{**})>\theta,\end{aligned}$$

$$\|x^{**}\| \geqslant f(x^{**}) > \theta.$$

于是存在 $x_1^* \in X^*, \|x_1^*\| = 1, x^{**}(x_1^*) = \theta$. 由 $\|x_1^*\| > \theta$ 知道 $\exists x_1 \in X, \|x_1\| = 1, x_1^* x_1 = \theta$. 这里用到 Hahn-Banach 延拓定理.

用归纳法, 假设 $x_k, x_k^*(k = 1, \cdots, n-1)$ 已取定, 其中 $\|x_k\| = \|x_k^*\| = 1$, $x^{**}(x_k^*) = \theta$. 再取 $x_n^*, \|x_n^*\| = 1, x^{**}(x_n^*) = \theta, x_n^*(x_k) = 0(k < n)$. 由 Helly 选择原理, $\forall\, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$,

$$\theta \leqslant \frac{\theta}{\operatorname{dist}(x^{**}, J(X))} \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k J(x_k) + x^{**} \right\|_{X^{**}},$$

由此

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \theta \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} x^{**}(x_k^*) \right| \leqslant \|x^{**}\| \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^* \right\|.$$

$\|x^{**}\| < 1$, 故可取 $x_n, \|x_n\| = 1, x_k^*(x_n) = \theta, k \leqslant n$. 从而得到所要的序列.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 对于任何 $k, K(1 \leqslant k \leqslant K)$, 设 $(x_k), (x_k^*)$ 是 (ii) 中确定的序列, 则 $\forall \alpha_i > 0, \beta_j > 0, \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \sum\limits_{j=1}^{K-k} \beta_j = 1$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i - \sum_{j=1}^{K-k} \beta_j x_{k+j} \right\| \geqslant x_{k+1}^* \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i - \sum_{j=1}^{K-k} \beta_j x_{k+j} \right) = \theta.$$

故得之.

(iii) $\Rightarrow$ (i). 反之若 E 自反, 考虑 (iii) 中确定的序列 $\{x_k\}$, 令 $A_k = \{x_i : i \geqslant k\}$, $B_k = \operatorname{co} A_k$, 则 $\bar{B}_k$ 是 w 拓扑下的递缩紧序列, 具有有限交性质, 从而 $\bigcap\limits_{k \geqslant 1} \bar{B}_k \neq \varnothing$. 取 y_0 是其中元, 由于 $y_0 \in \bar{B}_1$, 故 $\exists$ 自然数 l 和实数 $\alpha_i > 0, \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i = 1$ 使得

$$\left\| y_0 - \sum_{i=1}^{l} \alpha_i x_i \right\| \leqslant \theta/3.$$

又 $y_0 \in B_{l+1}$, 故存在自然数 $L > 0$ 和实数 $\beta_j > 0, \sum\limits_{j=1}^{L} \beta_j = 1$ 使得

$$\left\| y_0 - \sum_{j=1}^{L} \beta_j x_{l+j} \right\| \leqslant \theta/3,$$

从而

$$\left\| \sum_{i=1}^{l} \alpha_i x_i - \sum_{j=1}^{L} \beta_j x_{l+j} \right\| \leqslant 2\theta/3.$$

这与 $d(\mathrm{co}(x_1,\cdots,x_l),\mathrm{co}(x_{l+1},\cdots,x_{l+L}))>0$ 矛盾, 定理得证.

引理 2 设 X 是 Banach 空间 ,$0<\theta<1$, 以下条件等价:

(i) X 不是超自反的;

(ii) $\forall n\geqslant 1$, X 和 X^* 的单位球中分别存在 $x_1^{(n)},\cdots,x_n^{(n)},x_1^{(n)*},\cdots,x_n^{(n)*}$ 使得

$$x_m^{(n)*}x_k^{(n)}=\begin{cases}\theta, & m\leqslant k,\\ 0, & m>k;\end{cases} \tag{4.4}$$

(iii) $\forall 1\leqslant k\leqslant n, X$ 的单位球中存在序列 $x_1^{(n)},\cdots,x_n^{(n)}$ 使得

$$d(\mathrm{co}(x_1^{(n)},\cdots,x_k^{(n)}),\mathrm{co}(x_{k+1}^{(n)},\cdots,x_n^{(n)}))>\theta. \tag{4.5}$$

同样地, 其中的某个 θ 换为任何 θ 结论仍成立.

证明 (ii) $\Rightarrow$ (iii). 如同引理 1 相应部分的证明.

(iii) $\Rightarrow$ (i). 若 X 是超自反的, Y 在 X 中有限可表现, Y 是自反的. 由上述引理存在 $0<\theta<1$, 对于任何序列 $y_k\in Y,\|y_k\|=1$, 以 Y 中范数

$$d(\mathrm{co}(y_1,\cdots,y_k),\mathrm{co}(y_{k+1},\cdots,y_n))<\theta,\quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

令 $Y_n=\mathrm{span}\{y_1,\cdots,y_n\}$, 则 $\exists\, X_n\subset X,\dim X_n=\dim Y_n$ 和同构映射 $T:Y_n\to X_n$ 使得 $\|T\|\leqslant 1,\left\|T^{-1}\right\|\leqslant 2$. 记 $x_k=Ty_k(k=1,\cdots,n)$, 则以 X 中范数

$$d(\mathrm{co}(x_1,\cdots,x_k),\mathrm{co}(x_{k+1},\cdots,x_n))<\theta.$$

与 (iii) 矛盾.

(i) $\Rightarrow$ (ii). 若 X 不是超自反的, 则存在 Y, 在 X 中有限可表现但不是自反的. 由引理 1 存在 $(y_k)\subset Y,(y_k^*)\subset Y^*$, $\|y_k\|\leqslant 1,\|y_k^*\|\leqslant 1$ 使得

$$y_m^*y_k=\begin{cases}\theta(1+\varepsilon), & m\leqslant k;\\ 0, & m>k.\end{cases}$$

这里 $\varepsilon>0,\theta(1+\varepsilon)<1$. $Y_n=\mathrm{span}\{y_1,\cdots,y_n\}$. 故存在 $X_n\subset X$, $\dim X_n=\dim Y_n$ 和同构映射 $T:Y_n\to X_n$ 使得 $\|T\|\leqslant 1+\varepsilon,\left\|T^{-1}\right\|=1$. 令 $x_k^{(n)}=(1+\varepsilon)Ty_k,x_k^{(n)*}=x_k^*\circ T^{-1}$, 则 $\left\|x_k^{(n)}\right\|\leqslant 1$, $\left\|x_k^{(n)*}\right\|\leqslant 1$ 并且

$$x_m^{(n)*}x_k^{(n)}=\begin{cases}\theta, & m\leqslant k;\\ 0, & m>k.\end{cases}$$

此即 (ii).

推论 1 X 超自反当且仅当 X^* 超自反.

证明 若 X 不是超自反的, 由引理 2 对于任何 $0<\theta<1$ 和 $n\geqslant 1$, 存在 $x_k^{(n)}\in X$ 和 $x_k^{(n)*}\in X^*(1\leqslant k\leqslant n)$ 使得 $\left\|x_k^{(n)}\right\|\leqslant 1$, $\left\|x_k^{(n)*}\right\|\leqslant 1$ 并且

$$x_m^{(n)}x_k^{(n)} = \begin{cases} \theta, & m \leqslant k \leqslant n; \\ 0, & k < m \leqslant n. \end{cases}$$

将 $x_k^{(n)}$ 视为 X^{**} 中的点并且重新编号

$$\bar{x}_j^{(n)} = x_{n-j+1}^{(n)}, \quad j = 1, \cdots, n,$$
$$\bar{x}_m^{(n)*} = x_{n-m+1}^{(n)*}, \quad m = 1, \cdots, n.$$

正好得到 X^* 不超自反的条件.

若 X^* 不是超自反的, 如同上面一样可取 $\bar{x}_j^{(n)}$ 和 $\bar{x}_j^{(n)*}(j = 1, \cdots, n)$, 它们分别是 X^{**} 和 X^* 的单位球中的元, 由于 X 的单位球在 X^{**} 的单位球中 w^* 稠密, 故可在前者中找到 $x_1^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ 使得

$$\left|\bar{x}_j^{(n)*}x_i^{(n)}\right| \begin{cases} > \theta - \varepsilon, & i \geqslant j; \\ \leqslant \varepsilon, & i < j. \end{cases}$$

$2\varepsilon < \theta$. 于是对每个 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 和正数 $\alpha_i, \sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i = \sum\limits_{i=k+1}^{n}\alpha_i = 1$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i^{(n)} - \sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i x_i^{(n)}\right\| \geqslant \left|x_k^{(n)*}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i^{(n)} - \sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i x_i^{(n)}\right)\right| \geqslant \theta - 2\varepsilon > 0.$$

此即 $d(\mathrm{co}(x_1^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}), \mathrm{co}(x_{k+1}^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)})) > \theta - 2\varepsilon, X$ 不超自反.

引理 3 若 X 不是自反的, 则 $\forall\, \delta(0 < \delta < 1), K \geqslant 1, X$ 的单位球中存在 $x_1, \cdots, x_K$, 使得 $\forall\, k(1 \leqslant k \leqslant K)$,

$$\|x_1 + \cdots + x_k - (x_{k+1} + \cdots + x_K)\| \geqslant K(1 - \delta).$$

此引理的一个基本的证明见文献 [12].

定理 1 (James) 设 X 是 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) X 是超自反的;

(ii) X 不具有有限树性质;

(iii) X 是 J 凸的.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 借助于超幂空间的证明仍见文献 [12], 这里不作详述.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 若 X 不是超自反的, 像引理 2 中 (iii) $\Rightarrow$ (i) 的证明那样, 取 2^{n+1} 作为那里的 n 可以得到

$$d(\mathrm{co}(x_1, \cdots, x_k), \mathrm{co}(x_{k+1}, \cdots, x_{2^{n+1}})) > \theta.$$

这意味着

$$\left\|\frac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k} - \frac{x_{2^k+1} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right\| > \theta.$$

这说明 X 具有有限树性质, 矛盾.

(i) ⇒ (iii). 若 X 不是 J 凸的, 即 $\forall\delta>0$ 和 $k\geqslant 2$, $\exists x_1,\cdots,x_k,\|x_k\|\leqslant 1$ 使得对任何循序符号选择 ε_k

$$\left\|\sum_{k=1}^{K}\varepsilon_k x_k\right\|\geqslant(1-\delta)K,\quad \delta<\frac{1}{K}.$$

对于每个 $k(1\leqslant k\leqslant K)$, 若 $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i x_i$, $\sum\limits_{i=k+1}^{K}\alpha_i x_i$ 是两个凸组合, 则

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i-\sum_{i=k+1}^{K}\alpha_i x_i\right\|\\
=&\left\|\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=k+1}^{K}x_i-\left(\sum_{i=1}^{k}(1-\alpha_i)x_i-\sum_{i=k+1}^{K}(1-\alpha_i)x_i\right)\right\|\\
\geqslant&\left\|\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=k+1}^{K}x_i\right\|-\left(\sum_{i=1}^{k}(1-\alpha_i)+\sum_{i=k+1}^{K}(1-\alpha_i)\right)\\
\geqslant&(1-\delta)K-(k-1+K-k-1)=2-\delta K>1.
\end{aligned}$$

此即

$$d(\mathrm{co}(x_1,\cdots,x_k),\mathrm{co}(x_{k+1},\cdots,x_K))>1.$$

由引理 2 知道 X 不是超自反的.

(iii) ⇒ (i). 因为 J 凸性是超性质, 故只须证明 J 凸性蕴含自反性, 实际上这正是上面的引理.

定理 2 (Pisier)　设 $1<p<\infty$, 则下面条件等价:

(i) X 是 J 凸的;

(ii) 存在 $\delta>0$ 和自然数 $n\geqslant 2$ 使得对于每一组 $x_1,\cdots,x_n\in X$ 相应地可找到循序符号选择 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 满足

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right\|\leqslant(1-\delta)n^{1/q}\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{1/p}\tag{4.6}$$

或者

$$\sum_{(\varepsilon_i)\in E_n}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right\|^p\leqslant(1-\delta)n^p\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p,\tag{4.7}$$

其中 E_n 表示 n 个符号的循序选择全体.

证明 若 $\varepsilon_i^0(1 \leqslant i \leqslant n)$ 使 (4.6) 成立, 则

$$\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^0 x_i\right\|^p \leqslant (1-\delta)^p n^{\frac{p}{q}} \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p.$$

对于其他的循序符号选择应用 Hölder 不等式得到

$$\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right\|^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|\right)^p \leqslant n^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|\right)^p.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{(\varepsilon_i)\in E_n} \left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right\|^p &\leqslant ((n-1)+(1-\delta)^p) n^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right) \\ &= \frac{n-1+(1-\delta)^p}{n} n^p \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p.\end{aligned}$$

取 $\delta = [1-(1-\delta)^p]/n$ 即得到 (4.7).

反过来, 若 (4.7) 成立, 则

$$\frac{1}{n} \sum_{(\varepsilon_i)\in E_n} \left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right\|^p \leqslant (1-\delta) n^{\frac{p}{q}} \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p,$$

至少有一个循序符号选择, 记为 ε_i^0 使得

$$\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^0 x_i\right\|^p \leqslant (1-\delta) n^{\frac{p}{q}} \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p.$$

取 $(1-\delta)^{\frac{1}{p}} = 1-\delta'$, 便得到 (4.6).

(ii) $\Rightarrow$ (i). 由 (4.6) 取 $\|x_i\| \leqslant 1(1 \leqslant i \leqslant n)$, 则得到 J 凸性的定义式.

(i) $\Rightarrow$ (ii). 设 X 是 J 凸的, 这时有 $\delta > 0$ 和 $k \geqslant 2$ 使得每组 $x_1, \cdots, x_n, \|x_i\| \leqslant 1$ 相应地存在循序符号选择使得

$$\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right\| \leqslant (1-\delta) n,$$

若 $\|x_1\| = \|x_2\| = \cdots = \|x_n\| = 1$, 则

$$\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right\| \leqslant (1-\delta) \sum_{i=1}^n \|x_i\|. \tag{4.8}$$

若 $x_i \neq 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$, 记 $x_i = x_i' + x_i''$, 其中 $x_i' = (1 - \lambda_i)x_i$, $x_i'' = \lambda_i x_i$ 并且 $\lambda_i = \|x_i\|^{-1}\min\{\|x_j\| : 1 \leqslant j \leqslant n\}$. 于是 $\|x_i''\| = \min\{\|x_j\| : 1 \leqslant j \leqslant n\}$. 由 (4.8) 的齐性知道存在循序符号选择使得

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i''\right\| \leqslant (1-\delta)\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|.$$

对于这一符号选择,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\| &\leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i'\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i''\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|x_i'\| + (1-\delta)\sum_{i=1}^{n}\|x_i''\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}(1-\lambda_i)\|x_i\| + (1-\delta)\lambda_i\|x_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}(1-\delta\lambda_i)\|x_i\| \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(1-\delta\lambda_i)^q\right)^{1/q}\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{1/p},\end{aligned}$$

注意至少有一个 $\lambda_i = 1$, 其余 $\lambda_i \geqslant 0$, 所以

$$\sum_{i=1}^{n}(1-\delta\lambda_i)^q \leqslant (1-\delta)^q + n - 1 = n\left(1 - \frac{1-(1-\delta)^q}{n}\right).$$

记 $\delta' = (1-(1-\delta)^q)/n$, $\delta' > 0$, 即得到 (4.6).

推论 2　超自反空间的子空间与商空间是超自反的.

可直接由定理 2(4.7) 检验之.

推论 3　设 X 是 Banach 空间, $1 < p < \infty, \mu(\Omega) > 0$, 则 X 是超自反的当且仅当 $L_p(\mu, X)$ 是超自反的.

证明　只须证明 X 是 J 凸的当且仅当 $L_p(\mu, X)$ 是 J 凸的, "当" 的部分是显然的, 因为 $L_p(\mu, X)$ 中存在同构于 X 的子空间.

"仅当" 部分可由 (4.7) 式证之. 实际上, 若 X J 凸, $f_1, \cdots, f_n \in L_p(\mu, X)$, 则对于几乎所有 ω,

$$\sum_{(\varepsilon_i)\in E_n}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i(\omega)\right\|^p \leqslant (1-\delta)n^p\sum_{i=1}^{n}\|f(\omega)\|^p.$$

积分得到

$$\sum_{(\varepsilon_i)\in E_n}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i\right\|_{L_p(\mu,X)}^p \leqslant (1-\delta)n^p\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{L_p(\mu,\Omega)}^p.$$

即得出 $L_p(\mu, X)$ J 凸.

现在让我们转到具有 Schauder 基的超自反空间. 注意所谓基常数是使下面不等式对于任何标量序列 $\{a_i\}$ 成立的最小常数 β,

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right\| \leqslant \beta\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|, \quad \forall k \leqslant n. \tag{4.9}$$

引理 4 若存在 $\alpha,\beta>0$ 使得 $\forall\, n\geqslant 1, \exists\, y_1,\cdots,y_n\in X$, 对于所有 $k\leqslant n$ 和标量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right\| \geqslant \alpha\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|, \quad \left\|\sum_{i=1}^{k}y_i\right\|<\beta, \tag{4.10}$$

则 X 不是超自反的.

证明 令 $z_k=\beta^{-1}\sum_{i=1}^{k}y_i \ (k=1,\cdots,n)$, 则 $\|z_k\|\leqslant 1$ 并且

$$\operatorname{span}\{z_k:1\leqslant k\leqslant n\}=\operatorname{span}\{y_k:1\leqslant k\leqslant n\}.$$

由 Hahn-Banach 定理, 存在线性泛函 $f_j(j=1,\cdots,n)$ 使得

$$f_j(x_i)=\begin{cases}\alpha, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

此时 $\forall\,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 由引理中第一个不等式

$$\left|f_j\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right)\right|=\alpha\,|\alpha_j|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right\|.$$

于是 $\|f_i\|\leqslant 1\ (i=1,\cdots,n)$. 将 f_j 保范延拓到整个空间 X 上, 仍记为 f_j, 则

$$f_j(z_i)=\begin{cases}\alpha\beta^{-1}, & j\leqslant i;\\ 0, & j>i.\end{cases}$$

由引理 2 知道 X 不是超自反空间.

定理 3 设 X 是超自反空间, $0<2\alpha<\beta\leqslant 1$, 则存在 $r, 1<r<\infty$ 使得若 $\{e_i\}$ 是 X 中基常数 $>\beta$ 的规范基序列, 则只要 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ 收敛, 就有

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^r\right)^{1/r} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i\right\|. \tag{4.11}$$

证明 我们证明, 若 (4.11) 不成立, 则可以构造出一个如同 (4.10) 的序列. 设 n 是自然数, 取 $\lambda>0$ 使得 $2\alpha<\lambda^2\beta, \lambda<1$, 再取 $r>1$ 使

$$n^{1/r}<\lambda^{-1}(1-\lambda)^{1/r}. \tag{4.12}$$

由此若 $\beta_i \geqslant 0\ (i \geqslant 1)$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right)^{1/r} \leqslant n^{1/r}(\sup\beta_i)^{1/r} < \lambda^{-1}(\sup\beta_i)^{1/r}. \tag{4.13}$$

如果 (4.11) 不成立, 则存在基序列 $\{e_i\}$, 基常数 $\geqslant \beta$ 和标量 $\{\alpha_i\}$, 自然数 m 使得

$$\inf\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r\right)^{-1/r}\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i\right\| = M < \alpha,$$

这里下确界是在所有数组 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 上取的. 不妨设 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 是其中之一, $\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i\right\| = 1$ 并且

$$\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r\right)^{-1/r} = \left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r\right)^{-1/r}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\| < M\lambda^{-1}, \tag{4.14}$$

注意对于每个基常数 $\geqslant \beta$ 的基序列都有 $\beta|\alpha_k| \leqslant 2\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i\right\|, (k \leqslant m)$, 于是由 (4.14) 得到

$$|\alpha_k| \leqslant \frac{2}{\beta}\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i\right\| \leqslant \frac{2M}{\beta\lambda}\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r\right)^{1/r}.$$

于是由 $M < \alpha, 2\alpha < \lambda^2\beta$ 和 (4.12),

$$|\alpha_k|^r \leqslant \lambda^r\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r < \frac{1}{n}(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r. \tag{4.15}$$

从而存在 $m_1,\cdots,m_n = m$ 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{m_j}|\alpha_i|^r - \frac{j}{n}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r\right| < \frac{1}{2^n}(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r, \quad j = 1,\cdots,n.$$

记 $m_0 = 0, u_j = \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j}|\alpha_i|^r$, 则 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i = \sum_{j=1}^{n}u_j$, 这意味着

$$\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r < \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j}|\alpha_i|^r < \frac{2-\lambda}{n}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r < \frac{1}{n\lambda}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r,$$

并且

$$\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j}|\alpha_i|^r > \lambda^2\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}|\alpha_i|^r.$$

于是对于每个 j,

$$\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r\right)^{-1/r}\lambda<M\leqslant\left(\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}|\alpha_i|^r\right)^{-1/r}\|u_j\|$$

$$<\left(\sup_k\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m}|\alpha_i|^r\right)^{-1/r}\lambda^{-2/r}\|u_j\|$$

$$<\lambda^{-3}\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r\right)^{-1/r}\|u_j\|,$$

所以 $\|u_j\|\geqslant\lambda^4$. 另一方面, 由于 $\lambda^4>4\alpha^2/\beta^2$, 故 $\forall\ k\leqslant n$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i\right\|\geqslant\frac{\beta}{2}\|\alpha_k u_k\|\geqslant\frac{\beta\lambda^4}{2}|\alpha_k|\geqslant\frac{2\alpha^2}{\beta}|\alpha_k|=\alpha'|\alpha_k|.$$

由于

$$1=\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{n}u_j\right\|\geqslant\beta\left\|\sum_{j=1}^{k}u_j\right\|,$$

故得 $\left\|\sum_{j=1}^{k}u_j\right\|\leqslant\beta^{-1}$, $u_1,\cdots,u_n$ 即为所求.

同样地可以证明下面的定理.

定理 4 设 X 是超自反空间, $0<\beta\leqslant1<\alpha$, 则存在 $s,1<s<\infty$ 使得若 $\{e_i\}$ 是 X 中任一规范基序列, 基常数 $\geqslant\beta$, 只要 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$ 收敛就有

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i\right\|\leqslant\alpha\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^s\right)^{1/s}. \tag{4.16}$$

推论 4 若 X 是超自反空间, 则存在常数 $c>0$ 和 $p(1<p<\infty)$ 使得 X 中任何单调基序列$\{x_n\}$ 满足

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{1/p}\leqslant c\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|. \tag{4.17}$$

推论 5 若 X 是超自反空间, 则存在常数 $c>0$ 和 $r>1,q<\infty$ 使得 X 中的每个基序列 $\{x_n\}$ 满足

$$c^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^q\right)^{1/q}\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|\leqslant c\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^r\right)^{1/r},\quad\forall n\geqslant1,$$

其中 c 仅与基常数有关.

定理 5　Banach 空间 X 是超自反的当且仅当对于每个 X 值 WP 鞅 $f=(f_n)$, 若 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|\mathrm{d}f_n\|_\infty<\infty$, 则 $n^{-1}f_n\to 0$ a.e..

证明　必要性见 5.3 节定理 3 推论. 为证充分性, 假定 X 不是超自反的, 我们将构造一个 WP 鞅使得 $\sup\limits_n\|\mathrm{d}f_n\|_\infty\leqslant 1$, 但

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|f_n(\omega)\|}{n}>0,\quad \forall\,\omega\in\Omega.$$

实际上当 X 不是超自反空间时, X 具有有限树性质, 从而对于每个 n, 容易由定义构造出 WP 鞅 $f=(f_n)$ 使得

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\|\mathrm{d}f_k\|_\infty\leqslant 1,\quad \|f_n(\omega)\|\geqslant n/2,\quad \forall\omega\in\Omega.$$

现在我们要构造一个新鞅, 记上面相对于 n^n 项的鞅差为 $(\mathrm{d}f_1^{(n)},\cdots,\mathrm{d}f_{n^n}^{(n)}),(f_0^{(n)}=0)$. 定义 $g=(g_n)$, 其中 $\mathrm{d}g_i=\mathrm{d}f_i^{(n)}$, 若 $j=k_n+i,i=1,\cdots,(n+1)^{n+1},k_n=1+2^2+3^3+\cdots+n^n$. 注意对于 g 来说仍有 $\sup\limits_{j\geqslant 1}\|\mathrm{d}g_j\|_\infty\leqslant 1$. 由于 $\|f_{n^n}(\omega)\|/n^n\geqslant 1/2,\forall\omega\in\Omega$, 故

$$\begin{aligned}\|g_{k_n}(\omega)\|=\left\|\sum_{i=1}^{k_n}\mathrm{d}g_i(\omega)\right\|&\geqslant\left\|\sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n}\mathrm{d}g_i(\omega)\right\|-\left\|\sum_{i=1}^{k_{n-1}}\mathrm{d}g_i(\omega)\right\|\\&\geqslant\|f_{n^n}(\omega)\|-\sum_{i=1}^{k_{n-1}}\|\mathrm{d}g_i(\omega)\|\geqslant\frac{1}{2}n^n-k_{n-1}\geqslant\frac{1}{2}n^n-(n-1)^n,\end{aligned}$$

$$\frac{\|g_{k_n}(\omega)\|}{k_n}\geqslant\frac{\|g_{k_n}(\omega)\|}{2n^n}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right),$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|g_n(\omega)\|}{n}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)>0,\quad \forall\omega\in\Omega.$$

超自反空间还具有一系列超性质, 这里我们仅介绍超 RN 性质, 超平稳性和超遍历性.

定义 3　Banach 空间 X 称为具有 Banach-Saks 性质, 若 X 中任一有界序列 (x_n) 存在子序列 (x_{n_i}) 使得其算术平均是收敛的, 即 $\exists\, x\in X$,

$$x=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}(x_{n_1}+\cdots+x_{n_k}).$$

容易知道, Banach-Saks 性质是同构不变的. 已经证明一致凸空间具有 Banach-Saks 性质, 具有 Banach-Saks 性质的空间是自反的. 现在我们有下述定理.

定理 6 设 X 是 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) X 是超自反的;

(ii) X 具有超 Banach-Saks 性质;

(iii) X 具有超 RN 性质.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 将 X 赋予等价范数使之成为一致凸空间, 则每个在其中有限可表现的 Banach 空间也是一致凸的, 从而都具有 Banach-Saks 性质. 由于 Banach-Saks 性质是同构不变的, 因此 X 具有超 Banach-Saks 性质.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 因为 Banach-Saks 性质蕴含 RN 性质.

(iii) $\Rightarrow$ (i). 一个利用有限树性质的证明也可见文献 [12].

下面概念和结论可参见文献 [36]. 这里不加证明.

定义 4 (i) Banach 空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为是平稳的, 若 $\exists\, x_0 \in X$, 使得对于任何子列 $\{x_{n_k}\}$ 一致地有

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{1}{k}(x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})-x_0\right\|=0.$$

X 称为具有平稳性质, 若 X 中任何有界序列存在子列是平稳的.

(ii) Banach 空间 X 称为具有遍历性质, 若对于 X 上的任一等距算子 U 和 $x\in X$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(x+Ux+\cdots+U^{n-1}x)$ 存在.

显然平稳性蕴含 Banach-Saks 性质. Erdos 和 Magidor 证明了实际上二者是等价的. 此外自反性蕴含着遍历性, Brunel 与 Sucheston[36] 还证明了下面结果.

定理 7 对于 Banach 空间 X, 下列条件等价:

(i) X 是超自反的;

(ii) X 是超平稳的;

(iii) X 是超遍历的.

第 5 章评注:

本章内容应该看成向鞅空间理论的一个过渡, 不过除了关于凸性模、光滑模、J 凸性、超自反性、单调基这些与 Banach 空间几何的或结构的属性有关的内容之外, 我们也展示了如 Enflo-Pisier 重赋范定理, Assouad 定理以及 p 光滑性的鞅刻画这些重要的结果. 它们在别的场合也是很有意义的.

5.1 节关于凸性模与光滑模的一系列估计见文献 [145]. 包括定理 1, 3, 例 3. 定理 7 的证明包含在文献 [115]、[116] 中.

5.2 节 Assouad 的简捷的定理 (见文献 [10]) 是个关键, 几乎在同时文献 [176] 用它得到了刻画 p- 光滑性与 q- 凸性的鞅不等式 (定理 2, 3), 进而给出了 Enflo 超自反空间具有等价

一致凸范数的鞅证明 (定理 5). 比较原证明, 鞅方法能够给出更优良的估计.

5.3 节定理 2, 3 在文献 [115] 和 [116] 中见到. 定理 4, 5 等在文献 [208]~[212] 中见到.

5.4 节开头几个引论和定理就是 James 关于自反空间和超自反空间的结果. 本节的定理大都可以在文献 [12] 中找到. 另见文献 [35].

第 6 章　B 值鞅空间理论

B 值鞅不等式与鞅空间理论是泛函分析与经典鞅论的有机结合. 事实证明, 经典鞅论中的不等式和算子的有界性在一般 Banach 空间情况不再成立, 它们仅在值空间具有一定的几何条件时才能成立, 因此寻找使它们成立的几何条件至为关键, 本章将以这一观点探讨鞅论中的各种问题. 我们将介绍 Burkholder-Gundy和 Davis 型不等式, 讨论某些鞅空间的相互嵌入关系和鞅空间上若干算子的有界性, 原子分解和小指标鞅空间, 鞅空间的共轭. 接着还将应用鞅的上下函数与微分从属给出 Hilbert 空间的刻画, 建立 B 值鞅的加权不等式和内插空间. 最后将叙述调和分析中著名的 Littlewood-Paley 定理的向量值类比. 所有这些都与值空间的凸性、光滑性紧密联系在一起.

6.1　预备知识　若干引理

本章叙述的许多不等式都与 Φ 函数有关, 因此我们将先熟悉 Φ 函数的一些基本性质. 它们的详细证明可参见文献 [161]、[213]、[225] 等. 然后再证明几个关键的引理.

所谓 Φ 函数是指 $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty), \Phi(0)=0$ 的一类函数. 这里用到的 Φ 函数有以下三种类型:

(1) 一般 Φ 函数, 即 Φ 是连续增加函数. 它们可以用以建立 Lebesgue- Stieltjes 积分.

(2) 凸 Φ 函数, 即 Φ 是增加凸函数. 规范化的导函数 $\Phi'(t)=\varphi(t)$ 是左连续的, 并且 $\varphi(0)=\varphi(0+)$. 今后我们都将作此规范性假定.

称 Φ 为 Young 函数, 若还有 $t^{-1}\Phi(t)\to\infty(t\to\infty)$. Φ 称为限制增长的, 若存在 $c>0$ 使得

$$\Phi(2t)\leqslant c\Phi(t),\quad \forall\, t>0.$$

(3) 严格凸函数. Φ 满足 $p_\Phi>1$.

对于凸 Φ 函数, 特别是 Young 函数, 考虑函数 $\Psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$,

$$\psi(t)=\inf\{s:\varphi(s)\geqslant t\},\quad \Psi(t)=\int_0^t\psi(s)\mathrm{d}s.$$

称 Ψ 是 Φ 的补函数. 令

$$p_{\Phi}=\sup_{t>0}\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)},\quad q_{\Phi}=\inf_{t>0}\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)},\quad q'_{\Phi}=\frac{q_{\Phi}}{q_{\Phi}-1}. \tag{1.1}$$

分别称之为 Φ 的上下指标和共轭指标. 特别应注意的是:

1° Young 不等式成立:

$$uv\leqslant\Phi(u)+\Psi(v),\quad \forall u,v\geqslant 0,$$

等号成立当且仅当 $u=\psi(v)$ 或者 $v=\varphi(u)$.

2° 限制增长指标: 若 $a>1$, 记

$$c=\sup_{t>0}\frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)},\quad c_a=\sup_{t>0}\frac{\Phi(at)}{\Phi(t)},$$

则 $c<\infty\Leftrightarrow c_a<\infty\Leftrightarrow p_{\Phi}<\infty$. 实际上若 $c<\infty$, 则 $p_{\Phi}\leqslant c-1$.

3° 补函数的增长指标: $p_{\Psi}=q'_{\Phi}$. 此外, 补函数 Ψ 是限制增长的当且仅当 $q_{\Phi}>1$, 即 Φ 严格凸.

4° 单调性质:

$\Phi(\lambda t)\leqslant\lambda\Phi(t),\forall\ \lambda\leqslant 1.$

$\lambda\Phi(t)\leqslant\Phi(\lambda t)\leqslant\lambda^{p}\Phi(t),\forall\ \lambda\geqslant 1, p=p_{\Phi}<\infty.$

$p=p_{\Phi}<\infty$时, $t^{-p}\Phi(t)$关于 t 单调下降.

$q=q_{\Phi}<\infty$时, $t^{-q}\Phi(t)$关于 t 单调增加.

5° 对于 Young 函数 Φ, 考虑测度空间 (Ω,Σ,μ) 上定义的 X 值可测函数全体 $L_{\Phi}(\mu,X)=\{f:\|f\|_{\Phi}<\infty\}$, 其中

$$\|f\|_{\Phi}=\inf\{\lambda>0:E\Phi\left(\lambda^{-1}\|f(\omega)\|\right)\leqslant 1\}.$$

当 Φ 是限制增长函数, X 是 Banach 空间时, $L_{\Phi}(\mu,X)$ 也是 Banach 空间, $\|\cdot\|_{\Phi}$ 是其范数 (Luxemburg 范数). $L_{\Phi}(\mu,X)$ 上还可以定义另一范数 (Orlicz 范数)

$$N_{\Phi}(f)=\sup_{E\Psi(\|g(\omega)\|)\leqslant 1}\left|\int_{\Omega}f(\omega)g(\omega)\mathrm{d}\mu\right|,$$

其中 $g(\omega)$ 是取值于 X 的共轭空间 X^* 的可测函数. 两种范数有关系

$$\|f\|_{\Phi}\leqslant N_{\Phi}(f)\leqslant 2\|f\|_{\Phi}.$$

6° 当 $f\in L_{\Phi}(\mu,X)$, $g\in L_{\Psi}(\mu,X^*)$ 时,

$$\left|\int_{\Omega}f(\omega)g(\omega)\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\|f\|_{\Phi}N_{\Psi}(g),$$

特别地

$$\left|\int_{\Omega} f(\omega)g(\omega)\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \max\{E\Psi(\|g\|),1\}N_{\Phi}(f).$$

7° 总有

$$E\Phi(\|f\|_{\Phi}^{-1}\|f(\omega)\|) \leqslant 1, \quad E\Phi(N_{\Phi}(f)^{-1}\|f(\omega)\|) \leqslant 1,$$

并且当 $\|f\|_{\Phi} \leqslant 1$ 时, $E\Phi(\|f\|) \leqslant \|f\|_{\Phi}$; 当 $\|f\|_{\Phi} > 1$ 时相反不等式成立.

称 $L_{\Phi}(\mu, X)$ 为 Orlicz 空间. 若 X 是实数域或复数域, 则记为 $L_{\Phi}(\mu)$ 或 L_{Φ}. 自然地, $L_{\Phi}(\mu, X)$ 的性质与函数 Φ 有直接关系. 例如, 对于实函数的空间 L_{Φ}, L_{Φ} 是自反的当且仅当 Φ 及其补函数 Ψ 都是限制增长的.

现在让我们转到关于 Φ 函数积分的若干引理.

引理 1 设 Φ 是限制增长的 Young 函数, ξ, η 是非负 R.V., 满足

$$E\xi\varphi(\xi) < \infty, \quad E\xi\varphi(\xi) \leqslant E\eta\varphi(\xi), \tag{1.2}$$

则

$$E\Phi(\xi) \leqslant E\Phi(\eta). \tag{1.3}$$

证明 根据上面 1°,

$$\xi\varphi(\xi) = \Phi(\xi) + \Psi(\varphi(\xi)),$$
$$\eta\varphi(\xi) \leqslant \Phi(\eta) + \Psi(\varphi(\xi)),$$

对两式分别积分, 由 (1.2) 得到 (1.3).

引理 2 (Garsia-Neveu) 对于非负 R.V. ξ, η, 则

$$\int_{\{\xi>\lambda\}} (\xi - \lambda)\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{\{\xi>\lambda\}} \eta \mathrm{d}\mu, \quad \forall\, \lambda \geqslant 0 \tag{1.4}$$

当且仅当对于任何凸 Φ 函数有

$$E\Phi(\xi) \leqslant E\varphi(\xi)\eta. \tag{1.5}$$

证明 (1.5) $\Rightarrow$ (1.4). 取 $\varphi(t) = \chi_{\{t>\lambda\}}$, 则 $\Phi(t) = (t-\lambda)^+$, 从而

$$\begin{aligned}\int_{\{\xi>\lambda\}} (\xi - \lambda)\mathrm{d}\mu &= E(\xi-\lambda)^+ = E\Phi(\xi) \\ &\leqslant E\varphi(\xi)\eta = \int_{\{\xi>\lambda\}} \eta \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

(1.4) $\Rightarrow$ (1.5). 对(1.4)两边关于$\mathrm{d}\varphi(\lambda)$积分, 则

$$\int_0^{\infty} \int_{\{\xi>\lambda\}} (\xi - \lambda)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\varphi(\lambda) \leqslant \int_0^{\infty} \int_{\{\xi>\lambda\}} \eta\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\varphi(\lambda). \tag{1.6}$$

由于 φ 的左连续性, 左端等于

$$\int_\Omega \int_0^\xi (\xi-\lambda)\mathrm{d}\varphi(\lambda)\mathrm{d}\mu = E\left[(\xi-\lambda)\varphi(\lambda)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\xi} + \int_0^\xi \varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]$$
$$= E(\Phi(\xi) - \xi\varphi(0)).$$

右端等于

$$E\int_0^\xi \eta \mathrm{d}\varphi(\lambda) = E\eta(\varphi(\xi)-\varphi(0)).$$

注意由 (1.4), 当 $\lambda = 0$ 时得出 $E\xi \leqslant E\eta$, 代入 (1.6) 得到 (1.5).

推论 1　设 (A_n) 是非负增加适应序列, $Y \geqslant 0$, 若

$$E(A_\infty - A_{n-1}\,|B_n) \leqslant E(Y\,|B_n), \quad n \geqslant 0, \tag{1.7}$$

则对于任何凸函数 Φ,

$$E\Phi(A_\infty) \leqslant E\varphi(A_\infty)Y. \tag{1.8}$$

若 Φ 是限制增长的 Young 函数, 则

$$E\Phi(A_\infty) \leqslant p_\Phi E\Phi(Y). \tag{1.9}$$

证明　令 $\tau = \inf\{n : A_n > \lambda\}(\lambda > 0)$, 则 $A_{\tau-1} \leqslant \lambda$ ($\tau = 0$ 时记 $A_{\tau-1} = 0$), $A_\infty - \lambda \leqslant A_\infty - A_{\tau-1}$. 由于 (1.7) 对于任意 τ 也成立, 故

$$\int_{\{A_\infty>\lambda\}} (A_\infty - \lambda)\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{\{\tau<\infty\}} (A_\infty - A_{\tau-1})\mathrm{d}\mu$$
$$= \int_{\{\tau<\infty\}} E(A_\infty - A_{\tau-1}\,|B_\tau)\mathrm{d}\mu$$
$$\leqslant \int_{\{\tau<\infty\}} E(Y\,|B_\tau)\mathrm{d}\mu = \int_{\{\tau<\infty\}} Y\mathrm{d}\mu,$$

即 (1.4) 成立, 其中 $A_\infty = \xi, Y = \eta$. 由引理 2 得出 (1.5), 即 (1.8) 成立. 由于 $t\varphi(t) \leqslant p_\Phi \Phi(t), \forall\, t > 0$, 则 (1.8) 和引理 1 给出 (1.9).

推论 2　设 Φ 是限制增长的 Young 函数, (Z_n) 是非负 R.V. 序列, (B_n) 是递增子 σ 代数序列, 则存在 $c > 0$ 使得

$$E\Phi\left(\sum_{n=1}^\infty E(Z_n\,|B_n)\right) \leqslant cE\Phi\left(\sum_{n=1}^\infty Z_n\right). \tag{1.10}$$

证明　不妨设右端是有限的并且记

$$A_n = \sum_{i=1}^n E(Z_i\,|B_i), \quad A'_n = \sum_{i=1}^n Z_i.$$

由于

$$E(A_\infty - A_{n-1}|B_n) = E\left(\sum_{i=n}^{\infty} E(Z_i|B_i)|B_n\right)$$
$$= E\left(\sum_{i=n}^{\infty} Z_i|B_n\right) \leqslant E(A'_\infty|B_n),$$

由推论 1 即得出所要的结论.

推论 3 设 (B_n) 是递增子 σ 代数序列, (Z_n) 是与之适应的非负 R.V. 序列, $A'_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, $A_n = \sum_{i=1}^{n} E(Z_i|B_i)$, 若 $E(\sup_{n\geqslant 1} Z_n) < \infty$, 则

$$\{A_\infty < \infty\} = \{A'_\infty < \infty\} \text{ a.e..} \tag{1.11}$$

证明 $\forall\lambda > 0$, 令 $\tau = \inf\{n : A_{n+1} > \lambda\}$, 则

$$EA'_\tau = E\sum_{i=1}^{\infty} Z_i\chi_{\{\tau\geqslant i\}} = E\sum_{i=1}^{\infty} E(Z_i|B_{i-1})\chi_{\{\tau\geqslant i\}} = EA_\tau \leqslant \lambda,$$

于是 $A'_\tau < \infty$ a.e., 即在 $\{\tau = \infty\} = \{A_\infty \leqslant \lambda\}$ 上 $A'_\tau < \infty$ a.e..λ 是任意的, 所以 $\{A_\infty < \infty\} \subset \{A'_\infty < \infty\}$ a.e.. 反过来, 由于

$$EA_\tau = EA'_\tau = E(A'_{\tau-1} + Z_\tau) \leqslant \lambda + E(\sup_{n\geqslant 1} Z_n) < \infty,$$

用类似方法最终得出 $\{A_\infty < \infty\} \supset \{A'_\infty < \infty\}$ a.e.. 故结论成立.

引理 3 设 Φ 是限制增长的严格凸函数, 即 $1 < q_\Phi \leqslant p_\Phi < \infty, \xi, \eta$ 是非负 R.V., 满足

$$\lambda\mu(\xi > \alpha\lambda) \leqslant \int_{\{\xi>\beta\lambda\}} \eta \mathrm{d}\mu, \quad \forall\lambda > 0, \tag{1.12}$$

其中 $\alpha \geqslant \beta > 0$, 则

$$E\left(\frac{\xi}{\alpha}\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right) \leqslant C_{\alpha,\beta,\Phi} q_\Phi E\eta\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right), \tag{1.13}$$

并且

$$\|\xi\|_\Phi \leqslant \alpha C_{\alpha,\beta,\Phi} q'_\Phi \|\eta\|_\Phi. \tag{1.14}$$

当 $\alpha = \beta$ 时, $C_{\alpha,\beta,\Phi} = 1$ 并且不需要 $p_\Phi < \infty$.

证明 对 (1.12) 两端关于 $\mathrm{d}\varphi(\lambda)$ 积分得到

$$\int_0^\infty \lambda \int_{\{\xi>\alpha\lambda\}} \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\varphi(\lambda) \leqslant \int_0^\infty \int_{\{\xi>\beta\lambda\}} \eta \mathrm{d}\mu \mathrm{d}\varphi(\lambda),$$

即

$$E\int_0^{\frac{\xi}{\alpha}} \lambda \mathrm{d}\varphi(\lambda) \leqslant E\eta \int_0^{\frac{\xi}{\beta}} \mathrm{d}\varphi(\lambda)$$

或者

$$E\left(\frac{\xi}{\alpha}\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right) - E\Phi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \leqslant E\eta\varphi\left(\frac{\xi}{\beta}\right). \tag{1.15}$$

由于 $\Phi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \leqslant \frac{1}{q_\Phi}\frac{\xi}{\alpha}\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$, 又 $\frac{\Phi(t)}{t^p}$ 是 t 的下降函数, 从而 $\forall\, t > 0$,

$$\varphi(\gamma t) \leqslant p\frac{\Phi(\gamma t)}{\gamma t} \leqslant p(\gamma t)^{p-1}\frac{\Phi(t)}{t^p} \leqslant p\gamma^{p-1}q^{-1}\varphi(t) \tag{1.16}$$

(这里 $\gamma \geqslant 1, p = p_\Phi, q = q_\Phi$, 下同). 代入 (1.15) 得到

$$E\left(\frac{\xi}{\alpha}\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right) \leqslant \frac{q}{q-1}pq^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{p-1} E\eta\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right). \tag{1.17}$$

若 $\alpha = \beta$, 直接从 (1.15) 得到

$$E\left(\frac{\xi}{\alpha}\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right) \leqslant q' E\eta\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right).$$

不妨设右端是有限的, 利用引理 1 得到

$$E\Phi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \leqslant E\Phi(q' C_{\alpha,\beta,\Phi}\eta).$$

又对于 $\forall\, c > 0, c\xi, c\eta$ 也满足 (1.12), 从而

$$E\Phi\left(\frac{c\xi}{\alpha}\right) \leqslant E\Phi(q' C_{\alpha,\beta,\Phi} c\eta).$$

特别地, 取 $c = \|q' C_{\alpha,\beta,\Phi}\eta\|_\Phi^{-1}$, 则

$$E\Phi\left(\frac{c\xi}{\alpha}\right) \leqslant E\Phi\left(\frac{q' C_{\alpha,\beta,\Phi}\eta}{\|q' C_{\alpha,\beta,\Phi}\eta\|_\Phi}\right) \leqslant 1,$$

于是由定义

$$\|\xi\|_\Phi \leqslant \frac{\alpha}{c} = \alpha q' C_{\alpha,\beta,\Phi} \|\eta\|_\Phi.$$

引理得证.

由此引理和 2.4 节建立的不等式 (4.5) 立即得到下面 Doob 不等式的推广.

推论 4　设 $f = (f_n)$ 是非负下鞅或 B 值鞅, Φ 是限制增长的严格凸函数, 则

$$\|f^*\|_\Phi \leqslant q'_\Phi \sup_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\Phi. \tag{1.18}$$

定义 一对非负函数 (ξ,η) 称为满足好 λ 不等式, 若对于 $\alpha>1$ 和 $\beta_n(\beta_n>0,\beta_n\to 0)$ 存在 $\varepsilon_{\alpha\beta_n}$ 和有界序列 $\delta_{\alpha\beta_n}$, 使得 $\forall\,\lambda>0$,

$$P(\xi>\alpha\lambda)\leqslant \varepsilon_{\alpha\beta_n}P(\xi>\lambda)+\delta_{\alpha\beta_n}P(\eta>\beta_n\lambda), \tag{1.19}$$

并且对于固定的 α, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_{\alpha\beta_n}=0$.

引理 4 设 Φ 是限制增长的一般 Φ 函数, 非负函数对 (ξ,η) 满足好 λ 不等式, 则只要 $\beta=\beta_n$ 足够小就有

$$E\Phi(\xi)\leqslant c_\alpha c_{\beta-1}\delta_{\alpha\beta}(1-c_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta})^{-1}E\Phi(\eta). \tag{1.20}$$

证明 对 (1.19) 两端积分得到

$$\begin{aligned}E\Phi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)&=\int_0^\infty P(\xi>\alpha\lambda)\mathrm{d}\Phi(\lambda)\\&\leqslant \varepsilon_{\alpha\beta}\int_0^\infty P(\xi>\lambda)\mathrm{d}\Phi(\lambda)+\delta_{\alpha\beta}\int_0^\infty P(\eta>\beta\lambda)\mathrm{d}\Phi(\lambda)\\&=\varepsilon_{\alpha\beta}E\Phi(\xi)+\delta_{\alpha\beta}E\Phi\left(\frac{\eta}{\beta}\right).\end{aligned}$$

由限制增长性,

$$E\Phi(\xi)\leqslant C_\alpha E\Phi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\leqslant C_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}E\Phi(\xi)+C_\alpha C_{\beta^{-1}}\delta_{\alpha\beta}E\Phi(\eta).$$

若 $E\Phi(\xi)<\infty$, 只要 β 足够小使得 $C_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}<1$, 则得到 (1.20).

6.2 凸 Φ 函数不等式

仍记鞅 $f=(f_n,B_n,n\geqslant 0)$ 为 $f=(f_n)$, 鞅差为 $\mathrm{d}f=(\mathrm{d}f_n)$, 其中 $\mathrm{d}f_n=f_n-f_{n-1}$, $f_{-1}=0, B_{-1}=\{\varnothing,\Sigma\}$. 记 f 的极大函数, p 均方函数和条件 p 均方函数分别为

$$f_n^*=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\|f_i\|,\quad f^*=\sup_{n\geqslant 1}f_n^*;$$

$$S_n^{(p)}(f)=\left(\sum_{i=0}^n\|\mathrm{d}f_i\|^p\right)^{1/p},\quad S^{(p)}(f)=\sup_{n\geqslant 1}S_n^{(p)}(f);$$

$$\sigma_n^{(p)}(f)=\left(\sum_{i=0}^n E(\|\mathrm{d}f_i\|^p\,|B_{i-1})\right)^{1/p},\quad \sigma^{(p)}(f)=\sup_{n\geqslant 1}\sigma_n^{(p)}(f).$$

这里 $1 \leqslant p < \infty$. 以 $\|f\|_a = \sup\limits_{n \geqslant 1} \|f_n\|_a$ 记 f 的 a 范数, $1 \leqslant a \leqslant \infty$.

今后提到 "任何 X 值鞅" 总是意味着基本概率空间 (Ω, Σ, P) 和 (B_n) 都允许变动, 并且 f 可以是任一与 (B_n) 适应的鞅.

注意字母 c, C, L 等在不同地方可能代表不同常数.

定理 1　若 $2 \leqslant q < \infty$ 并且对于任何 X 值 WP 鞅 $f = (f_n)$, 当 $\|f\|_1 < \infty$ 时 $S^{(q)}(f) < \infty$ a. e., 则 X 必同构于 q 凸空间.

证明　由 Pisier 定理, 只需证明存在 $c > 0$, 使得任何 X 值 WP 鞅满足

$$\left\|S^{(q)}(f)\right\|_q \leqslant c \|f\|_q . \tag{2.1}$$

现将证明分为以下几步:

1° 由定理条件, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $\|f\|_1 < \delta$ 时,

$$P(S^{(q)}(f) \geqslant \varepsilon) < \varepsilon. \tag{2.2}$$

若不然, 有 $\varepsilon_0 > 0$ 和 WP 鞅 f_k $(k = 1, 2, \cdots)$, $\|f_k\|_1 \leqslant 2^{-k}$, 但

$$P(S^{(q)}(f_k) \geqslant \varepsilon_0) \geqslant \varepsilon_0.$$

记 $f_k = (f_{kn})$, 对应的 σ 代数序列为 $\{B_{kn}\}$, 不妨设 $f_0 = 0$[①], 则存在自然数 n_k 使得

$$P\left(S_{n_k}^{(q)}(f_k) \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

不失一般性, 假定基础概率空间是同一个, 并且 $B_{k\infty} = \bigvee\limits_{n=0}^{\infty} B_{kn}$ $(k \geqslant 1)$ 彼此独立. 考虑 σ 代数序列 (B_n), 其中

$$\begin{aligned}
&B_0 = B_{10}, B_1 = B_{11}, \cdots, B_{n_1-1} = B_{1n_1-1},\\
&B_{n_1} = B_{1n_1} \vee B_{20}, \cdots, B_{n_1+n_2-1} = B_{1n_1} \vee B_{2n_2-1},\\
&B_{n_1+n_2} = B_{1n_1} \vee B_{2n_2} \vee B_{30}, \cdots,
\end{aligned}$$

以及序列

$$(\mathrm{d}f_{11}, \cdots, \mathrm{d}f_{1n_1}, \mathrm{d}f_{21}, \cdots, \mathrm{d}f_{2n_2}, \mathrm{d}f_{31}, \cdots),$$

由 $B_{k\infty}$ 的相互独立性知道此序列是鞅差序列 (见附录), 记对应的鞅为 $F = (F_n)$. 则一方面

$$\|F\|_1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

① 有时为了证明空间的某种性质, 可以假定其中所有鞅的 $f_0 = 0$. 理由是每个首项不为 0 的鞅可以转变成首项为 0 的鞅而保持极大函数、均方函数不变. 例如, 设 f 与 (B_n) 适应, 取 B 是与 $B_\infty = \sigma(\cup B_n)$ 独立的 σ 代数, P 在 B 上无原子. 然后取 $r, P(r = \pm 1) = 1/2$. 考虑新的鞅差 $(0, r\mathrm{d}f_1, r\mathrm{d}f_2, \cdots)$, 记相应的鞅为 $\tilde{f} = (\tilde{f}_n)$, 对应的 σ 代数序列为 $\tilde{B}_n = B_{n-1} \vee B$, 则 $\tilde{f}$ 满足要求.

另一方面, 存在集合 A, $P(A) \geqslant \varepsilon_0/2$, 使得

$$S^{(q)}(F) \geqslant S_{n_k}^{(q)}(F) \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2} k^{1/q}, \quad k \geqslant 1.$$

换句话说, 在一个正测度集合上 $S^{(q)}(F) = +\infty$. 这与定理的条件矛盾.

由 (2.2) 还知道, 在定理条件下, 存在 $c > 0$ 使得任何 WP 鞅 f, 若

$$S^{(q)}(f) > 1 \text{ a.e.}, \quad 则 \|f\|_1 \geqslant c. \tag{2.3}$$

2° 由 (2.3), 存在常数 $L > 0$, 使得对于每个 WP 鞅 f 和 $\lambda > 0$,

$$\lambda P(S^{(q)}(f) > \lambda) \leqslant L \|f\|_1 . \tag{2.4}$$

L 仅与 (2.3) 中 c 有关. 实际上可以证明更强的结论, 即 $\forall j \geqslant 1$,

$$cP(S_j^{(q)}(f) > 2) \leqslant \|f\|_1 . \tag{2.5}$$

只要 (2.5) 对于每个 f 成立, 以 $2\lambda^{-1} f$ 代替 f 即得出 (2.4).

为证 (2.5), 不妨设 $P(S_j^{(q)}(f) > 2) > 0$. 取与 f 同分布并且彼此独立的鞅 f_k $(k \geqslant 1)$, 记 $A_k = \{S_j^{(q)}(f_k) > 2\}, u_k = \chi_{A_k^c}$, 其中 A_k^c 是 A_k 的余集, $\chi_{A_k^c}$ 是其特征函数, 则

$$Eu_k = P(S_j^{(q)}(f_k) \leqslant 2) = P(S_j^{(q)}(f) \leqslant 2) < 1. \tag{2.6}$$

定义鞅差序列

$$(\mathrm{d}f_{11}, \cdots, \mathrm{d}f_{1j}, u_1 \mathrm{d}f_{21}, \cdots, u_1 \mathrm{d}f_{2j}, u_1 u_2 \mathrm{d}f_{31}, \cdots),$$

相应的鞅记为 $F = (F_n)$. 则由独立性,

$$\begin{aligned} E\|F_{kj}\| &\leqslant E(1 + u_1 + u_1 u_2 + \cdots + u_1 \cdots u_{k-1}) E\|f_j\| \\ &\leqslant (1 - Eu_1)^{-1} E\|f_j\| \\ &= P(S_j^{(q)}(f) > 2)^{-1} E\|f_j\| \end{aligned}$$

或者

$$P(S_j^{(q)}(f) > 2) \|F_{kj}\|_1 \leqslant \|f_j\|_1 . \tag{2.7}$$

注意到 $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty$, 由 Borel-Cantelli 引理,

$$P(A^*) = P(A_k, i, o) = 1.$$

这说明 $S^{(q)}(F) > 1$ a.e., 由 (2.3) 得出 $\|F_{kj}\|_1 \geqslant c$, 从而由 (2.7) 得到 (2.5).

3° 为得到 (2.1), $\forall\lambda > 0, \delta > 0$ 和 $\beta^q > \delta^q + 1$, 定义停时

$$\begin{aligned}\mu &= \inf\{n\colon S_n^{(q)}(f) > \lambda\},\\ v &= \inf\{n\colon S_n^{(q)}(f) > \beta\lambda\},\\ \sigma &= \inf\{n\colon \|f_n\| \vee \|\mathrm{d}f_{n+1}\| > \delta\lambda\}\end{aligned} \tag{2.8}$$

$(\inf\varnothing = \infty)$. 记 $A_k = \{\mu < k \leqslant v \wedge \sigma\}, u_k = \chi_{A_k}$, 由于 f 是 WP 鞅, (u_k) 可料, 令

$$\hat{f}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \mathrm{d}f_k, \quad \hat{f} = (\hat{f}_n).$$

注意当 $u_n = 1$ 时, $\omega \in \{\mu < n \leqslant v \wedge \sigma\} = \{\mu < n\} \cap \{n \leqslant v \wedge \sigma\}$, 此时存在 $k_0, 1 \leqslant k_0 < n, \omega \notin A_{k_0}, \omega \in A_{k_0+1}$, 从而

$$\hat{f}_n = \sum_{k=k_0+1}^{n} \mathrm{d}f_k = f_n - f_{k_0} = f_{n-1} + \mathrm{d}f_n - f_{k_0}.$$

由 σ 的定义和 $n \leqslant \sigma$ 可以得出

$$\left\|\hat{f}_n\right\| \leqslant \|f_{n-1}\| + \|\mathrm{d}f_n\| + \|f_{k_0}\| \leqslant 3\delta\lambda,$$

从而

$$E\left\|\hat{f}_n\right\| \leqslant 3\delta\lambda P(\mu < \infty) = 3\delta\lambda P(S^{(q)}(f) > \lambda). \tag{2.9}$$

但在 $\{v = n, \sigma = \infty\}$ 上, $f^* \leqslant \delta\lambda,\ \mathrm{d}^*(f) \leqslant \delta\lambda$, 并且对于上面所说的 k_0 有 $k_0 - 1 < \mu$, 从而

$$\begin{aligned}S_n^{(q)}(\hat{f})^q &= \sum_{k=1}^{n} \|u_k \mathrm{d}f_k\|^q\\ &= \sum_{k=1}^{n} \|\mathrm{d}f_k\|^q - \|\mathrm{d}f_{k_0}\|^q - \sum_{k=1}^{k_0} \|\mathrm{d}f_k\|^q \geqslant (\beta^q - \delta^q - 1)\lambda^q.\end{aligned}$$

于是 $\{v = n, \sigma = \infty\} \subset \{S_n^{(q)}(\hat{f})^q \geqslant (\beta^q - \delta^q - 1)\lambda^q\}$. 或者进一步地

$$\{S^{(q)}(f) > \beta\lambda, f^* \vee \mathrm{d}^*(f) \leqslant \delta\lambda\} \subset \{S^{(q)}(\hat{f})^q \geqslant (\beta^q - \delta^q - 1)\lambda^q\}. \tag{2.10}$$

将 (2.4) 应用于 $(\hat{f}_n)$, 则 (2.9), (2.10) 给出

$$\begin{aligned}&P(S^{(q)}(f) > \beta\lambda, f^* \vee \mathrm{d}^*(f) \leqslant \delta\lambda)\\ \leqslant\ &P(S^{(q)}(\hat{f})^q \geqslant (\beta^q - \delta^q - 1)\lambda^q)\\ \leqslant\ &(\beta^q - \delta^q - 1)^{-1/q}\lambda^{-1} L \sup_n E\left\|\hat{f}_n\right\|\\ \leqslant\ &3\delta L(\beta^q - \delta^q - 1)^{-1/q} P(S^{(q)}(f) > \lambda).\end{aligned} \tag{2.11}$$

于是

$$\begin{aligned}P(S^{(q)}(f) > \beta\lambda) \leqslant & P(f^* \vee \mathrm{d}^*(f) > \delta\lambda) \\ & + P(S^{(q)}(f) > \beta\lambda, f^* \vee \mathrm{d}^*(f) \leqslant \delta\lambda) \\ \leqslant & P(f^* \vee \mathrm{d}^*(f) > \delta\lambda) \\ & + 3\delta L(\beta^q - \delta^q - 1)^{-1/q} P(S^{(q)}(f) > \lambda). \qquad (2.12)\end{aligned}$$

此即关于 $(S^{(q)}(f), f^* \vee \mathrm{d}^*(f))$ 的好 λ 不等式, 取 $\Phi(t) = t^q$, 则 6.1 节引理 4 给出

$$E(S^{(q)}(f)^q \leqslant CE(f^* \vee \mathrm{d}^*(f))^q \leqslant CE(f^*)^q.$$

由 Doob 不等式最后得出 (2.1).

引理 1 若 WP 鞅 f 满足 $\|f\|_1 < \infty$ 和 $P(S^{(q)}(f) = \infty) > 0$, 则存在另一个 WP 鞅 $\hat{f}$, $\left\|\hat{f}\right\|_\infty < \infty$, 并且

$$P(S^{(q)}(\hat{f}) = \infty) \geqslant \frac{1}{2} P(S^{(q)}(f) = \infty). \qquad (2.13)$$

证明 记 $A = \{S^{(q)}(f) = \infty\}$. 由极大不等式 $\lambda P(f^* > \lambda) \leqslant C\|f\|_1$, 取 λ 使得 $P(f^* > \lambda) < P(A)/2$. 定义

$$A_k = \{\|f_i\| \leqslant \lambda, 1 \leqslant i \leqslant k-1; \|\mathrm{d}f_j\| \leqslant 2\lambda, 1 \leqslant j \leqslant k\},$$

$$u_k = \chi_{A_k}, \quad \hat{f}_n = \sum_{k=1}^n u_k \mathrm{d}f_k, \quad \hat{f} = (\hat{f}_n),$$

则有 $\left\|\hat{f}_n\right\| \leqslant 3\lambda$, $\hat{f}$ 是 WP 鞅并且 $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leqslant 3\lambda$. 另一方面,

$$P(S^{(q)}(\hat{f}) = \infty) \geqslant P(S^{(q)}(\hat{f}) = S^{(q)}(f), S^{(q)}(f) = \infty),$$

$$P(S^{(q)}(\hat{f}) \neq S^{(q)}(f), S^{(q)}(f) = \infty)$$

$$\leqslant P(f^* > \lambda, S^{(q)}(f) = \infty) \leqslant P(A)/2,$$

所以 $P(S^{(q)}(\hat{f}) = \infty) \geqslant P(A)/2$. 引理得证.

定理 2 设 $2 \leqslant q < \infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 凸空间;

(ii) 对于任何 X 值鞅 f, $\|f\|_\infty < \infty$, 则 $S^{(q)}(f) < \infty$ a.e.;

(iii) 对于任何 X 值鞅 f, 若 $E(\mathrm{d}^*(f)^q) < \infty$, 则

$$\{f^* < \infty\} \subset \{S^{(q)}(f) < \infty\} \text{a.e.}.$$

证明　(i) ⇒ (ii) 显然. 为证 (ii) ⇒ (i), 由引理 1, 只要对任何一致有界 WP 鞅 (ii) 成立, 则对任何 $\|f\|_1 < \infty$ 的 WP 鞅 (ii) 成立, 应用定理 1 即得出所要的结论.

(ii) ⇒ (iii). $\forall \lambda > 0$, 定义 $\tau_\lambda = \inf\{n: \|f_n\| > \lambda\}$, 考虑停止鞅 $f^{(\tau_\lambda)} = (f_{\tau_\lambda \wedge n})$, 由于

$$\begin{aligned}\|f_{\tau_\lambda \wedge n}\| &= \|f_n\| \chi_{\{\tau_\lambda > n\}} + \|f_{\tau_\lambda}\| \chi_{\{\tau_\lambda \leqslant n\}} \\ &\leqslant \lambda + \|\mathrm{d}f_{\tau_\lambda}\| \chi_{\{\tau_\lambda \leqslant n\}} \leqslant \lambda + \mathrm{d}^*(f),\end{aligned} \tag{2.14}$$

所以

$$\left\|f^{(\tau_\lambda)}\right\|_q^q = \sup_{n\geqslant 1} E\|f_{\tau_\lambda \wedge n}\|^q \leqslant 2^q(\lambda^q + E(\mathrm{d}^*(f)^q) < \infty.$$

由 (ii), $S^{(q)}(f^{(\tau_\lambda)}) < \infty$ a.e., 但在 $\{\tau_\lambda = \infty\} = \{f^* \leqslant \lambda\}$ 上, $S^{(q)}(f^{(\tau_\lambda)}) = S^{(q)}(f)$, 即 $S^{(q)}(f) < \infty$ 在 $\{\tau_\lambda = \infty\}$ 上 a.e. 成立. λ 任意, 故 (iii) 成立.

(iii)⇒(ii). 当 $\|f\|_\infty < \infty$时, $\mathrm{d}^*(f) \leqslant 2f^* \leqslant 2\|f\|_\infty < \infty$, 依照 (iii), $S^{(q)}(f) < \infty$ a.e., 于是 (ii) 成立.

引理 2 (Davis 分解)　每个 X 值鞅 $f = (f_n)$ 有分解 $f = g + h$, 其中 $g = (g_n)$, $h = (h_n)$ 都是鞅, 并且

$$\|\mathrm{d}g_n\| \leqslant 4\mathrm{d}_{n-1}^*(f), \ \sum_{n=1}^\infty \|\mathrm{d}h_n\| \leqslant 4E\mathrm{d}^*(f). \tag{2.15}$$

证明　记 $\Delta_i' = \mathrm{d}f_i \chi_{\{\|\mathrm{d}f_i\| \leqslant 2\mathrm{d}_{n-1}^*(f)\}}$, $\Delta_i'' = \mathrm{d}f_i \chi_{\{\|\mathrm{d}f_i\| > 2\mathrm{d}_{n-1}^*(f)\}}$, 然后令

$$\mathrm{d}g_i = \Delta_i' - E(\Delta_i' | B_{i-1}), \quad g_n = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}g_i,$$

$$\mathrm{d}h_i = \Delta_i'' - E(\Delta_i'' | B_{i-1}), \quad h_n = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}h_i. \tag{2.16}$$

显然 $g = (g_n), h = (h_n)$ 是鞅并且

$$\|\mathrm{d}g_n\| \leqslant \|\Delta_n'\| + E(\|\Delta_n'\| | B_{n-1}) \leqslant 4\mathrm{d}_{n-1}^*(f),$$

又由 $\|\Delta_n''\| \leqslant 2\mathrm{d}_n^*(f) - 2\mathrm{d}_{n-1}^*(f)$ 得到

$$E\sum_{n=1}^\infty \|\mathrm{d}h_n\| \leqslant 4E\mathrm{d}^*(f).$$

定理 3　设 $2 \leqslant q < \infty$, Φ 是限制增长的 Young 函数, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 凸空间;

(ii) 存在 $C_q > 0$ 使得对于任何 X 值鞅 f,

$$\lambda^q P(S^{(q)}(f) > \lambda) \leqslant C_q^q \|f\|_q^q; \tag{2.17}$$

(iii) 存在 $C_\Phi > 0$ 使得对于任何 X 值鞅 f,

$$\left\|S^{(q)}(f)\right\|_\Phi \leqslant C_\Phi \|f^*\|_\Phi; \tag{2.18}$$

(iv) 若 Φ 还是严格凸的, 则代替 (2.18) 有

$$\left\|S^{(q)}(f)\right\|_\Phi \leqslant C_\Phi \|f\|_\Phi. \tag{2.19}$$

这里 $\|f\|_\Phi = \sup\limits_n \|f_n\|_\Phi$.

证明 (i) ⇒ (ii). 应用 (2.1), 得到

$$\lambda^q P(S^{(q)}(f) > \lambda) \leqslant \left\|S^{(q)}(f)\right\|_q^q \leqslant C_q^q \|f\|_q^q.$$

(ii)⇒ (iii). 设 $W = (W_n)$ 是 $(\|\mathrm{d}f_n\|)$ 的任一可料强函数序列($\|\mathrm{d}f_n\| \leqslant W_n, W_n$ 单调递增并且 W_n 关于 B_{n-1} 可测). $\forall\, \lambda > 0, \delta > 0$ 和 $\beta^q > \delta^q + 1$. 定义

$$\mu = \inf\{n\colon S_n^{(q)}(f) > \lambda\},$$

$$v = \inf\{n\colon S_n^{(q)}(f) > \beta\lambda\},$$

$$\sigma = \inf\{n\colon \|f_n\| \vee W_{n+1} > \delta\lambda\}.$$

记 $A_k = \{\mu < k \leqslant v \wedge \sigma\}$, $u_k = \chi_{A_k}$, 则 (u_k) 是可料序列, 令

$$\hat{f}_n = \sum_{k=1}^n u_k \mathrm{d}f_k, \quad \hat{f} = (\hat{f}_n).$$

类似于定理 1 (3°) 的证明可以得到 $E\left\|\hat{f}_n\right\|^q \leqslant (3\delta\lambda)^q P(S^{(q)}(f) > \lambda)$, 在 $\{v = n, \sigma = \infty\}$ 上, $S_n^{(q)}(\hat{f})^q \geqslant (\beta^q - \delta^q - 1)\lambda^q$, 从而

$$P(S^{(q)}(f) > \beta\lambda, f^* \vee W^* \leqslant \delta\lambda) \leqslant P(S^{(q)}(\hat{f})^q \geqslant (\beta^q - \delta^q - 1)\lambda^q).$$

由以上诸式及 (2.17) 得到

$$\begin{aligned} P(S^{(q)}(f) > \beta\lambda, f^* \vee W^* \leqslant \delta\lambda) &\leqslant C_q(\beta^q - \delta^q - 1)^{-1}\lambda^{-q}\left\|\hat{f}\right\|_q^q \\ &\leqslant C_q(3\delta)^q(\beta^q - \delta^q - 1)^{-1} P(S^{(q)}(f) > \lambda), \end{aligned} \tag{2.20}$$

或者

$$\begin{aligned}P(S^{(q)}(f) > \beta\lambda) &\leqslant P(S^{(q)}(f) > \beta\lambda, f^* \vee W^* \leqslant \delta\lambda) \\&\quad + P(f^* \vee W^* > \delta\lambda) \\&\leqslant C_q(3\delta)^q(\beta^q - \delta^q - 1)^{-1}P(S^{(q)}(f) > \lambda) \\&\quad + P(f^* \vee W^* > \delta\lambda).\end{aligned} \tag{2.21}$$

此即关于 $(S^{(q)}(f), f^* \vee W^*)$ 的好 λ 不等式. 由 6.1 节引理 4, δ 足够小时

$$E\Phi(S^{(q)}(f)) \leqslant LE\Phi(f^* \vee W^*). \tag{2.22}$$

现在应用 Davis 分解 $f = g + h$, 对于 $g = (g_n)$, 以 $4\mathrm{d}^*_{n-1}(f)$ 作为强函数, g 满足 (2.22),

$$E\Phi(S^{(q)}(g)) \leqslant LE\Phi(g^* \vee 4\mathrm{d}^*(f)).$$

由 $g^* \leqslant f^* + h^*$, $\mathrm{d}^*(f) \leqslant 2f^*$ 以及 $\Phi(t)$ 的单调增加性,

$$\begin{aligned}E\Phi(S^{(q)}(g)) &\leqslant LE\Phi(f^* \vee 4\mathrm{d}^*(f)) + LE\Phi(h^* \vee 4\mathrm{d}^*(f)) \\&\leqslant LE\Phi(f^*) + LE\Phi(h^*).\end{aligned} \tag{2.23}$$

对于 $h = (h_n)$, 由 Davis 分解的证明, 实际上 $\forall n \geqslant 1$,

$$E\left(\sum_{i=n}^{\infty} \|\mathrm{d}h_i\| \,|B_n\right) \leqslant E(4\mathrm{d}^*(f)\,|B_n),$$

应用 6.1 节推论 1 得出

$$E\Phi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\mathrm{d}h_i\|\right) \leqslant E\Phi(4\mathrm{d}^*(f)), \tag{2.24}$$

从而

$$E\Phi(S^{(q)}(h)) \leqslant E\Phi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\mathrm{d}h_i\|\right) \leqslant E(\Phi(4\mathrm{d}^*(f)) \leqslant LE\Phi(f^*),$$

$$E\Phi(h^*) \leqslant E\Phi\left(\sum_{i=n}^{\infty} \|\mathrm{d}h_i\|\right) \leqslant LE\Phi(f^*),$$

注意 $S^{(q)}(f) \leqslant S^{(q)}(g) + S^{(q)}(h)$, 由 (2.23) 和以上两式得到

$$\begin{aligned}E\Phi(S^{(q)}(f)) &\leqslant CE\Phi(S^{(q)}(g)) + CE\Phi(S^{(q)}(h)) \\&\leqslant CE\Phi(f^*).\end{aligned} \tag{2.25}$$

为得到 (2.18), 可设 $\|f^*\|_\Phi = 1$, 此时 $E\Phi(f^*) \leqslant \|f^*\|_\Phi$, 故有

$$\left\|S^{(q)}(f)\right\|_\Phi \leqslant 1 + E\Phi(S^{(q)}(f)) \leqslant 1 + CE\Phi(f^*) \leqslant 1 + C,$$

由 $\|f\|_\Phi$ 的齐性得出

$$\left\|S^{(q)}(f)\right\|_\Phi \leqslant (1+C)\|f^*\|_\Phi = C_\Phi \|f^*\|_\Phi.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) 应用 6.1 节推论 4 得出.

(iv)$\Rightarrow$ (i). 由 (2.19) 知道, 对于每个 $\|f\|_\infty < \infty$ 的鞅 $S^{(q)}(f) < \infty$ a.e., 故可得到 X 同构于 q 凸空间.

定理 4 X 同构于 q 凸空间 $(2 \leqslant q < \infty)$ 当且仅当存在 $c > 0$, 使得任何 X 值鞅 f 满足

$$\left\|S^{(q)}(f)\right\|_1 \leqslant c\|f^*\|_1. \tag{2.26}$$

证明 只需证明必要性. 设 X 同构于 q 凸空间, 像定理 3 中 (ii) $\Rightarrow$ (iii) 的证明一样, 可得到关于 $(S^{(q)}(f), f^* \vee W^*)$ 的好 λ 不等式. 积分得出

$$\left\|S^{(q)}(f)\right\|_1 \leqslant L\|f^* \vee W^*\|_1. \tag{2.27}$$

应用 Davis 分解 $f = g + h$, 首先对于 g 有

$$\begin{aligned}\left\|S^{(q)}(g)\right\|_1 &\leqslant L\|g^* \vee\ 4\mathrm{d}^*(f)\|_1 \leqslant 8L\|f^*\|_1 + L\|g^*\|_1 \\ &\leqslant 9L\|f^*\|_1 + L\|h^*\|_1,\end{aligned} \tag{2.28}$$

其中用到了 $g^* \leqslant f^* + h^*$. 对于 $h = (h_n)$, 显然

$$\begin{aligned}&\left\|S^{(q)}(h)\right\|_1 \leqslant E\sum_{i=1}^{\infty}\|\mathrm{d}h_i\| \leqslant 4E\mathrm{d}^*(f) \leqslant 8\|f^*\|_1, \\ &\|h^*\|_1 \leqslant E\sum_{i=1}^{\infty}\|\mathrm{d}h_i\| \leqslant 8\|f^*\|_1.\end{aligned} \tag{2.29}$$

总之得到

$$\left\|S^{(q)}(f)\right\|_1 \leqslant \left\|S^{(q)}(g)\right\|_1 + \left\|S^{(q)}(h)\right\|_1 \leqslant c\|f^*\|_1.$$

(2.19) 称为 Burkholder-Gundy 不等式, (2.26) 称为 Davis 不等式. 注意对于不是严格凸的 Φ 函数 (2.19) 一般不成立, 甚至在实值情况也如此.

让我们转到 p 光滑空间的情况.

定理 5　设 $1 < p \leqslant 2$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) 对于任何 X 值鞅 $f = (f_n)$, 若 $S^{(p)}(f) \in L_\infty$, 则 f_n a.e. 收敛;

(iii) 对于任何 X 值鞅 $f = (f_n)$, 若 $E\mathrm{d}^*(f)^p < \infty$, 则

$$\{S^{(p)}(f) < \infty\} \subset \{f_n\text{收敛}\}\ \text{a.e.}.$$

证明　我们已经得到过当 $ES^{(p)}(f)^p < \infty$ 时, f_n a.e. 收敛 (5.3 节定理 2), 现在 (ii) 的条件更强, 故 (i) $\Rightarrow$ (ii) 成立.

根据 6.1 节推论 3 在 (ii), (iii) 情况, 都有 $\{\sigma^{(p)}(f) < \infty\} = \{S^{(p)}(f) < \infty\}$ a.e.. 故为证明 (ii)$\Rightarrow$ (iii), 只需证明将 (iii) 的 $S^{(p)}(f)$ 换为 $\sigma^{(p)}(f)$, (ii) $\Rightarrow$(iii) 仍成立. 实际上令 $\tau = \inf\{n\colon \sigma_{n+1}^{(p)}(f) > \lambda\}$, 考虑 $f^{(\tau)}$, 则

$$\sigma^{(p)}(f^{(\tau)})^p = \sum_{n=1}^{\tau} E(\|\mathrm{d}f_n\|^p\,|B_{n-1}) = \sigma_\tau^{(p)}(f)^p \leqslant \lambda^p. \tag{2.30}$$

由 (ii), $f_{\tau\wedge n}$ a.e. 收敛. 即在 $\{\tau = \infty\}$ 上, f_n a.e. 收敛. λ 任意, 故得所求.

(iii)$\Rightarrow$(i). 对于 $f = (f_n)$, 若 $S^{(p)}(f) < \infty$ a.e., 则 $E\mathrm{d}^*(f)^p \leqslant ES^{(p)}(f)^p < \infty$. 于是由 (iii), f_n a.e. 收敛. 仍由 6.3 节定理 2, X 同构于 p 光滑空间.

定理 6　设 $1 < p \leqslant 2, \Phi$ 是限制增长的 Young 函数, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) 存在 $C_p > 0$ 使得对于任何 X 值鞅 f,

$$\lambda^p P(f^* > \lambda) \leqslant C_p^p \left\|S^{(p)}(f)\right\|_p^p; \tag{2.31}$$

(iii) 存在 $C_\Phi > 0$ 使得对于任何 X 值鞅 f,

$$\|f^*\|_\Phi \leqslant C_\Phi \left\|S^{(p)}(f)\right\|_\Phi. \tag{2.32}$$

证明　(i)$\Rightarrow$(ii). 由 Pisier 定理得到

$$\lambda^p P(f^* > \lambda) \leqslant \|f^*\|_p^p \leqslant C_p^p \left\|S^{(p)}(f)\right\|_p^p.$$

(ii)$\Rightarrow$(iii). 定义停时

$$\begin{aligned}
&\mu = \inf\{n\colon f_n^* > \lambda\},\\
&\upsilon = \inf\{n\colon f_n^* > \beta\lambda\},\\
&\sigma = \inf\{n\colon S_n^{(p)}(f) \vee W_{n+1} > \delta\lambda\}.
\end{aligned}$$

这里 $\lambda > 0, \delta > 0, \beta^p > 1 + \delta^p, W = (W_n)$ 是 $(\|\mathrm{d}f_n\|)$ 的可料强函数序列.

类似于定理 3 相应部分的分析可得到关于 $(f^*, S^{(p)}(f) \vee W^*)$ 的好 λ 不等式, 从而得到

$$E\Phi(f^*) \leqslant LE\Phi(S^{(p)}(f) \vee W^*). \tag{2.33}$$

设 f 的 Davis 分解是 $f = g + h$. 对于 $g = (g_n), 4\mathrm{d}^*_{n-1}(f)$ 是可料强函数序列, 故 g 适合 (2.23), 即

$$E\Phi(g^*) \leqslant LE\Phi(S^{(p)}(g) \vee 4\mathrm{d}^*(f)).$$

由于 $S^{(p)}(g) \leqslant S^{(p)}(f) + S^{(p)}(h)$ 以及 $\mathrm{d}^*(f) \leqslant S^{(p)}(f)$, 上式变为

$$E\Phi(g^*) \leqslant LE\Phi(S^{(p)}(f)) + LE\Phi(S^{(p)}(h)). \tag{2.34}$$

对于 $h = (h_n)$, 有

$$E\Phi(h^*) \leqslant E\Phi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\mathrm{d}h_i\|\right) \leqslant E\Phi(4\mathrm{d}^*(f)) \leqslant L'E\Phi(S^{(p)}(f)),$$

$$E\Phi(S^{(p)}(h)) \leqslant E\Phi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\mathrm{d}h_i\|\right) \leqslant L'E\Phi(S^{(p)}(f)).$$

最后得出

$$E\Phi(f^*) \leqslant c(E\Phi(g^*) + E\Phi(h^*)) \leqslant CE\Phi(S^{(p)}(f)).$$

若设 $\left\|S^{(p)}(f)\right\|_\Phi = 1$, 则 $E\Phi(S^{(p)}(f)) \leqslant \left\|S^{(p)}(f)\right\|_\Phi$, 故

$$\|f^*\|_\Phi \leqslant 1 + E\Phi(f^*) \leqslant 1 + cE\Phi(S^{(p)}(f)) \leqslant 1 + C,$$

由 $\|\cdot\|_\Phi$ 的齐性得到 (2.23), 其中 $C_\Phi = 1 + C$.

(iii)⇒(i). 设 $f = (f_n)$ 是满足 $S^{(p)}(f) \in L_\infty$ 的 X 值鞅, 对于每个 $m \geqslant 1$, 定义鞅 $f^{(m)} = (f_n - f_m, n \geqslant m)$, 则

$$S^{(p)}(f^{(m)})^p = \sum_{n=m}^{\infty} \|\mathrm{d}f_n\|^p \to 0, \quad m \to \infty.$$

对于 (iii) 中的 (2.32), 现在有

$$\left\|\sup_{n \geqslant m} \|f_n - f_m\|\right\|_\Phi = \left\|f^{(m)*}\right\|_\Phi \leqslant C_\Phi \left\|S^{(p)}(f^{(m)})\right\|_\Phi \to 0,$$

m 是任意的, 这说明 f_n a.e. 收敛. 由定理 5(ii), X 同构于 p 光滑空间.

定理 7　X 同构于 p 光滑空间 $(1 < p \leqslant 2)$ 当且仅当存在 $C > 0$, 使得任何 X 值鞅 f 满足

$$\|f^*\|_1 \leqslant C\left\|S^{(p)}(f)\right\|_1. \tag{2.35}$$

证明　证明类似于定理 4, 这里略去.

由 Kwapien 定理得到

推论 1　设 Φ 是限制增长的 Young 函数, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间;

(ii) 存在 $C_\Phi > 0$ 使得对于任何 X 值鞅 f,

$$C_\Phi^{-1}E\Phi(f^*) \leqslant E\Phi(S^{(2)}(f)) \leqslant C_\Phi E\Phi(f^*);$$

(iii) 若 Φ 是严格凸的, 存在 $C_\Phi > 0$, 使得对于任何 X 值鞅 f,

$$C_\Phi^{-1}\|f\|_\Phi \leqslant \left\|S^{(2)}(f)\right\|_\Phi \leqslant C_\Phi\|f\|_\Phi;$$

(iv) 存在 $C > 0$, 使得对于任何 X 值鞅 f,

$$C^{-1}\|f^*\|_1 \leqslant \left\|S^{(2)}(f)\right\|_1 \leqslant C\|f^*\|_1;$$

(v) 对于任何 X 值鞅 f, 若 $E\mathrm{d}^*(f)^2 < \infty$, 则

$$\{f^* < \infty\} = \{S^{(2)}(f) < \infty\} = \{f_n \text{ 收敛}\} \text{ a.e..}$$

现在让我们转到正规鞅的一般 Φ 不等式. 正规鞅的性质与 WP 鞅相近. 称递增子 σ 代数序列 $(B_n, n \geqslant 0)$ 是正规的, 若 $\forall A \in B_n$, 存在 $B \in B_{n-1}$, 使得 $A \subset B$, 并且 $P(B) \leqslant dP(A)$. 这里 d 是一个与 n 无关的常数. 与正规 σ 代数序列适应的鞅称为正规鞅. 有若干种条件与 σ 代数序列的正规性等价. 下面条件即是常用的一个:

对于任何非负适应过程 $(\gamma_n, n \geqslant 0)$ 和 $\lambda \geqslant \|\gamma_0\|_\infty$, 存在停时 τ_λ 使得

$$\begin{aligned}&\{\gamma^* > \lambda\} \subset \{\tau_\lambda < \infty\}, P(\tau_\lambda < \infty) \leqslant dP(\gamma^* > \lambda),\\&\gamma^*_{\tau_\lambda} = \sup_{n \leqslant \tau_\lambda}|\gamma_n| \leqslant \lambda.\end{aligned} \tag{2.36}$$

见文献 [161]. 对于正规鞅往往可以得到更宽的结论.

定理 8　设 $2 \leqslant q < \infty$, Φ 是限制增长的一般 Φ 函数, $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi(t) = \infty$, 则 X 同构于 q 凸空间当且仅当存在 $c = c_{q\Phi} > 0$, 使得每个 X 值正规鞅满足

$$E\Phi(S^{(q)}(f)) \leqslant cE\Phi(f^*). \tag{2.37}$$

证明 (i)⇒(ii). 根据 q 凸性和 6.3 节引理 1 的不等式, 对于任何两个停时 $\sigma \leqslant \tau$,

$$E\left(\sum_{i=\sigma}^{\tau} \|\mathrm{d}f_i\|^q \,|B_\sigma\right) \leqslant cE(\|f_\tau - f_{\sigma-1}\|^q \,|B_\sigma). \tag{2.38}$$

这里由于 X 具有 RN 性质, 若 $f=(f_n)$ 一致有界 $(f^* \leqslant M < \infty)$, 则以 L_a 中范数 $f_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, 这给出 $\tau = \infty$ 时 f_τ 的定义. $\forall\, \beta > 0, \lambda > 0$, 存在停时 τ(设 $f_0 = 0$), 使得

$$\begin{aligned} &f_\tau^* \leqslant \beta\lambda, \{f^* > \beta\lambda\} \subset \{\tau < \infty\},\\ &P(\tau < \infty) \leqslant dP(f^* > \beta\lambda). \end{aligned}$$

考虑 $f^{(\tau)} = (f_{\tau\wedge n})$, 则 $f^{(\tau)}$ 一致有界并且对于任何停时 σ,

$$\begin{aligned} E(S_\tau^{(q)}(f)^q - S_{\tau\wedge\sigma}^{(q)}(f)^q) &= E[E(S_\tau^{(q)}(f)^q - S_{\tau\wedge\sigma}^{(q)}(f)^q \,|B_{\tau\wedge\sigma})]\\ &= E\left[E\left(\sum_{i=\tau\wedge\sigma+1}^{\tau} \|\mathrm{d}f_i\|^q \chi_{\{\sigma<\tau\}} \,|B_{\tau\wedge\sigma}\right)\right]\\ &\leqslant CE[E(\|f_\tau - f_{\tau\wedge\sigma}\|^q \,|B_{\tau\wedge\sigma})\chi_{\{\sigma<\tau\}}]\\ &\leqslant C2^q E[(f_\tau^*)^q \chi_{\{\sigma<\tau\}}]\\ &\leqslant C2^q\beta^q\lambda^q P(\sigma < \infty). \end{aligned} \tag{2.39}$$

对于非负适应过程 $(S_n^{(q)}(f^{(\tau)}))$ 和 $\lambda > 0$, 仍由正规性, 存在停时 σ 使得

$$S_\sigma^{(q)}(f^{(\tau)}) \leqslant \lambda, \quad P(\sigma < \infty) \leqslant dP(S^{(q)}(f^{(\tau)}) > \lambda),$$

对于如此的 σ, (2.39) 成立. 此时若 $\alpha > 1$, 则

$$\{S^{(q)}(f) > \alpha\lambda\} \subset \{S^{(q)}(f^{(\tau)}) > \alpha\lambda\} \cup \{\tau < \infty\}. \tag{2.40}$$

注意 $S^{(q)}(f^{(\tau)}) = S_\tau^{(q)}(f), S_\sigma^{(q)}(f^{(\tau)}) = S_{\tau\wedge\sigma}^{(q)}(f)$, 所以

$$\{S^{(q)}(f^{(\tau)}) > \alpha\lambda\} \subset \{S_\tau^{(q)}(f)^q - S_{\tau\vee\sigma}^{(q)}(f)^q > \alpha^q\lambda^q - \lambda^q\}.$$

由 (2.39), (2.40) 和 τ, σ 的定义得到

$$\begin{aligned} P(S^{(q)}(f) > \alpha\lambda) &\leqslant P(S^{(q)}(f^{(\tau)})) > \alpha\lambda) + P(\tau < \infty)\\ &\leqslant P(S_\tau^{(q)}(f)^q - S_{\tau\wedge\sigma}^{(q)}(f)^q > (\alpha^q - 1)\lambda^q) + P(\tau < \infty)\\ &\leqslant \frac{1}{(\alpha^q - 1)\lambda^q} E(S_\tau^{(q)}(f)^q - S_{\tau\wedge\sigma}^{(q)}(f)^q) + P(\tau < \infty) \end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{C2^q\beta^q}{\alpha^q-1}P(\sigma<\infty)+P(\tau<\infty).$$
$$\leqslant \frac{Cd2^q\beta^q}{\alpha^q-1}P(S^{(q)}(f^{(\tau)})>\lambda)+dP(f^*>\beta\lambda)$$
$$\leqslant \frac{Cd2^q\beta^q}{\alpha^q-1}P(S^{(q)}(f)>\lambda)+dP(f^*>\beta\lambda).$$

令 $\varepsilon_{\alpha\beta}=Cd2^q\beta^q(\alpha^q-1)^{-1}$, 则对于 $\alpha>1$, $\lim\limits_{\beta\to 0}\varepsilon_{\alpha\beta}=0$. 故 $(S^{(q)}(f),f^*)$ 满足好 λ 不等式. 然后由 6.1 节引理 4 得到 (2.37).

(ii)⇒ (i). 设 $f=(f_n)$ 是 WP 鞅, $f^*\leqslant M<\infty$, 则由 (2.37),

$$E\Phi(S^{(q)}(f))\leqslant cE\Phi(f^*)\leqslant cE\Phi(M)<\infty.$$

由于 $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi(t)=\infty$, 故知 $S^{(q)}(f)<\infty$ a.e., 于是 X 同构于 q 凸空间.

定理 9　设 $1<p\leqslant 2$, Φ 是限制增长的一般 Φ 函数, 并且 $\Phi(t)$ 在 $t=0$ 附近严格增加, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) 存在 $c=c_{p\Phi}>0$ 使得对于每个 X 值正规鞅 f,

$$E\Phi(f^*)\leqslant cE\Phi(S^{(p)}(f)). \tag{2.41}$$

证明　(i)⇒ (ii). 此时对于任何停时 $\sigma\leqslant\tau$,

$$E(\|f_\tau-f_{\sigma-1}\|^p\,|B_\sigma)\leqslant cE\left(\sum_{i=\sigma}^{\tau}\|\mathrm{d}f_i\|^p\,|B_\sigma\right) \tag{2.42}$$

成立. 由于当 $S^{(p)}(f)\in L_p$ 时, f_n 依 L_p 范数收敛 (7.3 节定理 2). 故即使 $\tau=\infty$ 上式也成立.

对于 $\beta>0,\lambda>0$, 由正规性, 存在停时 τ 使得

$$S_\tau^{(p)}(f)\leqslant\beta\lambda,\{S^{(p)}(f)>\beta\lambda\}\subset\{\tau<\infty\},$$
$$P(\tau<\infty)\leqslant dP(S^{(p)}(f)>\beta\lambda).$$

考虑 $f^{(\tau)}=(f_{\tau\wedge n})$. 显然对任何停时 σ,

$$f_\tau^*-f_{\tau\wedge\sigma}^*\leqslant\sup_{\tau\wedge\sigma<i\leqslant\tau}\|f_i-f_{\tau\wedge\sigma}\|. \tag{2.43}$$

对于 $f^{(\tau)}$, 存在停时 σ 使得

$$f_\sigma^{(\tau)^*}\leqslant\lambda,\{f^{(\tau)^*}>\lambda\}\subset\{\sigma<\infty\},$$
$$P(\sigma<\infty)\leqslant dP(f^{(\tau)^*}>\lambda),$$

由于 $f_\sigma^{(\tau)^*}=f_{\tau\wedge\sigma}^*, f^{(\tau)^*}=f_\tau^*$, (2.42)、(2.43) 和 Doob 不等式给出

$$\begin{aligned}
P(f^*>\alpha\lambda,\tau=\infty) &\leqslant P(f_\tau^*>\alpha\lambda)\\
&\leqslant P(f_\tau^*-f_{\tau\wedge\sigma}^*>(\alpha-1)\lambda)\\
&\leqslant \frac{1}{(\alpha-1)^p\lambda^p}E(\sup_{\tau\wedge\sigma\leqslant i\leqslant\tau}\|f_i-f_{\tau\wedge\sigma}\|^p)\\
&\leqslant \frac{p'^p}{(\alpha-1)^p\lambda^p}E(\|f_\tau-f_{\tau\wedge\sigma}\|^p\chi_{\{\sigma<\tau\}})\\
&\leqslant \frac{p'^p}{(\alpha-1)^p\lambda^p}E[E(\|f_\tau-f_{\tau\wedge\sigma}\|^p|B_{\tau\wedge\sigma})\chi_{\{\sigma<\tau\}}]\\
&\leqslant \frac{cp'^p}{(\alpha-1)^p\lambda^p}E\left[E\left(\sum_{i=\sigma\wedge\tau+1}^{\tau}\|\mathrm{d}f_i\|^p\middle|B_{\tau\wedge\sigma}\right)\chi_{\{\sigma<\tau\}}\right]\\
&\leqslant \frac{cp'^p\beta^p}{(\alpha-1)^p}P(\sigma<\infty),
\end{aligned}\tag{2.44}$$

这里 p' 是 p 的共轭数. 由此

$$\begin{aligned}
P(f^*>\alpha\lambda) &\leqslant P(f^*>\alpha\lambda,\tau=\infty)+P(\tau<\infty)\\
&\leqslant \frac{cp'^p\beta^p}{(\alpha-1)^p}P(\sigma<\infty)+P(\tau<\infty)\\
&\leqslant \frac{cdp'^p\beta^p}{(\alpha-1)^p}P(f^*>\lambda)+dP(S^{(p)}(f)>\beta\lambda).
\end{aligned}$$

设 $\varepsilon_{\alpha\beta}=cdp'^p\beta^p(\alpha-1)^{-p}$, 则对于固定的 $\alpha>1$, $\lim\limits_{\beta\to0}\varepsilon_{\alpha\beta}=0$, 上式即所要的好 λ 不等式. 仍由 6.1 节引理 4 推出 (2.41).

(ii)⇒(i). 假定 $E\Phi(S^{(p)}(f))<\infty$, 设 $\tilde f^{(n)}=(\tilde f_i^{(n)})$, 其中 $\tilde B_i=B_{i+n}, \tilde f_i^{(n)}=f_{i+n}-f_n, i\geqslant0$. 我们有

$$S^{(p)}(\tilde f^{(n)})^p=S^{(p)}(f)^p-S_n^{(p)}(f)^p,\quad \tilde f^{(n)^*}=\sup_{m\geqslant n}\|f_m-f_n\|.$$

由 (2.41),

$$E\Phi(\sup_{m\geqslant n}\|f_m-f_n\|)\leqslant cE\Phi((S^{(p)}(f)^p-S_n^{(p)}(f)^p)^{1/p}).$$

注意 $S^{(p)}(f)^p-S_n^{(p)}(f)^p\to0\ (n\to\infty)$, 由 Fatou 引理,

$$\lim_{n\to\infty}E\Phi(\sup_{m\geqslant n}\|f_m-f_n\|)\leqslant\lim_{n\to\infty}cE\Phi((S^{(p)}(f)^p-S_n^{(p)}(f)^p)^{1/p})=0.$$

于是 $\Phi(\sup\limits_{m\geqslant n}\|f_m-f_n\|)$ 依概率收敛于 0. 由 Φ 在 0 点的性状 $f_n\to0$ a.e..

对于满足 $\sum_{n=1}^{\infty}\|\mathrm{d}f_n\|^p \in L_\infty$ 的鞅, 上述证明得出 $f_n \to 0$ a.e., 所以 X 同构于 p 光滑空间.

注意对于上述两个定理, $\Phi(t) = t^a (0 < a < \infty)$ 满足所说条件, 特别是对于 $0 < a < 1$, 这给出以往没有出现过的新结论.

推论 2　设 $0 < a < \infty$, 则 X 同构于 Hilbert 空间当且仅当存在 $C = C_a > 0$, 使得任何 X 值正规鞅 f 满足

$$C^{-1}E(f^*)^a \leqslant ES^{(2)}(f)^a \leqslant CE(f^*)^a.$$

定理 10　设 $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty, X$ 是 Banach 空间, 则

(i) X 同构于 q 凸空间当且仅当对于任何 X 值正规鞅,

$$\{f^* < \infty\} \subset \{S^{(q)}(f) < \infty\} \text{ a.e.};$$

(ii) X 同构于 p 光滑空间当且仅当对于任何 X 值正规鞅,

$$\{S^{(p)}(f) < \infty\} \subset \{f_n \text{ 收敛}\}\text{a.e.};$$

(iii) X 同构于 Hilbert 空间当且仅当对于任何 X 值正规鞅,

$$\{S^{(2)}(f) < \infty\} = \{f^* < \infty\} = \{f_n \text{ 收敛}\} \text{ a.e.}.$$

证明　1° 为证 (i), 设 X 同构于 q 凸空间, $f = (f_n)$ 是正规鞅, $\forall \lambda > 0$, 存在停时 τ_λ 使得

$$\{f^* > \lambda\} \subset \{\tau_\lambda < \infty\}, \quad P(\tau_\lambda < \infty) \leqslant dP(f^* > \lambda), \quad f^*_{\tau_\lambda} \leqslant \lambda.$$

考虑 $f^{(\tau_\lambda)} = (f_{\tau_\lambda \wedge n})$, 由 $f^{(\tau_\lambda)^*} \leqslant \lambda$, $f^{(\tau_\lambda)}$ 一致有界从而 L_q 可积. 由 q 凸性,

$$ES^{(q)}_{\tau_\lambda}(f)^q = ES^{(q)}(f^{(\tau_\lambda)})^q \leqslant C_q^q \left\| f^{(\tau_\lambda)^*} \right\|^q \leqslant C_q^q \lambda^q < \infty,$$

于是 $S^{(q)}_{\tau_\lambda}(f) < \infty$ a.e., 即 $S^{(q)}(f)$ 在 $\{\tau_\lambda = \infty\}$ 上 a.e. 有限. 另一方面, 由 $P(\tau_\lambda < \infty) \leqslant dP(f^* > \lambda)$, 后一测度当 $\lambda \to \infty$ 时趋于 $P(f^* = \infty)$, 于是

$$\lim_{\lambda \to \infty} P(\tau_\lambda = \infty) = P(f^* < \infty),$$

得到 $\{f^* < \infty\} \subset \{S^{(q)}(f) < \infty\}$ a.e..

反过来, 考虑 WP 鞅, 若 $\{f^* < \infty\} \subset \{S^{(q)}(f) < \infty\}$ a.e. 都成立, 则由 6.2 节定理 1 可得到 X 同构于 q 凸空间.

(ii) 的证明与上面类似. 由以上两点和 Kwapien 定理,(iii) 成立.

6.3 鞅 空 间

设 $1\leqslant p<\infty,0<a\leqslant\infty$, 考虑由 X 值鞅 $f=(f_n)$ 构成的如下空间:

$$H_a=\{f\colon \|f\|_{H_a}=\|f^*\|_a<\infty\},$$

$$_pH_a^S=\{f\colon \|f\|_{_pH_a^S}=\left\|S^{(p)}(f)\right\|_a<\infty\},$$

$$_pH_a^\sigma=\{f\colon \|f\|_{_pH_a^\sigma}=\left\|\sigma^{(p)}(f)\right\|_a<\infty\},$$

$$_pK_a=\{f\colon \exists\gamma\in L_a,\gamma\geqslant 0,E(\|f_m-f_{n-1}\|^p\,|B_n)\leqslant E(\gamma^p\,|B_n),\forall m\geqslant n\},$$

$$_p\mathcal{K}_a=\{f\colon \exists\gamma\in L_a,\gamma\geqslant 0,E(\|f_m-f_n\|^p\,|B_n)\leqslant E(\gamma^p\,|B_n),\forall m\geqslant n\}.$$

对于 $_pK_a$ 和 $_p\mathcal{K}_a$, 以 $\inf\|\gamma\|_a$ 作为其中的范数, 下确界是对所有可能的 γ 而取的, 分别记为 $\|f\|_{_pK_a}$ 和 $\|f\|_{_p\mathcal{K}_a}$.

设 λ_n 是非负的单调增加适应序列, $\lambda_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$, $E\lambda_\infty\leqslant 1$, R 是这种序列 $\Lambda=(\lambda_n)$ 的全体. 若 $0<p\leqslant a\leqslant\infty$, $p\neq\infty$, 定义

$$_pL_a=\left\{f\colon \|f\|_{_pL_a}=\sup_{\Lambda\in R}\left(E\sum_{n=1}^\infty\lambda_n^{1-\frac{p}{a}}\|\mathrm{d}f_n\|^p\right)^{1/p}<\infty\right\},$$

$$_p\mathcal{L}_a=\left\{f\colon \|f\|_{_p\mathcal{L}_a}=\sup_{\Lambda\in R}\left(E\sum_{n=1}^\infty\lambda_{n-1}^{1-\frac{p}{a}}\|\mathrm{d}f_n\|^p\right)^{1/p}<\infty\right\},$$

在此情况假定 $\lambda_0=0$. 标准的验证表明以上空间都是 Banach 空间. $_pK_\infty$ 即是空间 BMO_p, $_p\mathcal{K}_\infty$ 即是 BMO_p^+.

引理 1 假设 $2\leqslant q<\infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 凸空间;

(ii) 存在 $c=c_q>0$, 使每个 X 值 q 可积鞅 $f=(f_n)$ 满足

$$E\left(\sum_{i=n+1}^m\|\mathrm{d}f_i\|^q\,|B_n\right)\leqslant cE(\|f_m-f_n\|^q\,|B_n),\quad m\geqslant m,\tag{3.1}$$

并且 (或者)

$$E\left(\sum_{i=n}^m\|\mathrm{d}f_i\|^q\,|B_n\right)\leqslant cE(\|f_m-f_{n-1}\|^q\,|B_n),\quad m\geqslant n.\tag{3.2}$$

证明 若 X 同构于 q 凸空间, 对于 $f=(f_n)$ 应用 Assouad 定理, 则

$$cE(\|f_{n+1}\|^q - \|f_n\|^q \,|\varSigma_n) \geqslant E(\|\mathrm{d}f_{n+1}\|^q \,|\varSigma_n), \tag{3.3}$$

把相应的项加起来再关于 B_n 取条件期望, 即得到 (3.1) 和 (3.2).

反过来, 若每个 q 可积鞅满足 (3.1) 或 (3.2), 由 m, n 的任意性, 取期望得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} E\,\|\mathrm{d}f_i\|^q \leqslant c2^q \sup_n E\,\|f_n\|^q. \tag{3.4}$$

这说明 X 同构于 q 凸空间.

类似地可以证明

引理 2 假设 $1 < p \leqslant 2$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) 存在 $c = c_p > 0$, 使每个 X 值 p 可积鞅 $f = (f_n)$ 满足

$$E(\|f_m - f_n\|^p \,|B_n) \leqslant cE\left(\sum_{i=n+1}^{m} \|\mathrm{d}f_i\|^p |B_n\right), \quad m \geqslant n, \tag{3.5}$$

并且 (或者)

$$E(\|f_m - f_{n-1}\|^p \,|B_n) \leqslant cE\left(\sum_{i=n}^{m} \|\mathrm{d}f_i\|^p \,|B_n\right), \quad m \geqslant n. \tag{3.6}$$

让我们首先考察空间 ${}_pH_a^S$ 与 ${}_pK_a$, ${}_pH_a^\sigma$ 与 ${}_p\mathcal{K}_a$ 的关系.

定理 1 设 $2 \leqslant q \leqslant a < \infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 凸空间;

(ii) ${}_qK_a \subset {}_qH_a^S$ 并且存在 $c = c_{qa} > 0$ 使得

$$\|f\|_{{}_qH_a^S} \leqslant c\,\|f\|_{{}_qK_a}, \quad \forall f \in_q K_a; \tag{3.7}$$

(iii) ${}_q\mathcal{K}_a \subset {}_qH_a^\sigma$ 并且存在 $c = c_{qa} > 0$ 使得

$$\|f\|_{{}_qH_a^\sigma} \leqslant c\,\|f\|_{{}_q\mathcal{K}_a}, \quad \forall f \in_q \mathcal{K}_a. \tag{3.8}$$

证明 设 X 同构于 q 凸空间, $f \in_q K_a$, 则有 $\gamma \geqslant 0$, $\gamma \in L_a$ 使得

$$E(\|f_m - f_{n-1}\|^q \,|B_n) \leqslant E(\gamma^q \,|B_n), \quad \forall\, 0 \leqslant n \leqslant m, \tag{3.9}$$

由 (3.2), 存在 $c > 0$ 使得

$$E\left(\sum_{i=n}^{m} \|\mathrm{d}f_i\|^q \,|B_n\right) \leqslant cE\left(\|f_m - f_{n-1}\|^q \,|B_n\right) \leqslant cE(\gamma^q \,|B_n),$$

所以

$$E\left(\sum_{i=n}^{\infty}\|\mathrm{d}f_i\|^q\,|B_n\right)\leqslant cE(\gamma^q\,|B_n).\tag{3.10}$$

现在若 $q=a$, 在 (3.10) 中取 $n=1$, 则 $E\sum_{i=n}^{\infty}\|\mathrm{d}f_i\|^q\leqslant cE\gamma^q$ 或者 $\left\|S^{(q)}(f)\right\|_q\leqslant c'\|\gamma\|_q$, 右端关于 γ 取下确界即得到 (3.7). 若 $q<a$, 对于 $\alpha>0$, $\lambda>0$, 定义

$$\tau_1=\inf\{n\colon S_n^{(q)}(f)>\alpha\lambda\},$$
$$\tau_2=\inf\{n\colon S_n^{(q)}(f)>(\alpha+1)\lambda\},$$

则 $\tau_1\leqslant\tau_2$, $\{\tau_1<\infty\}\in B_{\tau_1}\subset B_{\tau_2}$ 并且

$$\begin{aligned}\{S^{(q)}(f)>(\alpha+1)\lambda\}&=\{\tau_2<\infty\}\\&\subset\{\tau_1<\infty,S_{\tau_2}^{(q)}(f)^q-S_{\tau_1-1}^{(q)}(f)^q>(\alpha+1)^q\lambda^q-\alpha^q\lambda^q\}\\&=\left\{\tau_1<\infty,\sum_{i=\tau_1}^{\tau_2}\|\mathrm{d}f_i\|^q>A^q\lambda^q\right\},\end{aligned}\tag{3.11}$$

这里 $A^q=(\alpha+1)^q-\alpha^q$. 由 (6.1), (3.11) 得到

$$\begin{aligned}P(S^{(q)}(f)>(\alpha+1)\lambda)&\leqslant\frac{1}{A^q\lambda^q}\int_{\{\tau_1<\infty\}}\sum_{i=\tau_1}^{\tau_2}\|\mathrm{d}f_i\|^q\,\mathrm{d}P\\&\leqslant\frac{1}{A^q\lambda^q}\int_{\{\tau_1<\infty\}}E\left(\sum_{i=\tau_1}^{\tau_2}\|\mathrm{d}f_i\|^q\,|B_{\tau_1}\right)\mathrm{d}P\\&\leqslant\frac{C}{A^q\lambda^q}\int_{\{S^{(q)}(f)>\alpha\lambda\}}\gamma^q\mathrm{d}P,\end{aligned}\tag{3.12}$$

于是

$$\begin{aligned}\left\|S^{(q)}(f)\right\|_a^a&=(\alpha+1)^a\int_0^{\infty}P(S^{(q)}(f)>(\alpha+1)\lambda)\mathrm{d}\lambda^a\\&\leqslant\frac{c(\alpha+1)^a}{A^q}\int_0^{\infty}\lambda^{-q}\mathrm{d}\lambda^a\int_{\{S^{(q)}(f)>\alpha\lambda\}}\gamma^q\mathrm{d}P\\&\leqslant\frac{ca(\alpha+1)^a}{A^q}\int_{\Omega}\gamma^q\mathrm{d}P\int_0^{S^{(q)}(f)/\alpha}\lambda^{a-q-1}\mathrm{d}\lambda\\&\leqslant\frac{ca(\alpha+1)^a}{(a-q)A^q\alpha^{a-q}}\int_{\Omega}\gamma^qS^{(q)}(f)^{a-q}\mathrm{d}P\\&\leqslant c'^q\|\gamma\|_a^q\left\|S^{(q)}(f)\right\|_a^{a-q},\end{aligned}\tag{3.13}$$

从而 $\left\|S^{(q)}(f)\right\|_a \leqslant c' \|\gamma\|_a$，其中 c' 仅与 q,a 有关 (可取 $\alpha=1$). 故 (3.7) 成立.

为证 (3.8)，可利用 ${}_q\mathcal{K}_a$ 的定义和 (3.1)，当 $q=a$ 时，(3.8) 为显然. 当 $q<a$ 时，仿照上面证明定义 τ_1,τ_2，不过将 $S_n^{(q)}(f)$ 换为 $\sigma_{n+1}^{(q)}(f)$，类似的论证得到 (3.8).

反过来，若 (3.7) 或 (3.8) 成立并且 f 一致有界，则 $f \in_q K_a \cap_q \mathcal{K}_a$，此时由 (3.7) 或 (3.8) 分别得出

$$\left\|S^{(q)}(f)\right\|_a \leqslant c\|f\|_{{}_qK_a} \leqslant 2c\|f^*\|_\infty < \infty,$$

$$\left\|S^{(q)}(f)\right\|_q = \left\|\sigma^{(q)}(f)\right\|_q \leqslant \left\|\sigma^{(q)}(f)\right\|_a \leqslant c\|f\|_{{}_q\mathcal{K}_a} \leqslant 2c\|f^*\|_\infty < \infty.$$

总之有 $S^{(q)}(f)<\infty$ a.e.，所以 X 同构于 q 凸空间.

定理 2　设 $1<p\leqslant 2,\ p\leqslant a<\infty$，则以下条件等价：

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) ${}_pH_a^S \subset_p K_a$ 并且存在 $c=c_{pa}>0$，使得

$$\|f\|_{{}_pK_a} \leqslant c\|f\|_{{}_pH_a^S}, \quad \forall f \in {}_pH_a^S; \tag{3.14}$$

(iii) ${}_pH_a^\sigma \subset_p \mathcal{K}_a$ 并且存在 $c=c_{pa}>0$，使得

$$\|f\|_{{}_p\mathcal{K}_a} \leqslant c\|f\|_{{}_pH_a^\sigma}, \quad \forall f \in {}_pH_a^\sigma. \tag{3.15}$$

证明　假设 X 同构于 p 光滑空间，$f \in_p H_a^S$，应用 (3.6)，则

$$E(\|f_m-f_{n-1}\|^p\,|B_n) \leqslant cE\left(\sum_{i=n}^m \|\mathrm{d}f_i\|^p\,|B_n\right) \leqslant cE(S^{(p)}(f)^p\,|B_n)$$

$(0\leqslant n\leqslant m)$. 于是 $\|f\|_{{}_pK_a} \leqslant c'\left\|S^{(p)}(f)\right\|_a = c'\|f\|_{{}_pH_a^S}$，故(3.14) 成立. 为证 (3.15)，设 $\sigma^{(p)}(f)\in L_a$，应用 (3.5) 得出

$$\begin{aligned}E(\|f_m-f_n\|^p\,|B_n) &\leqslant cE\left(\sum_{i=n+1}^m \|\mathrm{d}f_i\|^p\,|B_n\right)\\ &\leqslant cE\left(\sum_{i=n+1}^m E(\|\mathrm{d}f_i\|^p\,|B_{i-1})\,|B_n\right) \leqslant cE(\sigma^{(p)}(f)^p\,|B_n),\end{aligned}$$

从而 $\|f\|_{{}_pK_a} \leqslant c'\left\|\sigma^{(p)}(f)\right\|_a = c'\|f\|_{{}_pH_a^\sigma}$.

反过来，假定 (3.14) 成立并且 $f \in {}_pH_a^S$，由 ${}_pK_a$ 的定义，$\forall\varepsilon>0,\ \exists\gamma\geqslant 0, \gamma\in L_a$ 使得

$$E(\|f_m-f_{n-1}\|^p\,|B_n) \leqslant E(\gamma^p\,|B_n), \quad \|\gamma\|_a \leqslant \|f\|_{{}_pK_a}+\varepsilon,$$

取期望得到

$$E\|f_m - f_{n-1}\|^p \leqslant E\gamma^p \leqslant (c\|f\|_{{}_pH_a^S} + \varepsilon)^p = (c\left\|S^{(p)}(f)\right\|_a + \varepsilon)^p.$$

以 $\tilde{f} = (\tilde{f}_i)$ 代替 $f = (f_n)$, 其中 $\tilde{f}_i = f_{n+1+i} - f_{n-1} (i \geqslant 0)$, 可得

$$E\|f_m - f_{n-1}\|^p \leqslant \left(c\left\|\left(\sum_{i=n}^{\infty}\|\mathrm{d}f_i\|^p\right)^{1/p}\right\|_a + \varepsilon\right)^p.$$

当 $n \to \infty$ 时右端趋于零, Fatou 引理说明 f_n L_p 收敛, 从而 a.e. 收敛.

若 (3.15) 成立并且 $f \in_p H_a^\sigma$, 同样可以证明 f_n a.e. 收敛. 由以往使用过的方法可以知道 X 同构于 p 光滑空间.

对于 ${}_pK_a$ 与 ${}_pL_a$ 以及 ${}_p\mathcal{K}_a$ 与 ${}_p\mathcal{L}_a$, 首先我们有

定理 3 若 $0 < p \leqslant a < \infty$, 则

(i) ${}_pH_a^S \sim_p L_a$, 此时对于每个鞅 $f = (f_n)$ $(f_0 = 0)$,

$$\left(\frac{p}{a}\right)^{1/p}\|f\|_{{}_pH_a^S} \leqslant \|f\|_{{}_pL_a} \leqslant \|f\|_{{}_pH_a^S}; \tag{3.16}$$

(ii) ${}_pH_a^\sigma \sim_p \mathcal{L}_a$, 此时对于每个鞅 $f = (f_n)$ $(f_0 = 0)$,

$$\left(\frac{p}{a}\right)^{1/p}\|f\|_{{}_pH_a^\sigma} \leqslant \|f\|_{{}_p\mathcal{L}_a} \leqslant \|f\|_{{}_pH_a^\sigma}. \tag{3.17}$$

证明 这里仅证 (i), 类似地可证明 (ii).

设 $f = (f_n) \in_p H_a^S$, 对于任何 $\Lambda = (\lambda_n) \in R$, 有

$$\begin{aligned} E\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{1-\frac{p}{a}}\|\mathrm{d}f_n\|^p &\leqslant E\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_\infty^{1-\frac{p}{a}}\|\mathrm{d}f_n\|^p = E\lambda_\infty^{1-\frac{p}{a}}S^{(p)}(f)^p \\ &\leqslant (E\lambda_\infty)^{1-\frac{p}{a}}\left\|S^{(p)}(f)\right\|_a^p \leqslant \left\|S^{(p)}(f)\right\|_a^p. \end{aligned}$$

故 (3.16) 右端成立.

为证左端, 注意若每个有限鞅 (停止于某个 n) 满足左端, 则 ${}_pL_a$ 中的每个 f 也满足. 现在假定 $f \in_p L_a$ 是有限鞅, $\forall \Lambda = (\lambda_n) \in R$, 显然 $E\sum\lambda_n^{1-\frac{p}{a}}\|\mathrm{d}f_n\|^p \leqslant \|f\|_{{}_pL_a}^p <$ ∞. 由 Λ 的任意性和 $E\lambda_n \leqslant 1$, 换句话说 $E\lambda_n^{(1-\frac{p}{a})(1-\frac{p}{a})^{-1}} \leqslant 1$, p/a 是 $(1-p/a)^{-1}$ 的共轭数, 故 $\|\mathrm{d}f_n\| \in L_a$ 并且 $\left\|S^{(p)}(f)\right\|_a < \infty$. 不失一般性, 假定 $\left\|S^{(p)}(f)\right\|_a = 1$, 若 $\bar{\lambda}_n = S_n^{(p)}(f)^a$, 则 $\bar{\Lambda} = (\bar{\lambda}_n) \in R$. 注意对于 $\alpha \leqslant 1 \leqslant \rho, \alpha(\rho-1)\rho^{\alpha-1} \leqslant \rho^\alpha - 1$, 取 $\alpha = p/a, \quad \rho = S_n^{(p)}(f)^a/S_{n-1}^{(p)}(f)^a$, 得到

$$\begin{aligned} 1 &= ES^{(p)}(f)^a = E\sum_n(S_n^{(p)}(f)^a - S_{n-1}^{(p)}(f)^a) \\ &\leqslant \frac{a}{p}E\sum_n(S_n^{(p)}(f)^p - S_{n-1}^{(p)}(f)^p)S_n^{(p)}(f)^{a-p} \\ &= \frac{a}{p}E\sum_n\bar{\lambda}_n^{1-\frac{p}{a}}\|\mathrm{d}f_n\|^p \leqslant \frac{a}{p}\|f\|_{{}_pL_a}^p, \end{aligned}$$

从而 $\|f\|_{pH_a^S}^p \leqslant ap^{-1}\|f\|_{pL_a}^p$, 此即 (3.16) 左端.

将此定理与定理 1, 2 合起来又得到

推论 1　设 $2 \leqslant q \leqslant a < \infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 凸空间;

(ii) ${}_qK_a \subset_q L_a$ 并且存在 $c = c_{qa} > 0$ 使得

$$\|f\|_q L_a \leqslant c\|f\|_{qK_a}, \quad \forall\, f \in_q K_a\ (f_0 = 0); \tag{3.18}$$

(iii) ${}_q\mathcal{K}_a \subset_q \mathcal{L}_a$ 并且存在 $c = c_{qa} > 0$ 使得

$$\|f\|_{q\mathcal{L}_a} \leqslant c\|f\|_{q\mathcal{K}_a}, \quad \forall\, f \in {}_q\mathcal{K}_a\ (f_0 = 0). \tag{3.19}$$

推论 2　设 $1 < p \leqslant 2$, $p \leqslant a < \infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) ${}_pL_a \subset_p K_a$ 并且存在 $c = c_{pa} > 0$ 使得

$$\|f\|_{pK_a} \leqslant c\|f\|_p L_a, \quad \forall\, f \in {}_pL_a\ (f_0 = 0); \tag{3.20}$$

(iii) ${}_p\mathcal{L}_a \subset_p \mathcal{K}_a$ 并且存在 $c = c_{pa} > 0$ 使得

$$\|f\|_{p\mathcal{K}_a} \leqslant c\|f\|\ {}_p\mathcal{L}_a, \quad \forall\, f \in {}_p\mathcal{L}_a\ (f_0 = 0). \tag{3.21}$$

同样地, 为了得到 H_a 与 ${}_pL_a$, ${}_p\mathcal{L}_a$ 的关系, 我们有

定理 4　设 $1 < p \leqslant a < \infty$, 则

(i) $H_a \sim_p K_a$, 此时存在 $c = c_{pa} > 0$, 使得对于每个鞅 $f = (f_n)$,

$$c^{-1}\|f\|_{H_a} \leqslant \|f\|_{pK_a} \leqslant c\|f\|_{H_a}; \tag{3.22}$$

(ii) $H_a \sim_p \mathcal{K}_a$, 此时有 $c = c_{pa} > 0$, 使得对于每个鞅 $f = (f_n)$,

$$c^{-1}\|f\|_{H_a} \leqslant \|f\|_{p\mathcal{K}_a} \leqslant c\|f\|_{H_a}. \tag{3.23}$$

证明　为证 (i), 设 $f^* \in L_a$, 显然,

$$E(\|f_m - f_{n-1}\|^p\,|B_n) \leqslant E((2f^*)^p\,|B_n), \quad 0 \leqslant n \leqslant m,$$

由此知道

$$\|f\|_{pK_a} = \inf_{\gamma}\|\gamma\|_a \leqslant 2\|f^*\|_a,$$

这说明 $H_a \subset_p K_a$ 并且 (3.22) 右端成立.

另一方面, 若 $f \in_p K_a$ 并且 $\gamma \geqslant 0, \gamma \in L_a$, 使得

$$E(\|f_m - f_{n-1}\|^p | B_n) \leqslant E(\gamma^p | B_n), \quad 0 \leqslant n \leqslant m,$$

则

$$E((\|f_m\| - \|f_{n-1}\|)^p | B_n) \leqslant E(\gamma^p | B_n), \quad 0 \leqslant n \leqslant m, \tag{3.24}$$

从而 $E\|f_n\|^p \leqslant E\gamma^p < \infty, (f_n)$ 是一致可积的. 若 $p = a$, 由 Doob 不等式,

$$\|f^*\|_p \leqslant p' \sup_n \|f_n\|_p \leqslant p' \|\gamma\|_p ,$$

所以 (3.22) 左端成立. 若 $p < a$, 由于 $(\|f_n\|)$ 是实值下鞅, 故存在实值可积函数 h_∞, 使得 $\|f_n\| \to h_\infty$ a.e., 同时在 L_p 中收敛. 从 (3.24) 推出

$$\sup_{0 \leqslant n < \infty} E(|h_\infty - \|f_{n-1}\| |^p | B_n) \leqslant E(\gamma^p | B_n). \tag{3.25}$$

对于 $\alpha > 0, \lambda > 0$, 定义

$$\tau_1 = \inf\{n: \|f_n\| > \alpha\lambda\}, \quad \tau_2 = \inf\{n: \|f_n\| > (\alpha+1)\lambda\},$$

则 $\tau_1 \leqslant \tau_2, \{\tau_1 < \infty\} \in B_{\tau_1} \subset B_{\tau_2}$ 并且

$$\{f^* > (\alpha+1)\lambda\} = \{\tau_2 < \infty\} \subset \{\tau_1 < \infty, \|f_{\tau_2}\| - \|f_{\tau_{-1}}\| \geqslant \lambda\}. \tag{3.26}$$

由此得出

$$\begin{aligned} P\{f^* > (\alpha+1)\lambda\} &\leqslant \frac{1}{\lambda^p} \int_{\{\tau_1 < \infty\}} (\|f_{\tau_2}\| - \|f_{\tau_1 - 1}\|)^p \mathrm{d}P \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda^p} \int_{\{\tau_1 < \infty\}} E(|h_\infty - \|f_{\tau_1 - 1}\| |^p | B_{\tau_1}) \mathrm{d}P \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda^p} \int_{\{f^* > \alpha\lambda\}} \gamma^p \mathrm{d}P, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \|f^*\|_a^a &= (\alpha+1)^a \int_0^\infty P(f^* > (\alpha+1)\lambda) \mathrm{d}\lambda^a \\ &\leqslant (\alpha+1)^a \int_0^\infty \lambda^{-p} d\lambda^a \int_{\{f^* > \alpha\lambda\}} \gamma^p \mathrm{d}P \\ &\leqslant \frac{a(\alpha+1)^a}{(a-p)a^{a-p}} \int_\Omega \gamma^p (f^*)^{a-p} \mathrm{d}P \\ &\leqslant \frac{a(\alpha+1)^a}{(a-p)\alpha^{a-p}} \|\gamma\|_a^p \|f^*\|_a^{a-p} . \end{aligned} \tag{3.27}$$

最后得出 $\|f^*\|_a \leqslant c\|\gamma\|_a$, 其中 c(如取 $\alpha = a$) 是仅与 a,p 有关的常数, 于是 (3.22) 左端成立.

(3.23) 右端是显然的. 对于左端, 注意 ${}_pK_a \subset {}_p\mathcal{K}_a$ 并且对于每个 $f \in {}_pK_a$, $\|f\|_{{}_pK_a} \leqslant 2\|f\|_{{}_p\mathcal{K}_a}$, 故 (3.23) 从 (3.22) 得出.

推论 3　设 $2 \leqslant q < a < \infty$, 则以下条件等价:

(i)X 同构于 q 凸空间;

(ii)$H_a \subset_q L_a$ 并且存在 $c = c_{qa} > 0$, 使得

$$\|f\|_{{}_qL_a} \leqslant c\|f\|_{H_a}, \quad \forall f \in H_a(f_0 = 0); \tag{3.28}$$

(iii)$H_a \subset_q \mathcal{L}_a$ 并且存在 $c = c_{qa} > 0$, 使得

$$\|f\|_{{}_q\mathcal{L}_a} \leqslant c\|f\|_{H_a}, \quad \forall f \in H_a(f_0 = 0). \tag{3.29}$$

推论 4　设 $1 < p \leqslant 2, p \leqslant a < \infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) ${}_pL_a \subset H_a$ 并且存在 $c = c_{pa} > 0$, 使得

$$\|f\|_{H_a} \leqslant c\|f\|_{{}_pL_a}, \quad \forall f \in {}_pL_a(f_0 = 0); \tag{3.30}$$

(iii) ${}_p\mathcal{L}_a \subset H_a$ 并且存在 $c = c_{pa} > 0$, 使得

$$\|f\|_{H_a} \leqslant c\|f\|_{{}_p\mathcal{L}_a}, \quad \forall f \in {}_p\mathcal{L}_a(f_0 = 0). \tag{3.31}$$

由定理 1, 2 和定理 4 又可得到

推论 5　设 $2 \leqslant q \leqslant a < \infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 凸空间;

(ii) $H_a \subset {}_qH_a^S$ 并且存在 $c = c_{qa} > 0$, 使得

$$\|f\|_{{}_qH_a^S} \leqslant c\|f\|_{H_a}, \quad \forall f \in H_a; \tag{3.32}$$

(iii) $H_a \subset_q H_a^\sigma$ 并且存在 $c = c_{qa} > 0$, 使得

$$\|f\|_{{}_qH_a^\sigma} \leqslant c\|f\|_{H_a}, \quad \forall f \in H_a. \tag{3.33}$$

推论 6　设 $1 < p \leqslant 2,\ p \leqslant a < \infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) ${}_pH_a^S \subset H_a$ 并且存在 $c = c_{pa} > 0$, 使得

$$\|f\|_{H_a} \leqslant c\|f\|_{{}_pH_a^S}, \quad \forall f \in {}_pH_a^S; \tag{3.34}$$

(iii) ${}_pH_a^\sigma \subset H_a$ 并且存在 $c = c_{pa} > 0$, 使得

$$\|f\|_{H_a} \leqslant c\|f\|_{{}_pH_a^\sigma}, \quad \forall\, f \in {}_pH_a^\sigma. \tag{3.35}$$

根据 Kwapien 定理又可得到下面推论.

推论 7 设 $2 \leqslant a < \infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间;

(ii) ${}_2H_a^S \sim {}_2K_a$;

(iii) ${}_2K_a \sim {}_2L_a$;

(iv) $H_a \sim {}_2L_a$;

(v) $H_a \sim {}_2H_a^S$.

此外, 分别以 ${}_2H_a^\sigma$, ${}_2\mathcal{K}_a$, ${}_2\mathcal{L}_a$, 代替 ${}_2H_a^S$, ${}_2K_a$, ${}_2L_a$, 上述论断仍成立.

让我们转到各种 Orlicz 类型鞅空间. 首先, 对于 $1 \leqslant p < \infty$, 记

$${}^pL^\Phi = \{\varphi\text{: } \varphi\text{可测并且}\|\varphi\|_{{}^pL^\Phi} = \||\varphi|^p\|_\Phi^{1/p} < \infty\},$$

$$R_\Phi^p = \{\Lambda = (\lambda_n)\text{: } (\lambda_n)\text{是非负增加适应序列}, E\Psi(\lambda_\infty^p) \leqslant 1\}.$$

定义 B 值鞅空间:

$$H = \{f = (f_n)\text{: } \|f\|_H = \|\varphi\|_{{}^pL^\Phi} < \infty\},$$

$$H = {}_pH_\Phi^s, \text{若}\varphi = S^{(p)}(f);\ \ H = {}_pH_\Phi^\sigma, \text{若}\varphi = \sigma^{(p)}(f).$$

$$K = \{f = (f_n)\text{: } \exists\, \gamma \geqslant 0, \gamma \in {}^pL^\Phi, E(\|f_m - \theta_n\|^p\,|B_n)$$
$$\leqslant E(\gamma^p\,|B_n),\ \forall m \geqslant n\},$$
$$\|f\|_k = \inf_\gamma \|\gamma\|_{pL^\Phi}.$$

$$K = {}_pK_\Phi, \text{若 } \theta_n = f_{n-1};\quad K = {}_p\mathcal{K}_\Phi, \text{若 } \theta_n = f_n.$$

$$L = \left\{f = (f_n)\text{: } \|f\|_L = \sup_{\Lambda \in R_\Phi^p}\left(E\sum_{n=1}^\infty \theta_n^p\|\mathrm{d}f_n\|^p\right)^{1/p} < \infty\right\}.$$

$$L = {}_pL_\Phi, \text{若 } \theta_n = \lambda_n;\quad L = {}_p\mathcal{L}_\Phi, \text{若 } \theta_n = \lambda_{n-1}(\lambda_0 = 0).$$

定理 5 设 $2 \leqslant q < \infty$, Φ 满足 $1 < q_\Phi \leqslant p_\Phi < \infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 凸空间;

(ii) ${}_qK_\Phi \subset {}_qH_\Phi^S$ 并且存在 $c = c_{q\Phi} > 0$, 使得

$$\|f\|_{qH_\Phi^S} \leqslant c\|f\|_{qK_\Phi}, \quad \forall f \in {}_qK_\Phi; \tag{3.36}$$

(iii) ${}_qK_\Phi \subset {}_qL_\Phi$ 且存在 $c = c_{q\Phi} > 0$, 使得

$$\|f\|_{{}_qL_\Phi} < c\|f\|_{{}_qK_\Phi}, \quad \forall f \in {}_qK_\Phi \ (f_0 = 0). \tag{3.37}$$

此外, 分别以 ${}_qH_\Phi^\sigma$, ${}_q\mathcal{K}_\Phi$, ${}_q\mathcal{L}_\Phi$ 代替 ${}_qH_\Phi^S$, ${}_qK_\Phi$, ${}_qL_\Phi$, 以上论断仍成立.

证明　在 6.1 节引理 3 中以 $\lambda^q, S^{(q)}(f)^q, cL^{-q}\gamma^q$ 代替 λ, ξ, η, 若 X 同构于 q 凸空间, 借助于 (3.12) 和 Φ 的限制增长性得出 $\left\|S^{(q)}(f)^q\right\|_\Phi \leqslant c\|\gamma^q\|_\Phi$. 故 (3.36) 成立.

为了证明 (3.37), 注意 ${}_qK_\Phi \subset_q L_\Phi$, 对于 $f \in_q K_\Phi$, 存在满足 (3.10) 的 $\gamma \geqslant 0$, $\gamma \in^q L^\Phi$, 从而

$$\begin{aligned}
\|f\|_{{}_qL_\Phi}^q &= \sup_{\Lambda \in R_\Phi^q} E\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^q \|\mathrm{d}f_n\|^q \\
&= \sup_{\Lambda \in R_\Phi^q} E\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^n (\lambda_j^q - \lambda_{j-1}^q)\|\mathrm{d}f_n\|^q \\
&= \sup_{\Lambda \in R_\Phi^q} E\sum_{j=1}^\infty (\lambda_j^q - \lambda_{j-1}^q) E\left(\sum_{n=j}^\infty \|\mathrm{d}f_n\|^q |B_{j-1}\right) \\
&\leqslant c \sup_{\Lambda \in R_\Phi^q} E\lambda_\infty^q \gamma^q \\
&\leqslant c \sup_{\Lambda \in R_\Phi^q} \max(E\Psi(\lambda_\infty^q), 1)\|\gamma^q\|_\Phi = c\|\gamma^q\|_\Phi.
\end{aligned}$$

于是 (3.37) 成立.

反过来, 若 (3.36) 成立, 由 6.2 节定理 1 得到 X 同构于 q 凸空间. 若 (3.37) 成立并且 $f = (f_n)$ 是一致有界鞅, 在 (3.37) 中取 λ_n 恒为常数 c, 则有 $\left\|S^{(q)}(f)^q\right\|_\Phi < \infty$, 所以 $S^{(q)}(f) < \infty$ a.e., 仍由 6.2 节定理 1 得出所要的结论. 定理的最后论断用类似方法得出.

定理 6　设 $1 < p \leqslant 2$, 函数 Φ 满足 $1 < q_\Phi \leqslant p_\Phi < \infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) ${}_pH_\Phi^S \subset_p K_\Phi$ 并且存在 $c = c_{p\Phi} > 0$, 使得

$$\|f\|_{{}_pK_\Phi} \leqslant c\|f\|_{{}_pH_\Phi^S}, \quad \forall f \in_p H_\Phi^S; \tag{3.38}$$

(iii) ${}_pL_\Phi \subset_p K_\Phi$ 并且存在 $c = c_{p\Phi} > 0$, 使得

$$\|f\|_{{}_pK_\Phi} \leqslant c\|f\|_{{}_pL_\Phi}, \quad \forall f \in_p L_\Phi \ (f_0 = 0). \tag{3.39}$$

此外, 以 ${}_pH_\Phi^\sigma$, ${}_p\mathcal{K}_\Phi$, ${}_p\mathcal{L}_\Phi$ 代替 ${}_pH_\Phi^S$, ${}_pK_\Phi$, ${}_pL_\Phi$, 论断仍成立.

证明　设 X 同构于 p 光滑空间, $f \in_p H_\Phi^S$, 显然 ${}_pH_\Phi^S \subset_p K_\Phi$, 从定理 2 证明知道

$$\|f\|_{{}_pK_\Phi} \leqslant \left\|cS^{(p)}(f)^p\right\|_\Phi^{1/p} \leqslant c\|f\|_{{}_pH_\Phi^S}.$$

此即 (3.38).

为证 (3.39), 不失一般性假设 $\|f\|_{pL_\Phi}=1$, 即

$$\sup_{\Lambda\in R_\Phi^p} E\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^p \|\mathrm{d}f_n\|^p \leqslant 1, \tag{3.40}$$

对于 $f=(f_n)$ 和 $m>0$, 定义

$$g_n^p = E(\|f_m - f_n\|^p \,|B_n)\,,\quad F_n=\{\omega\colon g_{n-1}^{*p} < g_n^p = g_m^{*p}\}, \tag{3.41}$$

则 $\Omega=\bigcup\limits_{n=1}^\infty F_n$. 若 $\gamma\geqslant 0, E\Psi(\gamma)\leqslant 1$, 定义 $\lambda_n^p = E(\gamma\chi_{\bigcup_{i=1}^n F_i}\,|B_n)\leqslant 1(\lambda_0=0)$, 则 $E\Psi(\lambda_\infty^p)=E\Psi(\gamma)\leqslant 1, \Lambda=(\lambda_n)\in R_\Phi^p$, 现在借助于 (3.41), (3.42), 由 X 的 p 光滑性

$$\begin{aligned}
Eg_m^{*p}\gamma &= E\sum_{j=1}^m E(g_j^p\gamma\chi_{F_j}\,|B_j)\\
&= E\sum_{j=1}^m E(g_j^p E(\gamma_j^p - \lambda_{j-1}^p\,|B_j))\\
&= E\sum_{j=1}^m (\lambda_j^p - \lambda_{j-1}^p)E(\|f_m - f_{j-1}\|^p\,|B_j)\\
&\leqslant cE\sum_{j=1}^m (\lambda_j^p - \lambda_{j-1}^p)E(\sum_{n=j}^m \|\mathrm{d}f_n\|^p\,|B_j)\\
&= cE\sum_{j=1}^m \lambda_n^p \|\mathrm{d}f_n\|^p \leqslant c.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

从而 $\|g_m^{*p}\|_\Phi = \sup\limits_{E\Psi(\gamma)\leqslant 1} Eg_m^{*p}\gamma\leqslant c$. 令 $m\to\infty$, 由 (3.41) 得出

$$\|f\|_{pK_\Phi}\leqslant \|g_n^p\|_\Phi^{1/p}\leqslant c\,\|f\|_{pL_\Phi}=c,$$

于是 (3.39) 成立.

反过来, X 的 p 光滑性可以像定理 2 那样从 (3.38) 得到. 当 (3.39) 成立时, 类似的方法得出 X 的 p 光滑性.

这里没有涉及关于 BMO 鞅空间的情况. 实际上应用 BMO_p 与 ${}_aH_p^S$、BMO_p^+ 与 ${}_aH_p^\sigma$ 的相互连续嵌入关系同样能给出空间 X 的凸性和光滑性的刻画. 这里我们仅指出一点, 即 B 值的 BMO 鞅像实值情况一样成立

$$E(\exp\alpha\sup_{n\geqslant 1}\|f_n - f_1\|\;\;|B_1)\leqslant K_\alpha<\infty,$$

这里 $\|f\|_{\mathrm{BMO}_1} \leqslant 1$, $0 < \alpha < \mathrm{e}^{-1}$, 证明方法也与实值情况类似. 于是任何指标的 $\mathrm{BMO}_\alpha (q \leqslant a < \infty)$ 相互等价, 下标可以略去记为 BMO.

6.4 鞅空间上若干算子的有界性

我们考虑 B 值鞅空间上的如下算子:

1° 平削算子: 对于鞅 $f=(f_n)$, 令

$$f_{pn}^{\#} = \sup_{m \geqslant n} [E(\|f_m - f_{n-1}\|^p | B_n)]^{1/p}, \quad f_p^{\#} = \sup_{n \geqslant 1} f_{pn}^{\#}.$$

$$\tilde{f}_{pn}^{\#} = \sup_{m \geqslant n} [E(\|f_m - f_n\|^p | B_n)]^{1/p}, \quad \tilde{f}_p^{\#} = \sup_{n \geqslant 1} \tilde{f}_{pn}^{\#}.$$

2° 变差算子: 设 (n_k) 是单调增加的自然数序列, 令

$$W_p^{(n_k)}(f) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|^p \right)^{1/p},$$

$$\tilde{W}_p^{(n_k)}(f) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} E(\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|^p | B_{n_k}) \right)^{1/p}.$$

对于限制增长的 Young 函数 Φ, 令

$$\|W_p(f)^p\|_{\Phi}^{1/p} = \sup_{(n_k)} \left\| W_p^{(n_k)}(f)^p \right\|_{\Phi}^{1/p},$$

$$\left\| \tilde{W}_p(f)^p \right\|_{\Phi}^{1/p} = \sup_{(n_k)} \left\| \tilde{W}_p^{(n_k)}(f)^p \right\|_{\Phi}^{1/p}.$$

其中 sup 是关于所有这样的自然数序列 (n_k) 而取的.

3° 鞅变换算子: 设 (γ_n) 是非负单调增加适应 R.V. 序列, $\gamma_\infty = \lim_{n\to\infty} \gamma_n$, $E\gamma_\infty^p < \infty$, Γ_p 是如此的序列 $\gamma = (\gamma_n)$ 全体. 对于每个 $\gamma \in \Gamma_p$, 在鞅空间 BMO_p^+ 上定义

$$T_\gamma(f) = g, \quad g_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i-1} \mathrm{d}f_i, \quad \forall f = (f_n) \in \mathrm{BMO}_p^+. \tag{4.1}$$

定理 1　设 $2 \leqslant q < \infty$, Φ 是限制增长的 Young 函数, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 凸空间;

(ii) 存在 $c = c_{q\Phi} > 0$, 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$\left\| S^{(q)}(f)^q \right\|_{\Phi}^{1/q} \leqslant c \left\| f_q^{\# q} \right\|_{\Phi}^{1/q}; \tag{4.2}$$

(iii) 存在 $c = c_{q\Phi} > 0$, 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$\left\|\sigma^{(q)}(f)^q\right\|_{\Phi}^{1/q} \leqslant c\left\|\tilde{f}_q^{\#q}\right\|_{\Phi}^{1/q}. \tag{4.3}$$

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 对于 $f = (f_n)$ 和 $\alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0$, 定义

$$\tau = \inf\{n\colon S_n^{(q)}(f)^q > (1+\alpha)\lambda\},$$
$$\theta = \inf\{n\colon S_n^{(q)}(f)^q > \alpha\lambda\},$$
$$\mu = \inf\{n\colon f_{qn}^{\#q} > \beta\lambda\}.$$

τ, θ, μ 均为停时, $\theta \leqslant \tau$. 明显地,

$$P(\tau < \infty) \leqslant P(\tau < \infty, \theta < \mu) + P(\mu < \infty), \tag{4.4}$$

其中

$$\begin{aligned}
P(\tau < \infty, \theta < \mu) &\leqslant P(\theta < \mu, S_\tau^{(q)}(f)^q - S_{\theta-1}^{(q)}(f)^q > \lambda) \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} (S_\tau^{(q)}(f)^q - S_{\theta-1}^{(q)}(f)^q)\mathrm{d}P \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} E\left(\sum_{i=\theta}^{\tau}\|\mathrm{d}f_i\|^q|B_\theta\right)\mathrm{d}P \\
&\leqslant \frac{c}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} E(\|f_\tau - f_{\theta-1}\|^q|B_\theta)\mathrm{d}P \\
&\leqslant \frac{c}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} f_{q\theta}^{\#q}\mathrm{d}P \leqslant c\beta P(\theta < \infty),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

中间应用了 X 的 q 凸性. 从而由 (4.4), (4.5) 得出

$$P(S^{(q)}(f)^q > (1+\alpha)\lambda) \leqslant c\beta P(S^{(q)}(f)^q > \alpha\lambda) + P(f_q^{\#q} > \beta\lambda).$$

此即关于 $(S^{(q)}(f)^q, f_q^{\#q})$ 的好 λ 不等式. 当 β 足够小时, 存在 $c > 0$ 使得 (4.2) 成立.

(i)$\Rightarrow$(iii). 证明与上面类似, 这一次定义

$$\tau = \inf\{n\colon \sigma_{n+1}^{(q)}(f)^q > (1+\alpha)\lambda\},$$

$$\theta = \inf\{n\colon \sigma_{n+1}^{(q)}(f)^q > \alpha\lambda\},$$

$$\mu = \inf\{n\colon \tilde{f}_{qn}^{\#q}(f)^q > \beta\lambda\}.$$

此时有

$$\begin{aligned}
P(\tau < \infty, \theta < \mu) &\leqslant P(\theta < \mu, \sigma_{\tau+1}^{(q)}(f)^q - \sigma_\theta^{(q)}(f)^q > \lambda) \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} E(\sigma_{\tau+1}^{(q)}(f)^q - \sigma_\theta^{(q)}(f)^q|B_\theta)\mathrm{d}P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} E\left(\sum_{i=\theta+1}^{\tau+1}\|\mathrm{d}f_i\|^q\,|B_\theta\right)\mathrm{d}P\\&\leqslant \frac{c}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} E(\|f_{\tau+1}-f_\theta\|^q\,|B_\theta)\mathrm{d}P\\&\leqslant \frac{c}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} \tilde f_q^{\#q}\mathrm{d}P\leqslant c\beta P(\theta<\infty).\end{aligned}\tag{4.6}$$

中间用到 X 的 q 凸性. 于是

$$\begin{aligned}P(\sigma^{(q)}(f)^q>(1+\alpha)\lambda)&=P(\tau<\infty)\\&\leqslant P(\tau<\infty,\theta<\mu)+P(\mu<\infty)\\&\leqslant c\beta P(\sigma^{(q)}(f)^q>\alpha\lambda)+P(\tilde f_q^{\#q}>\beta\lambda).\end{aligned}$$

这是关于 $(\sigma^{(q)}(f)^q,\tilde f_q^{\#q})$ 的好 λ 不等式, 类似的道理得出 (4.3).

(ii)⇒(i) 和 (iii) ⇒ (i). 设 $f=(f_n)$ 是满足 $\|f\|_\infty<\infty$ 的 WP 鞅, 则 (4.2) 给出

$$\left\|S^{(q)}(f)^q\right\|_\Phi^{1/q}\leqslant c\left\|f_q^{\#q}\right\|_\Phi^{1/q}\leqslant c\Phi(\|f\|_\infty^q)^{1/q}<\infty,$$

于是 $S^{(q)}(f)<\infty$ a.e., 所以 X 同构于 q 凸空间. 类似地, (4.3) 给出

$$\left\|\sigma^{(q)}(f)^q\right\|_\Phi^{1/q}\leqslant c\left\|\tilde f_q^{\#q}\right\|_\Phi^{1/q}\leqslant c\Phi(\|f\|_\infty^q)^{1/q}<\infty,$$

于是 $\sigma^{(q)}(f)<\infty$ a.e., 但对于 WP 鞅 $\sigma^{(q)}(f)=S^{(q)}(f)$, 所以结论成立.

定理 2 设 $1<p\leqslant 2$, Φ 是限制增长的严格凸函数, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) 存在 $c=c_{p\Phi}>0$, 使得对于每个 X 值鞅 f,

$$\left\|f_p^{\#p}\right\|_\Phi^{1/p}\leqslant c\left\|S^{(p)}(f)^p\right\|_\Phi^{1/p};\tag{4.7}$$

(iii) 存在 $c=c_{p\Phi}>0$, 使得对于每个 X 值鞅 f,

$$\left\|\tilde f_p^{\#p}\right\|_\Phi^{1/p}\leqslant c\left\|\sigma^{(p)}(f)^p\right\|_\Phi^{1/p}.\tag{4.8}$$

证明 (i) ⇒ (ii). 由 p 光滑性, 对于任何 X 值 L_p 有界鞅 f 有

$$\begin{aligned}f_p^{\#p}&=\sup_n\sup_{m\geqslant n}E(\|f_m-f_{n-1}\|^p\,|B_n)\\&\leqslant c\sup_n E\left(\sum_{i=n}^{\infty}\|\mathrm{d}f_i\|^p\,|B_n\right)\leqslant c\sup_n E(S^{(p)}(f)^p\,|B_n).\end{aligned}$$

由 $q_\Phi > 1$ 和 6.1 节推论 4,

$$\left\|f_p^{\#p}\right\|_\Phi \leqslant c\left\|\sup_n E(S^{(p)}(f)^p\,|B_n)\right\|_\Phi$$
$$\leqslant c'\sup_n\left\|E(S^{(p)}(f)^p\,|B_n)\right\|_\Phi \leqslant c\left\|S^{(p)}(f)^p\right\|_\Phi.$$

所以 (4.7) 成立.

(i) $\Rightarrow$ (iii). 类似地,

$$\begin{aligned}\tilde{f}_p^{\#p} &= \sup_n\sup_{m\geqslant n} E(\|f_m - f_{n-1}\|^p\,|B_n)\\ &\leqslant c\sup_n E\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\|\mathrm{d}f_i\|^p\,|B_n\right)\\ &\leqslant c\sup_n E(\sigma^{(p)}(f)^p\,|B_n),\end{aligned}$$

并且最后推出 (4.8).

(ii)$\Rightarrow$(i) 和 (iii)$\Rightarrow$(i). 设 f 是 X 值 WP 鞅, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p}\|\mathrm{d}f_n\|^p \in L_\infty$, 令 $\tilde{f}^{(n)} = (\tilde{f}_i^{(n)})$, $\mathrm{d}\tilde{f}_i^{(n)} = i^{-1}\mathrm{d}f_i$, $i \geqslant n$, 此时 $S^{(p)}(\tilde{f}^{(n)})^p = \sum\limits_{i=n}^{\infty} i^{-p}\|\mathrm{d}f_i\|^p \to 0(n\to\infty)$. 由 Fatou 引理和 (4.7) 知道, $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\tilde{f}_p^{(n)\#p}\right\|_\Phi = 0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} E\Phi(\tilde{f}_p^{(n)\#p}) = 0$. 若 Ψ 是 Φ 的余函数, 则

$$E\left\|\tilde{f}_m^{(n)} - \tilde{f}_i^{(n)}\right\|^p \leqslant E\tilde{f}_p^{(n)\#p} \leqslant \Psi(1)E\Phi(\tilde{f}_p^{(n)\#p}) \to 0(n\to\infty).$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}\mathrm{d}f_n$ 以 L_p 范数收敛从而 a.e. 收敛, 由 Kronecker 引理得出 $n^{-1}f_n$ a.e. 收敛. 故 X 同构于 p 光滑空间.

推论 1 设 Φ 是限制增长的 Young 函数, $q_\Phi > 1$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间;

(ii) 存在 $c = c_\Phi > 0$ 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$c^{-1}\left\|f_2^{\#2}\right\|_\Phi^{1/2} \leqslant \left\|S^{(2)}(f)^2\right\|_\Phi^{1/2} \leqslant c\left\|f_2^{\#2}\right\|_\Phi^{1/2}; \tag{4.9}$$

(iii) 存在 $c = c_\Phi > 0$ 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$c^{-1}\left\|\tilde{f}_2^{\#2}\right\|_\Phi^{1/2} \leqslant \left\|\sigma^{(2)}(f)^2\right\|_\Phi^{1/2} \leqslant c\left\|\tilde{f}_2^{\#2}\right\|_\Phi^{1/2}. \tag{4.10}$$

定理 3 设 $1 < p \leqslant 2$, Φ 是限制增长的 Young 函数, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) 存在 $c=c_{p\Phi}>0$, 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$c^{-1}\left\|S^{(p)}(f)^p\right\|_{\Phi}^{1/p}\leqslant\|W_p(f)^p\|_{\Phi}^{1/p}\leqslant c\left\|S^{(p)}(f)^p\right\|_{\Phi}^{1/p}; \tag{4.11}$$

(iii) 存在 $c=c_{p\Phi}>0$, 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$\|f^{*p}\|_{\Phi}^{1/p}\leqslant c\|W_p(f)^p\|_{\Phi}^{1/p}. \tag{4.12}$$

证明 (i)$\Rightarrow$ (ii). 对于序列 (n_k), $(f_{n_k},k\geqslant 0)$ 仍是鞅, 由 p 光滑性,

$$\begin{aligned}E(W_p^{(n_k)}(f)^p\,|B_0)&=E\left(\sum_{k=0}^{\infty}\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|^p\,|B_{n_k})\,|B_0\right)\\&=cE\left(\sum_{k=0}^{\infty}E\bigg(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}\|\mathrm{d}f_i\|^p|B_{n_k}\bigg)\Big|B_0\right)\\&=cE(S^{(p)}(f)^p\,|B_0),\end{aligned} \tag{4.13}$$

用 $g=(g_i,i\geqslant n_{k_0})=(f_i-f_{n_{k_0}},i\geqslant n_{k_0})$ 代替 $f=(f_n)$, 上式变为

$$\begin{aligned}E(W_p^{(n_k)}(f)^p-W_{pn_{k_0}-1}^{(n_k)}(f)^p\left|B_{n_{k_0}}\right.)&=E(W_p^{(n_k)}(g)^p\left|B_{n_{k_0}}\right.)\\&\leqslant cE(S^{(p)}(g)^p\left|B_{n_{k_0}}\right.)\leqslant cE(S^{(p)}(f)^p\left|B_{n_{k_0}}\right.).\end{aligned}$$

令 $A_i=W_{pn_i}^{(n_k)}(f)^p$, $B=S^{(p)}(f)^p$, 则上式可改写为

$$E(A_\infty-A_{k_0-1}\big|\tilde{B}_{k_0})\leqslant E(cB\big|\tilde{B}_{k_0})\quad(\tilde{B}_{k_0}=B_{nk_0}).$$

于是由 6.1 节推论 1,

$$E\Phi(W_p^{(n_k)}(f)^p)\leqslant cE\Phi(S^{(p)}(f)^p),$$

并且

$$\left\|W_p^{(n_k)}(f)^p\right\|_{\Phi}\leqslant c\left\|S^{(p)}(f)^p\right\|_{\Phi}.$$

(n_k) 是任意的, c 与 (n_k) 的选取无关, 故 (4.11) 右端成立. 至于左端, 只须取 $n_k=k$(即 (n_k) 是整个自然数序列) 即得出.

(i)$\Rightarrow$(iii). 由 6.3 节推论 9 和 (4.11) 左端得出 (4.12).

应用与定理 2 证明中类似的方法可得出 (ii)$\Rightarrow$ (i) 和 (iii) $\Rightarrow$ (i).

下面推论的证明方法与定理 3 类似, 这里略去.

推论 2 设 $1<p\leqslant 2$, Φ 是限制增长的 Young 函数, 则下列条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) 存在 $c=c_{p\Phi}>0$, 使得对于每个 X 值鞅 f,

$$c^{-1}\left\|\sigma^{(p)}(f)^p\right\|_{\Phi}^{1/p}\leqslant\left\|\tilde{W}_p(f)^p\right\|_{\Phi}^{1/p}\leqslant c\left\|\sigma^{(p)}(f)^p\right\|_{\Phi}^{1/p}; \tag{4.14}$$

(iii) 存在 $c=c_{p\Phi}>0$, 使得对于每个 X 值鞅 f,

$$\left\|f^{*p}\right\|_{\Phi}^{1/p}\leqslant c\left\|\tilde{W}_p(f)^p\right\|_{\Phi}^{1/p}. \tag{4.15}$$

定理 4 设 $2\leqslant q<\infty$, Φ 是限制增长的 Young 函数, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 凸空间;

(ii) 存在 $c=c_{q\Phi}>0$, 使得对于每个 X 值鞅 f,

$$\left\|W_q(f)^q\right\|_{\Phi}^{1/q}\leqslant c\left\|f^{*q}\right\|_{\Phi}^{1/q}; \tag{4.16}$$

(iii) 存在 $c=c_{q\Phi}>0$, 使得对于每个 X 值鞅 f,

$$\left\|\tilde{W}_q(f)^q\right\|_{\Phi}^{1/q}\leqslant c\left\|f^{*q}\right\|_{\Phi}^{1/q}. \tag{4.17}$$

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 对于序列 (n_k), 由 q 一致凸性,

$$E\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left\|f_{n_k+1}-f_{n_k}\right\|^q\middle|B_0\right)\leqslant c\sup_k E(\|f_{n_k}\|^q\,|B_0)\leqslant cE(f^{*q}\,|B_0). \tag{4.18}$$

将 $f=(f_n)$ 换为 $g=(g_i,i\geqslant n_{k_0})=(f_i-f_{n_{k_0}-1},i\geqslant n_{k_0})$, 上式变为

$$E(W_q^{(n_k)}(f)^q-W_{qn_{k_0}-1}^{(n_k)}(f)^q\,|B_{n_{k_0}})\leqslant CE(f^{*q}\,|B_{n_{k_0}}),$$

以 $A_i=W_{qk_i}^{(n_k)}(f)^q, B=f^{*q}$, 上面不等式即

$$E(A_\infty-A_{k_{0-1}}\big|\tilde{B}_{k_0})\leqslant cE(B\big|\tilde{B}_{k_0}),$$

6.1 节推论 1 给出

$$E\Phi(W_q^{(n_k)}(f)^q)\leqslant cE\Phi(f^{*q}),$$

最后可得到不等式 (4.16).

(ii)$\Rightarrow$(iii). 由 Garsia 不等式 (6.1 节推论 2) 可知

$$E\Phi(\tilde{W}_q^{(n_k)}(f)^q)\leqslant cE\Phi(W_q^{(n_k)}(f)^q), \tag{4.19}$$

于是 (4.17) 由 (4.16) 推出.

(iii)⇒ (i). 这里的证明如同定理 1 的 (iii)⇒ (i).

推论 3 设 Φ 是限制增长的 Young 函数, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间;

(ii) 存在 $c=c_\Phi>0$, 使得对于每个 X 值鞅 f 满足

$$c^{-1}\left\|f^{*2}\right\|_\Phi^{1/2}\leqslant\left\|W_2(f)^2\right\|_\Phi^{1/2}\leqslant c\left\|f^{*2}\right\|_\Phi^{1/2}; \tag{4.20}$$

(iii) 存在 $c=c_\Phi>0$, 使得对于每个 X 值鞅 f 满足

$$c^{-1}\left\|f^{*2}\right\|_\Phi^{1/2}\leqslant\left\|\tilde{W}_2(f)^2\right\|_\Phi^{1/2}\leqslant c\left\|f^{*2}\right\|_\Phi^{1/2}. \tag{4.21}$$

最后考虑算子 T_γ. 为了方便, $\forall\gamma=(\gamma_n)\in\Gamma_p$, 记 $\|\gamma\|_{\Gamma_p}=\|\gamma_\infty\|_p$. 注意这并不是一个范数, 因为 Γ_p 不是线性空间. 此外我们将 ${}_qH_q^\sigma$ 简记为 H_q^σ. 对于 BMO_p^+, 在 6.3 节开头已定义过, 实际上等价地,

$$\mathrm{BMO}_p^+=\{f=(f_n):\ \exists\beta,\ \sup_{1\leqslant n\leqslant m<\infty}\|E(\|f_m-f_n\|^p\,|B_n)\|_\infty^{1/p}\leqslant\beta<\infty\},$$

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_p^+}=\inf\beta.$$

定理 5 设 $2\leqslant q<\infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 凸空间;

(ii) $\Gamma_q\times\mathrm{BMO}_q^+\subset H_q^\sigma$ 并且存在 $c=c_q>0$, 使得

$$\|g\|_{H_q^\sigma}\leqslant c\|\gamma\|_{\Gamma_q}\|f\|_{\mathrm{BMO}_q^+}, \tag{4.22}$$

其中 f,g,γ 如 (4.1).

证明 (i)⇒ (ii). 若 $f\in\mathrm{BMO}_q^+$, 则存在 $\beta\geqslant0$ 使得

$$E(\|f_m-f_n\|^q\,|B_n)\leqslant\beta,\quad\forall\, m\geqslant n\geqslant0\,.$$

对于 $\gamma=(\gamma_n)\in\Gamma_q$, 记 $\gamma_{i-1}^q=\sum_{j=0}^{i-1}\varphi_j(i=1,2,\cdots)$, 则

$$\begin{aligned}E\sigma^{(q)}(g)^q&=E\sum_{i=1}^\infty\gamma_{i-1}^qE(\|\mathrm{d}f_i\|^q\,|B_{i-1})\\&=E\sum_{i=1}^\infty\gamma_{i-1}^q\|\mathrm{d}f_i\|^q=\sum_{j=0}^\infty E\Big(\varphi_jE\Big(\sum_{i=j+1}^\infty\|\mathrm{d}f_i\|^q\,|B_j\Big)\Big).\end{aligned} \tag{4.23}$$

X 同构于 q 凸空间, 由 6.3 节中引理 1,

$$E\sigma^{(q)}(g)^q\leqslant c\sum_{j=0}^\infty E\varphi_j\beta=cE\gamma_\infty^q\beta,$$

从而上式变为

$$\|g\|_{H_q^\sigma} \leqslant c^{\frac{1}{q}}(E\gamma_\infty^q)\beta^{1/q} = c^{1/q}\|\gamma\|_{\gamma_q}\|f\|_{\mathrm{BMO}_q^+},$$

(ii) 成立.

(ii)⇒(i). 若 (4.22) 对于每个 $f \in \mathrm{BMO}_q^+, \gamma \in \Gamma_q$ 及相应的变换 g 成立, 特别地, 取 $\gamma_n \equiv 1$, 则 $g_n \equiv f_n (n \geqslant 1)$, (2.22) 变为

$$\|f\|_{H_q^\sigma} \leqslant c\|f\|_{\mathrm{BMO}_q^+}.$$

显然每个一致有界鞅属于 BMO_q^+, 并且此时 $\|f\|_{\mathrm{BMO}_q^+} \leqslant 2\|f\|_\infty < \infty$, 于是 $\|f\|_{H_q^\sigma} < \infty$. 由于 $E\|(\mathrm{d}f)^*\|^q < \infty$, 故 $S^{(q)}(f) < \infty$ a.e., 6.2 节定理 1 保证了 X 同构于 q 凸空间.

定理 6 设 $1 < p \leqslant 2$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) $H_p^\sigma \subset \Gamma_p \times \mathrm{BMO}_p^+$ 并且存在 $c = c_p > 0$, 使得

$$\|\gamma\|_{\Gamma_p}\|f\|_{\mathrm{BMO}_p^+} \leqslant c\|g\|_{H_p^\sigma}. \tag{4.24}$$

特别地, 可以取 f, g 使得 $\|f\|_{\mathrm{BMO}_p^+} \leqslant c$, $\|\gamma\|_{\Gamma_p} \leqslant c'\|g\|_{H_p^\sigma}$.

证明 (i) ⇒ (ii). 设 $g \in H_p^\sigma$, 则 $\sigma^{(p)}(g) \in L_p$, 令 $f_n = \sum_{i=1}^n \gamma_{i-1}^{-1}\mathrm{d}g_i$, 其中 $\gamma_i = \sup_{j\leqslant i} E(\sigma^{(p)}(g)|B_j)$, 则 γ_i 非负单调增加, 由 Doob 不等式

$$E\gamma_\infty^p \leqslant (c')^p E\sigma^{(p)}(g)^p < \infty,$$

于是 $\gamma = (\gamma_n) \in \Gamma_p$,

$$\|\gamma\|_{\Gamma_p} \leqslant c'\left\|\sigma^{(p)}(g)\right\|_p = c'\|g\|_{H_p^\sigma}.$$

现在考虑 $f = (f_n)$. 由 X 的 p 光滑性, 根据 6.2 节引理 2, 当 $m \geqslant n$ 时,

$$\begin{aligned} E(\|f_m - f_n\|^p|B_n) &\leqslant cE\left(\sum_{i=n+1}^m \|\mathrm{d}f_i\|^p|B_n\right) \\ &\leqslant cE\left(\sum_{i=n+1}^m \gamma_{i-1}^{-p}\|\mathrm{d}g_i\|^p|B_n\right) \\ &\leqslant cE\left(\sum_{i=n+1}^m \frac{\sigma_i^{(p)}(g)^p - \sigma_{i-1}^{(p)}(g)^p}{\gamma_{i-1}^p}\Bigg|B_n\right), \end{aligned} \tag{4.25}$$

但由于

$$1 \leqslant E(\sigma^{(p)}(g)\,|B_{i-1})E\left(\frac{1}{\sigma^{(p)}(g)}\bigg|B_{i-1}\right) \leqslant \gamma_{i-1}E\left(\frac{1}{\sigma^{(p)}(g)}\bigg|B_{i-1}\right),$$

$$\frac{1}{\gamma_{i-1}^p} \leqslant E\left(\frac{1}{\sigma^{(p)}(g)}\bigg|B_{i-1}\right).$$

(4.25) 变为

$$E(\|f_m - f_n\|^p\,|B_n) \leqslant cE\left(\sum_{i=n+1}^{m}\frac{\sigma_i^{(p)}(g)^p - \sigma_{i-1}^{(p)}(g)^p}{\sigma^{(p)}(g)^p}\bigg|B_n\right)$$

$$\leqslant cE\left(\frac{\sigma_m^{(p)}(g)^p - \sigma_n^{(p)}(g)^p}{\sigma^{(p)}(g)^p}\bigg|B_n\right) \leqslant c.$$

故 $f \in \mathrm{BMO}_p^+$ 并且 $\|f\|_{\mathrm{BMO}_p^+} \leqslant c^{\frac{1}{p}}$. 由于 $g_n = \sum_{i=1}^{n}\gamma_{i-1}\mathrm{d}f_i$, 所以 (ii) 成立.

(ii)⇒ (i). 当 (ii) 成立时, 若 $g \in H_p^\sigma$, 则有 $\gamma \in \Gamma_p, f \in \mathrm{BMO}_p^+$, 使得 $g_n = \sum_{i=1}^{n}\gamma_{i-1}\mathrm{d}f_i$ 并且 $\|\gamma\|_{\Gamma_p} \leqslant c'\|g\|_{H_p^\sigma}, \|f\|_{\mathrm{BMO}_p^+} \leqslant c$. 此时对于 f 有

$$E(\|f_m - f_i\|\,|B_i) \leqslant (E(\|f_m - f_i\|^a\,|B_i))^{\frac{1}{a}} \leqslant c, \quad m \geqslant i \geqslant 0.$$

对于 $g = (g_n)$ 有

$$g_m - g_n = \sum_{i=n+1}^{m}\gamma_{i-1}df_i = \sum_{i=n+1}^{m-1}(\gamma_i - \gamma_{i-1})(\gamma_m - \gamma_i) + \gamma_n(\gamma_m - \gamma_n),$$

$$\begin{aligned}E\big\|g_m - g_n\big\| \leqslant & \sum_{i=n+1}^{m-1}E[(\gamma_i - \gamma_{i-1})E(\|f_m - f_i\|\,|B_i)] \\ & + E[\gamma_n E(\big\|f_m - f_n\big\|\,|B_n)] \\ \leqslant & cE\left(\sum_{i=n+1}^{m-1}(\gamma_i - \gamma_{i-1}) + \gamma_n\right) \leqslant cc'\|g\|_{H_a^\sigma}.\end{aligned} \tag{4.26}$$

将 g 换为 $\tilde{g} = (\tilde{g}_i)$, 其中 $\tilde{g}_i = g_{i+n} - g_n(i \geqslant 1)$, 由 (4.26), 应用 Fatou 引理可得出 g_nL_1 收敛, 从而 a.e. 收敛. 当 g 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}E\|\mathrm{d}g_n\|^p < \infty$ 时, 令 $F_n = \sum_{i=1}^{n}i^{-1}\mathrm{d}g_i$, 以上讨论说明 F_n a.e. 收敛, 由 Kronecker 引理得出 $g_n/n \to 0$ a.e., 于是 X 同构于 p 光滑空间.

推论 4 对于 Banach 空间 X, 以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间;

(ii) $H_2^g \sim \Gamma_2 \times \mathrm{BMO}_2^+$.

6.5 上下函数与微分从属

本节将用鞅不等式给出 Hilbert 空间的另一些特征.

对于鞅 $f=(f_n)$, 定义

$$M_n^{(p)}(f)=S_n^{(p)}(f)\vee f_n^*,\quad M^{(p)}(f)=\sup_{n\geqslant 1}M_n^{(p)}(f),$$
$$m_n^{(p)}(f)=S_n^{(p)}(f)\wedge f_n^*,\quad m^{(p)}(f)=\sup_{n\geqslant 1}m_n^{(p)}(f).$$

称 $M^{(p)}(f)$ 和 $m^{(p)}(f)$ 分别是 f 的上、下函数.

引理 1 设 $2\leqslant q<\infty$, X 同构于 q 凸空间, 则存在 $c>0$, 使得对于任何鞅 f, 当 $f^*\in L_q$ 时

$$E(S^{(q)}(f)\,|B_0)\leqslant cE\,(f^*\,|B_0\,). \tag{5.1}$$

证明 只需将已有的不等式 "条件化". 实际上 $\forall A\in B_0, \tilde{f}=(f_n\chi_A)$ 仍是鞅, 由 q 凸性, $ES^{(q)}(\tilde{f})\leqslant c_qE\tilde{f}^*$, 或者

$$\int_A S^{(q)}(f)\mathrm{d}P\leqslant c_q\int_A f^*\mathrm{d}P.$$

A 是任意的, 从而 (5.1) 成立.

同样地, 下面引理成立.

引理 2 设 $1<p\leqslant 2$, X 同构于 p 光滑空间, 则存在 $c>0$, 使得对于任何鞅 f, 当 $S^{(p)}(f)\in L_p$ 时

$$E(f^*\,|B_0\,)\leqslant cE(S^{(p)}(f)\,|B_0\,). \tag{5.2}$$

定理 1 设 $1<p\leqslant 2\leqslant q<\infty$,

(i) 若 X 是 q 凸的, 则 $\exists c>0$, 使得

$$ES^{(q)}(f)^2\leqslant cEf^*S^{(q)}(f),\quad \forall f=(f_n); \tag{5.3}$$

(ii) 若 X 是 p 光滑的, 则 $\exists c>0$, 使得

$$Ef^{*2}\leqslant cEf^*S^{(p)}(f),\quad \forall f=(f_n). \tag{5.4}$$

证明 将 (5.1) 用于从 n 开始的鞅容易得到

$$E(S^{(q)}(f)-S_{n-1}^{(q)}(f)|B_n)\leqslant cE(f^*|B_n),\quad n\geqslant 1, \tag{5.5}$$

从而对于任何停时 τ,

$$E(S^{(q)}(f) - S^{(q)}_{\tau-1}(f)\,|B_\tau) \leqslant cE(f^*\,|B_\tau). \tag{5.6}$$

$\forall\lambda > 0$, 取 $\tau = \inf\{n : S^{(q)}_n(f) > \lambda\}$, 则 $S^{(q)}_{\tau-1}(f) \leqslant \lambda$, 故

$$\begin{aligned}\int_{\{S^{(q)}(f)>\lambda\}} (S^{(q)}(f) - \lambda)\mathrm{d}P &\leqslant \int_{\{\tau<\infty\}} (S^{(q)}(f) - S^{(q)}_{\tau-1}(f))\mathrm{d}P \\ &\leqslant c\int_{\{\tau<\infty\}} f^*\mathrm{d}P.\end{aligned} \tag{5.7}$$

对两端积分分别得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \int_{\{S^{(q)}(f)>\lambda\}} (S^{(q)}(f) - \lambda)\mathrm{d}P &= \int_\Omega \mathrm{d}P \int_0^{S^{(q)}(f)} (S^{(q)}(f) - \lambda)\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2}ES^{(q)}(f)^2,\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \int_{\{S^{(q)}(f)>\lambda\}} f^*\mathrm{d}P = \int_\Omega f^*\mathrm{d}P \int_0^{S^{(q)}(f)} \mathrm{d}\lambda = Ef^*S^{(q)}(f).$$

所以 (5.3) 成立. (5.4) 的证明与之类似, 只需将 (5.2) 用于从 n 开始的鞅得出

$$E(f^* - f^*_{n-1}\,|B_n) \leqslant cE(S^{(p)}(f)\,|B_n), \quad n \geqslant 1. \tag{5.8}$$

定理 2　X 同构于 Hilbert 空间, 当且仅当存在 $c > 0$, 使得每个鞅 f 满足

$$EM^{(2)}(f)^2 \leqslant cEm^{(2)}(f)^2. \tag{5.9}$$

证明　设 X 同构于 Hilbert 空间, X 是 2 光滑和 2 凸的, 由 (5.3), (5.4),

$$\begin{aligned}EM^{(2)}(f)^2 &\leqslant E(f^{*2} + S^{(2)}(f)^2) \leqslant cEf^*S^{(2)}(f) \\ &= cE(M^{(2)}(f)m^{(2)}(f)) \\ &\leqslant c(EM^{(2)}(f)^2)^{1/2}(Em^{(2)}(f)^2)^{1/2},\end{aligned}$$

由此得到 (5.9). 反之, (5.9) 意味着

$$ES^{(2)}(f)^2 \leqslant EM^{(2)}(f)^2 \leqslant cEm^{(2)}(f)^2 \leqslant cE(f^*)^2,$$

$$E(f^*)^2 \leqslant EM^{(2)}(f)^2 \leqslant cEm^{(2)}(f)^2 \leqslant cES^{(2)}(f)^2.$$

两式分别蕴涵着 X 同构于 2 凸和 2 光滑空间, 从而 X 同构于 Hilbert 空间.

定理 3 设 X 同构于 Hilbert 空间, $f=(f_n)$ 是 X 值鞅, 并且存在单调增加适应过程 (d_n), 使得 $\|\mathrm{d}f_n\|\leqslant d_{n-1}$, 则存在 $c>0$ 使得

$$EM^{(2)}(f)\leqslant cE(m^{(2)}(f)+d^*). \tag{5.10}$$

证明 记 $\rho_n=m_n^{(2)}(f)+d_n$. 对于 $\lambda>0$, 定义 $\tau=\inf\{n:\rho_n>\lambda\}$, 考虑停止鞅 $f^{(\tau)}$, 则

$$\begin{aligned}P(M^{(2)}(f)>\lambda)&\leqslant P(\tau<\infty)+P(\tau=\infty,M^{(2)}(f)>\lambda)\\&\leqslant P(\tau<\infty)+P(M^{(2)}(f^{(\tau)})>\lambda)\\&\leqslant P(\tau<\infty)+\lambda^{-2}EM^{(2)}(f^{(\tau)})^2\\&\leqslant P(\tau<\infty)+c\lambda^{-2}Em^{(2)}(f^{(\tau)})^2.\end{aligned} \tag{5.11}$$

由于 ρ_n 的递增性质, 当 $\tau<\infty$ 时,

$$\begin{aligned}m^{(2)}(f^{(\tau)})&=\min\{f_\tau^*,S_\tau^{(2)}(f)\}\\&\leqslant\min\{f_{\tau-1}^*+\|\mathrm{d}f_\tau\|,S_{\tau-1}^{(2)}(f)+\|\mathrm{d}f_\tau\|\}\\&\leqslant m_{\tau-1}^{(2)}(f)+d_{\tau-1}=\rho_{\tau-1}\leqslant\lambda,\end{aligned}$$

从而

$$Em^{(2)}(f^{(\tau)})^2\leqslant E(m^{(2)}(f)\chi_{\{\tau=\infty\}}+\lambda\chi_{\{\tau<\infty\}})^2.$$

(5.11) 变为

$$P(M^{(2)}(f)>\lambda)\leqslant cP(\tau<\infty)+c\lambda^{-2}Em^{(2)}(f)^2\chi_{\{\tau=\infty\}}. \tag{5.12}$$

注意 $\{\tau=\infty\}\subset\{\rho^*\leqslant\lambda\}\subset\{m^{(2)}(f)\leqslant\lambda\}$, 所以

$$\begin{aligned}EM^{(2)}(f)&=\int_0^\infty P(M^{(2)}(f)>\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&\leqslant c\int_0^\infty P(\tau<\infty)\mathrm{d}\lambda+c\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}\int_{\{m^{(2)}(f)<\lambda\}}m^{(2)}(f)^2\mathrm{d}P\\&\leqslant c\int_0^\infty P\left(m^{(2)}(f)>\frac{\lambda}{2}\right)\mathrm{d}\lambda+c\int_0^\infty P\left(d^*>\frac{\lambda}{2}\right)\mathrm{d}\lambda\\&\quad+c\int_\Omega m^{(2)}(f)^2\mathrm{d}P\int_{m^{(2)}(f)}^\infty\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}\\&\leqslant cE(m^{(2)}(f)+d^*).\end{aligned}$$

此即 (5.10).

定理 4　设 Φ 是限制增长的 Young 函数, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间;

(ii) 存在 $C=C_\Phi>0$, 使得每个 X 值鞅 $f=(f_n)$ 满足

$$E\Phi(M^{(2)}(f))\leqslant CE\Phi(m^{(2)}(f));\tag{5.13}$$

(iii) 存在 $C=C_\Phi>0$, 使得每个 X 值鞅 $f=(f_n)$ 满足

$$\left\|M^{(2)}(f)\right\|_\Phi\leqslant C\left\|m^{(2)}(f)\right\|_\Phi.\tag{5.14}$$

证明　(i)⇒(ii). 容易将 (5.10) 条件化, 即在定理 3 条件下,

$$E(M^{(2)}(f)\,|B_0)\leqslant CE(m^{(2)}(f)+d^*\,|B_0)\,.\tag{5.15}$$

对于任何 $n\geqslant 1$, 考虑鞅 $\tilde f=(\tilde f_i)=(f_i-f_{n-1}), i\geqslant n$, 若 $\|\mathrm{d}f_n\|\leqslant d_{n-1}, n\geqslant 1$, 则 $\left\|\mathrm{d}\tilde f_i\right\|\leqslant d_{i-1}$, 于是

$$\begin{aligned}M^{(2)}(f)-M^{(2)}_{n-1}(f)&=\max\{f^*,S^{(2)}(f)\}-\max\{f^*_{n-1},S^{(2)}_{n-1}(f)\}\\&\leqslant\max\{f^*-f^*_{n-1},S^{(2)}(f)-S^{(2)}_{n-1}(f)\}\\&\leqslant\max\{\tilde f^*,S^{(2)}(\tilde f)\}=M^{(2)}(\tilde f),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m^{(2)}(\tilde f)&=\min\{\tilde f^*,S^{(2)}(\tilde f)\}\\&\leqslant\min\{2f^*,S^{(2)}(f)\}\leqslant 2m^{(2)}(f).\end{aligned}$$

应用 (5.15) 于 $\tilde f$, 则

$$\begin{aligned}E(M^{(2)}(f)-M^{(2)}_{n-1}(f)|B_n)&\leqslant E(M^{(2)}(\tilde f)|B_n)\\&\leqslant CE(m^{(2)}(\tilde f)+d^*\,|B_n\,)\\&\leqslant CE(m^{(2)}(f)+d^*\,|B_n\,).\end{aligned}$$

由 6.1 节推论 1 得出

$$E\Phi(M^{(2)}(f))\leqslant CE\Phi(m^{(2)}(f)+d^*).\tag{5.16}$$

利用 f 的 Davis 分解最后可得出 (5.13), 其方法在 6.2 节中已遇到过, 这里不拟复述.

(ii)⇒ (iii). 设 $\|m^{(2)}(f)\|_\Phi = a > 0$, 则 $\|m^{(2)}(a^{-1}f)\|_\Phi = 1$, 由 (5.13),

$$\frac{1}{a}\|M^{(2)}(f)\|_\Phi = \|M^{(2)}(a^{-1}f)\|_\Phi \leqslant E\Phi(M^{(2)}(a^{-1}f)) + 1$$
$$\leqslant CE\Phi\left(m^{(2)}(a^{-1}f)\right) + 1 \leqslant C'\|m^{(2)}(f)\|_\Phi.$$

总之得到 (5.14).

(iii)⇒ (i). 由 (5.14) 可分别得出

$$\left\|S^{(2)}(f)\right\|_\Phi \leqslant C\|f^*\|_\Phi, \quad \|f^*\|_\Phi \leqslant C\left\|S^{(2)}(f)\right\|_\Phi,$$

此时 X 必同构于 Hilbert 空间. 证毕.

对于两个鞅 f, g, 我们称 g 是 f 的微分从属, 若 g 与 f 适应于同一子 σ 代数序列 (B_n) 并且 $\|dg_n\| \leqslant \|df_n\|\,(n \geqslant 1)$. 记 $\mathcal{Z}$ 是 X 值鞅 f 及其微分从属 g 构成的序对 (f,g) 的全体 (允许 (B_n) 甚至概率空间 (Ω,Σ,P) 变动).

定理 5 (Burkholder) 若 X 同构于 Hilbert 空间, $(f,g)\in\mathcal{Z}$ 并且 $\|f\|_1 < \infty$, 则

$$\lambda P\left(\sup_{n\geqslant 1}\{\|f_n\| + \|g_n\|\} > \lambda\right) \leqslant 2\|f\|_1. \tag{5.17}$$

证明 设 $L{:}X\times X \to R$,

$$L(x,y) = \begin{cases} 1 + \|x\|^2 - \|y\|^2, & \|x\| + \|x\| < 1, \\ 2\|x\|, & \|x\| + \|y\| \geqslant 1. \end{cases}$$

我们要验证 L 具有以下性质:

1° $L(x,y) \leqslant 2\|x\| + 1$;

2° $L(x,y) \geqslant 1$, 若 $\|y\| \leqslant \|x\|$;

3° $EL(f_n,g_n) \geqslant EL(f_{n-1},g_{n-1}) \geqslant \cdots \geqslant EL(f_0,g_0)$.

由 1° 又可得出

$$P(\|f_n\| + \|g_n\| \geqslant 1) \leqslant P(2\|f_n\| \geqslant L(f_n,g_n))$$
$$= P(2\|f_n\| - L(f_n,g_n) + 1 \geqslant 1)$$
$$\leqslant E(2\|f_n\| - L(f_n,g_n) + 1).$$

由 2°, 3°, $EL(f_n,g_n) \geqslant EL(f_n,g_0) \geqslant 1$, 于是

$$P(\|f_n\| + \|g_n\| \geqslant 1) \leqslant 2\|f\|_1. \tag{5.18}$$

以 $\lambda^{-1}f, \lambda^{-1}g$ 替换 f, g 得到

$$P(\|f_n\| + \|g_n\| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{2}{\lambda}\|f\|_1. \tag{5.19}$$

然后, 只需作一个停时的讨论即可得到 (5.17).

现在验证 $1°, 2°, 3°$.

首先 $1°$, $\|x\| + \|y\| \geqslant 1$ 时由定义即知. 当 $\|x\| + \|y\| < 1$ 时 $\|x\|^2 \leqslant \|x\| \leqslant 2\|x\|$, 故 $L(x, y) = 1 + \|x\|^2 - \|y\|^2 \leqslant 1 + 2\|x\|$.

对于 $2°$, 若 $\|y\| \leqslant \|x\|$, 当 $\|x\| + \|y\| < 1$ 时, $L(x,y) = 1 + \|x\|^2 - \|y\|^2 \geqslant 1$; 当 $\|x\| + \|y\| \geqslant 1$ 时, $\|x\| \geqslant 1/2$, 所以 $L(x,y) = 2\|x\| \geqslant 1$.

为验证 $3°$, 考虑实函数 $G(t) = L(x + th, y + tk)$, 这里 $x, y, h, k \in X$, $\|k\| \leqslant \|h\|$. 不妨就假定 X 是 Hilbert 空间, 此时 G 是局部凸函数, 因此在整个 R 上是凸函数. 我们证明 $G'(0)$ 存在, 从而 $G'(0) \geqslant 0$ 并且

$$G(1) \geqslant G(0) + G'(0).$$

于是

$$L(x + H, y + k) \geqslant L(x, y), \quad L(f_n, g_n) \geqslant L(f_{n-1}, g_{n-1}),$$

得到 $3°$.

剩下只需验证 $G'(0)$ 存在. 考虑下面几种情况：

(i) $\|x\| + \|y\| < 1$, 此时只要 t 充分小, $\|x + th\| + \|y + tk\| < 1$, 于是

$$\begin{aligned}
&L(x + th, y + th) - L(x, y) \\
&= 2t(Re(x, h) - Re(y, k)) + t^2(\|h\|^2 - \|k\|^2).
\end{aligned}$$

(ii) $\|x\| + \|y\| > 1$. 此时只要 t 充分小, $\|x + th\| + \|y + tk\| > 1$, 于是当 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
L(x + th, y + th) - L(x, y) &= 2\|x + th\| - 2\|x\| \\
&= \frac{2(\|x + th\|^2 - \|x\|^2)}{\|x + th\| + \|x\|} = \frac{4Re(x, h)t + t^2\|h\|^2}{\|x + th\| + \|x\|},
\end{aligned}$$

当 $x = 0$ 时, $L(x + k, y + k) - L(x, y) = 0$.

(iii) $\|x\| + \|y\| = 1$. 注意此时 $L(x, y) = 2\|x\|$. $L(x + th, y + tk)$ 有两种情况, 要么等于 $\|x + th\|$, 要么等于 $1 + \|x + th\|^2 - \|y + tk\|^2$. 对于前者如同 (ii), 对于后者, 由于 $\|y\| = 1 - \|x\|$, 故

$$\begin{aligned}
&L(x + th, y + tk) - L(x, y) \\
&= 1 + \|x + th\|^2 - \|y + tk\|^2 - 2\|x\| \\
&= 2t(Re(x, h) - Re(y, k)) + t^2(\|h\|^2 - \|k\|^2),
\end{aligned}$$

如同 (i). 由定义, 上面三者都能得出 $G'(0)$ 存在.

定理 6 设 X 是 Banach 空间, 则以下等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间;

(ii) 对于每个 $(f,g)\in\mathcal{Z}, \|f\|_1<\infty$, 则 g_n a.e. 收敛;

(iii) 存在 $c>0$, 使得每个 $(f,g)\in\mathcal{Z}$, 只要 $g^*>1$, a.e., 则 $\|f\|_1\geqslant c$;

(iv) 存在 $c>0$, 使得每个 $(f,g)\in\mathcal{Z}$, 满足

$$\lambda P(g^*>\lambda)\leqslant c\,\|f\|_1\,; \tag{5.20}$$

(v) 对于每个 (或某个) $1<p<\infty$, 存在 $c_p>0$, 使得

$$\|g\|_p\leqslant c_p\,\|f\|_p\,,\quad \forall (f,g)\in\mathcal{Z}. \tag{5.21}$$

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 不妨设 X 是 Hilbert 空间. 令

$$A_\varepsilon=\Big\{\omega:\inf_{k\geqslant 0}\sup_{m,n\geqslant k}|g_n(\omega)-g_m(\omega)|>2\varepsilon\Big\},$$

这里 $\varepsilon>0$ 是任一正数, 记

$$\tau_0(\omega)=\inf\{n\geqslant 0\colon\ |g_n(\omega)|>\varepsilon\},$$

若 $\tau_0(\omega)<\infty$, 记

$$\tau_1(\omega)=\inf\{n>\tau_0(\omega)\colon\ |g_n(\omega)-g_{\tau_0}(\omega)|>\varepsilon\},$$

$$\cdots$$

设 $K=l_X^2=\{x=(x_n)\colon\ x_n\in X,\ \Sigma\,\|x_n\|^2<\infty\},\ \|x\|=(\Sigma\,\|x_n\|^2)^{1/2}$. K 仍是 Hilbert 空间. 定义 K 值鞅 $F=(F_n),G=(G_n)$, 使得差序列

$$\mathrm{d}F_K=(\mathrm{d}f_k,0,0,\cdots),$$

$$\mathrm{d}G_K=\begin{cases}(\mathrm{d}g_k,0,0,\cdots), & k<\tau_0(\omega)+1,\\ (\underbrace{0,\cdots,0,\mathrm{d}g_k}_{j},0,\ \cdots), & \tau_{j-1}(\omega)<k\leqslant\tau_j(\omega).\end{cases}$$

注意 K 中的范数 $\|\mathrm{d}G_k\|_K=\|\mathrm{d}g_k\|\leqslant\|\mathrm{d}f_k\|\leqslant\|\mathrm{d}F_k\|$, 并且 $\|F_k\|_K=\|f_k\|$. 若 $\tau_j\leqslant n$, 则

$$\|G_n\|_K^2\geqslant\|g_{\tau_0}\|^2+\|g_{\tau_1}-g_{\tau_0}\|^2+\cdots+\|g_{\tau_j}-g_{\tau_{j-1}}\|^2.$$

由定理 5, 当 $j \geqslant 0$ 时,

$$\begin{aligned} P(A_\varepsilon) &\leqslant \lim_{n\to\infty} P(0 \leqslant \tau_0 < \cdots < \tau_j < n) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} P(\|G_n\|_K \geqslant \varepsilon(j+1)^{1/2}) \\ &\leqslant 2\,\|F\|_1 / \varepsilon(j+1)^{1/2} = 2\,\|f\|_1 / \varepsilon(j+1)^{1/2}. \end{aligned}$$

于是 $\forall\, \varepsilon > 0, P(A_\varepsilon) = 0$, 即 g_n a.e. 收敛.

(ii)⇒ (iii). 若 c 不存在, 则对于每个自然数 j, 存在鞅

$$f_j = (f_{j1},\ f_{j2},\ \cdots), \quad g_j = (g_{j1}\ , g_{j2},\ \cdots),$$

使得 $(f_j,g_j) \in \mathcal{Z}, \|f_j\|_1 \leqslant 2^{-j}$, $g_j^* > 1$ a.e.. 不失一般性, 假定基础概率空间是同一个, 并且 $B_{j\infty} (j \geqslant 1)$ 彼此相互独立. 此时存在 n_j, 使得

$$A_j = \{\exists n \leqslant n_j:\ \ \|g_{jn}\| > 1\} \tag{5.22}$$

有概率 $P(A_j) > 1/2$. 现在若 σ 代数 B_n 如 6.2 节定理 1 中的定义, 考虑差序列

$$(\mathrm{d}f_{11}, \cdots, \mathrm{d}f_{1n_1}, \mathrm{d}f_{21}, \cdots, \mathrm{d}f_{2n_2}, \mathrm{d}f_{31}, \cdots),$$
$$(\mathrm{d}g_{11}, \cdots, \mathrm{d}g_{1n_1}, \mathrm{d}g_{21}, \cdots, \mathrm{d}g_{2n_2}, \mathrm{d}g_{31}, \cdots).$$

以 F 记前一鞅, G 记后一鞅, 则 $\|F\|_1 \leqslant 1$, 但由于 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A_j) = \infty$ 并且 A_j 相互独立, 故

$$P(G^* = \infty) \geqslant P(\limsup_{m,n\to\infty} \|G_m - G_n\| > 1) \geqslant P(\limsup_{j\to\infty} A_j) = 1,$$

与 (ii) 矛盾. 故 (iii) 成立. (iii)⇒(iv). 我们将证明对于任何自然数 n,

$$cP(g_n^* > 2) \leqslant \|f\|_1 . \tag{5.23}$$

然后 $\forall \lambda > 0$, 令 $\tilde{f} = \lambda f/2, \tilde{g} = \lambda g/2$, 则得到 $c\lambda P(g_n^* > \lambda) \leqslant 2\,\|f\|_1$, 从而得到 (5.20).

取 (f,g) 的独立 copy $(f_j, g_j) \in \mathcal{Z}$, $(B_{j\infty}, j \geqslant 1)$ 相互独立. 设 $P(g_n^* > 2) > 0$, 令 $u_j = \chi_{\{g_{jn}^* \leqslant 2\}}$. 考虑差序列

$$(\mathrm{d}f_{11}, \cdots, \mathrm{d}f_{1n}, u_1\mathrm{d}f_{21}, \cdots, u_1\mathrm{d}f_{2n}, u_1u_2\mathrm{d}f_{31}, \cdots),$$

$$(\mathrm{d}g_{11}, \cdots, \mathrm{d}g_{1n}, u_1\mathrm{d}g_{21}, \cdots, u_1\mathrm{d}g_{2n}, u_1u_2\mathrm{d}g_{31}, \cdots).$$

$(u_j, j \geqslant 1)$ 是独立 R.V., 第二个鞅 G 是第一个鞅 F 的微分从属. 此外

$$\|F\|_1 \leqslant E(1 + u_1 + u_1u_2 + \cdots) \|f\|_1 = (1 - Eu_1)^{-1} \|f\|_1 = P(g_n^* > 2)^{-1} \|f\|_1 .$$

由于 $G^* > 1$ a.e., 所以由 (iii), $\|F\|_1 \geqslant c$, 从而得出 (5.23).

(iv)$\Rightarrow$ (v). 假设 $W = (W_n)$ 是 $(\|\mathrm{d}f_n\|)$ 的可料强函数序列. 定义

$$\begin{aligned}\mu &= \inf\{n\colon\ \|g_n\| > \lambda\},\\ \upsilon &= \inf\{n\colon\ \|g_n\| > \beta\lambda\},\\ \sigma &= \inf\{n\colon\ \|f_n\| \vee W_{n+1} > \delta\lambda\},\end{aligned}$$

这里 $\delta > 0, \beta > \delta + 1, \lambda > 0$, 记 $A_k = \{\mu < k \leqslant \upsilon \wedge \sigma\}, u_k = \chi_{A_k}$, 则 u_k 是可料序列. 若 $F_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \mathrm{d}f_k, G_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \mathrm{d}g_k$, 则 $G = (G_n)$ 是 $F = (F_n)$ 的微分从属, 类似于 7.3 节定理 2 中的证明得到

$$P(g^* > \beta\lambda, f^* \vee W^* \leqslant \delta\lambda) \leqslant 3\delta c(\beta - \delta - 1)^{-1} P(g^* > \lambda). \tag{5.24}$$

此即关于 $(g^*, f^* \vee W^*)$ 的好 λ 不等式, 由 6.1 节引理 4 知道 (5.22) 成立.

(v)$\Rightarrow$ (i). 我们只取 $p = 2$ 来证明 (i). 设 $x_n, z \in X, \|z\| = 1, \{r_n\}$ 是 R 序列, 令

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i, \quad g_n = \sum_{i=1}^{n} r_i \|x_i\| z, \quad n \geqslant 1.$$

则 $g = (g_n)$ 是 $f = (f_n)$ 的微分从属, 反过来也一样, 于是由 (v),

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right\|_2 \sim \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i \|x_i\| z\right\|_2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i \|x_i\|\right\|_2 \sim \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right)^{1/2}.$$

由 Kwapien 定理知道, X 同构于 Hilbert 空间.

下面引理可依照 6.1 节引理 1 去证明.

引理 3 对于每个 WP 鞅的配对 $(f, g) \in \mathcal{Z}$, 若 $\|f\|_1 < \infty$ 并且 $g^* > 1$ a.e., 则存在 $(F, G) \in \mathcal{Z}$, 使得

$$\|F\|_\infty \leqslant 6 \|f\|_1 , \quad P(G^* > 1) \geqslant 1/2. \tag{5.25}$$

定理 7 设 X 是 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间;

(ii) 对于每个 $(f, g) \in \mathcal{Z}$, $\|f\|_1 < \infty$, 则 $g^* < \infty$ a.e.;

(iii) 对于每个 $(f,g) \in \mathcal{Z}$, $\|f\|_1 < \infty$, 则 g_n 依概率收敛;

(iv) 对于每个限制增长的 Young 函数 Φ, 存在 $c_\Phi > 0$, 使得

$$\|g^*\|_\Phi \leqslant c_\Phi \|f^*\|_\Phi, \quad \forall (f,g) \in \mathcal{Z}. \tag{5.26}$$

若 Φ 还是严格凸的, 则有

$$\|g\|_\Phi \leqslant c_\Phi \|f\|_\Phi, \quad \forall (f,g) \in \mathcal{Z}. \tag{5.27}$$

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 与 (i) $\Rightarrow$ (iii) 容易从定理 6(ii) 得出. 为证 (ii) $\Rightarrow$ (i), 注意在定理 6(ii) $\Rightarrow$ (iii) 的证明中已经知道, 若 X 不同构于 Hilbert 空间, 则存在 $(F,G) \in \mathcal{Z}, \|F\|_1 < \infty$, 但 $G^* = \infty$ a.e., 这与 (ii) 矛盾.

为证 (iii) $\Rightarrow$ (i). 仍考虑上面例子 (F,G), 由于

$P(G_n$ 不依概率收敛$) \geqslant P(\limsup\limits_{m,n\to\infty} \|G_m - G_n\|) \geqslant P(\lim\limits_{j\to\infty} A_j) = 1.$

这与 (iii) 矛盾.

(i)$\Rightarrow$ (iv). 事实上在定理 6 的证明中已得到关于 $(g^*, f^* \vee W^*)$ 的好 λ 不等式, 故通过 Davis 分解可得到 (5.26), 再由 6.1 节推论 4 得出 (5.27).

(iv)$\Rightarrow$ (i). 根据引理 3, 若 X 不同构于 Hilbert 空间, 则存在 WP 鞅使得 $f^* \leqslant M < \infty, g^* = \infty$ a.e., 与 (iv) 矛盾.

6.6 原子分解与小指标鞅空间

20 世纪 70 年代中期在调和分析与鞅论中引入了原子分解方法, 事实证明这是一种简便有力的工具, 它不仅可以解决小指标鞅空间的问题, 而且可以将单指标和多指标情况一并处理.

设 $0 < a \leqslant 1$, 对于 Banach 空间 X, 仍定义 H_a, ${}_pH_a^\sigma$, ${}_pH_a^S$ 如前. 若 $\lambda = (\lambda_n)$ 是非负适应 R.V. 序列, $\lambda_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n$, 记 Γ 是如此的序列全体. 又定义

$$PH_a = \{f = (f_n)\colon \exists\, (\lambda_n) \in \Gamma,\ \|f_n\| \leqslant \lambda_{n-1},\ \lambda_\infty \in L_a\},$$

$${}_pPH_a^S = \{f = (f_n)\colon \exists\, (\lambda_n) \in \Gamma,\ S_n^{(p)}(f) \leqslant \lambda_{n-1},\ \lambda_\infty \in L_a\},$$

这些空间赋予范数 $\|f\| = \inf\limits_{\lambda\in\Gamma} \|\lambda_\infty\|_a$, 分别记为 $\|f\|_{PH_a}$ 和 $\|f\|_{{}_pPH_a^S}$. 注意在 $0 < a < 1$ 时这些空间只是拟赋范空间.

以 $\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合. 设 $0 < a < \infty, 1 \leqslant p < \infty$, 称 X 值可测函数 e 为 $(1,\ a,\ \infty;\ p)$ (或 $(2,a,\infty;p),(3,a,\infty)$) 原子, 若存在停时 τ, 使得

(i) $e_n = E_n e = 0,\ \forall n \leqslant \tau$;

(ii) $\left\|\sigma^{(p)}(e)\right\|_\infty \leqslant P(\tau < \infty)^{-\frac{1}{a}}$.

(或者 (ii′) $\left\|S^{(p)}(e)\right\|_\infty \leqslant P(\tau<\infty)^{-\frac{1}{a}}$, (ii″) $\|e^*\|_\infty \leqslant P(\tau<\infty)^{-\frac{1}{a}}$).

所谓原子分解就是把一个鞅 $f=(f_n)$ 分解为 $f=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k e^k$, 或等价地

$$f_n=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k E_n e^k,\quad n\geqslant 0 \tag{6.1}$$

的形式, 其中 e^k 是一列某种类型的原子, E_n 是关于 B_n 的条件期望, 并且这里的级数按一定空间的范数收敛.

定理 1 设 $0<a\leqslant 1<p\leqslant 2$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) ${}_pH_a^\sigma$ 中的每个鞅 $f=(f_n)$ 存在如 (6.1) 的分解, 其中 e^k 是 $(1,a,\infty;p)$ 原子, $(\mu_k)_{k\in\mathbf{Z}}\in l_a$, $\sup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left\|e^{k^*}\right\|_a<\infty$. 并且

$$\|f\|_{{}_pH_a^\sigma}\sim\inf\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^a\right)^{\frac{1}{a}}. \tag{6.2}$$

这里的 inf 是对 f 的所有如上的原子分解取的. 此时级数 $\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k e^k$ 依 ${}_pH_a^\sigma$ 范数收敛于 f.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 设 $f=(f_n)\in {}_pH_a^\sigma$. $\forall k\in\mathbf{Z}$, 定义

$$\tau_k=\inf\{n\geqslant 0\colon \sigma_{n+1}^{(p)}(f)>2^k\},$$

由 $\sigma^{(p)}(f)<\infty$, a.e., 则 $\tau_k\uparrow\infty$. 考虑停止鞅 $f^{(\tau_k)}=(f_{\tau_k\wedge n})_{n\geqslant 0}$. $\forall\, k\in\mathbf{Z}$, 令 $\mu_k=2^k 3P(\tau_k<\infty)^{\frac{1}{a}}$, $e_n^k=\mu_k^{-1}(f_n^{(\tau_{k+1})}-f_n^{(\tau_k)})$, 则 $\forall n\geqslant 0$,

$$E_{n-1}\mathrm{d}e_n^k=\mu_k^{-1}(E_{n-1}\mathrm{d}f_n^{(\tau_{k+1})}-E_{n-1}\mathrm{d}f_n^{(\tau_k)})=0,$$

故 $e^k=(e_n^k)_{n\geqslant 0}$ 是鞅, 并且 $\forall n\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbf{Z}}(f_n^{(\tau_{k+1})}-f_n^{(\tau_k)})&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{m=0}^n I_{\{m\leqslant\tau_{k+1}\}}\mathrm{d}f_m-\sum_{m=0}^n I_{\{m\leqslant\tau_k\}}\mathrm{d}f_m\Big)\\&=\sum_{m=0}^n\sum_{k\in\mathbf{Z}}(I_{\{m\leqslant\tau_{k+1}\}}-I_{\{m\leqslant\tau_k\}})\mathrm{d}f_m=f_n.\end{aligned} \tag{6.3}$$

由 $\sigma^{(p)}(f^{(\tau_k)})=\sigma_{\tau_k}^{(p)}(f)\leqslant 2^k$ 知

$$\begin{aligned}\sigma^{(p)}(e^k)&=\left(\sum_{n=0}^\infty E_{n-1}\left\|\mathrm{d}e_n^k\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\mu_k^{-1}\left(\sum_{n=0}^\infty E_{n-1}\left\|\mathrm{d}f_n^{(\tau_{k+1})}-\mathrm{d}f_n^{(\tau_k)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\mu_k^{-1}(\sigma^{(p)}(f^{(\tau_{k+1})})+\sigma^{(p)}(f^{(\tau_k)}))\chi_{\{\tau_k<\infty\}}\\&=\mu_k^{-1}(\sigma_{\tau_{k+1}}^{(p)}(f)+\sigma_{\tau_k}^{(p)}(f))\chi_{\{\tau_k<\infty\}}\\&\leqslant\mu_k^{-1}(2^{k+1}+2^k)\chi_{\{\tau_k<\infty\}}\leqslant P(\tau_k<\infty)^{-\frac{1}{a}}\chi_{\{\tau_k<\infty\}}.\end{aligned} \tag{6.4}$$

于是 $\left\|\sigma^{(p)}(e^k)\right\|_\infty \leqslant P(\tau_k<\infty)^{-\frac{1}{a}}$. 易知在 $\{\tau_k=\infty\}$ 上 $e_n^k=0$, 从而 $\sigma^{(p)}(e^k)=0$. 应用 Hölder 不等式和 (6.4) ,

$$E\sigma^{(p)}(e^k)^p \leqslant P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{p}{a}}. \tag{6.5}$$

由 X 的 p 光滑性,

$$\left\|e^{k*}\right\|_p \leqslant C\left\|\sigma^{(p)}(e^k)\right\|_p \leqslant CP(\tau_k<\infty)^{-\frac{1}{a}+\frac{1}{p}}.$$

X 具有 RN 性质, 此鞅收敛, 记其极限为 e^k, 则 $E_ne^k=e_n^k, \forall n\geqslant 0$. 又由 e_n^k 的定义, 当 $n\leqslant\tau_k$ 时 $e_n^k=0$. 故由 (4), $\forall k\in\mathbf{Z}$, e^k 是 $(1,a,\infty;p)$ 原子. 由 (6.5) 和 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}E(e^{k*})^a = E(e^{k*}I_{\{\tau_k<\infty\}})^a &\leqslant (E(e^{k*})^p)^{\frac{a}{p}}P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{a}{p}}\\ &\leqslant CP(\tau_k<\infty)^{(-\frac{p}{a}+1)\frac{a}{p}}P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{a}{p}}=C,\end{aligned}$$

所以 $\sup\limits_k \left\|e^{k*}\right\|_a<\infty$. (6.3) 即是所要的分解. 现在来计算 $\|f\|_{{}_pH_a^\sigma}$. 实际上,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^a &= 3^a\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^{ka}P(\tau_k<\infty)=3^a\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^{ka}P(\sigma^{(p)}(f)^a>2^{ka})\\ &=\frac{3^a}{2^a-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}}(2^{(k+1)a}-2^{ka})P(\sigma^{(p)}(f)^a>2^{ka})\\ &=\frac{3^a}{2^a-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^{ka}P(2^{(k-1)a}<\sigma^{(p)}(f)^a\leqslant 2^{ka})\\ &\leqslant\frac{2^a3^a}{2^a-1}E\sigma^{(p)}(f)^a=\frac{2^a3^a}{2^{a-1}}\|f\|_{{}_pH_a^\sigma}^a.\end{aligned} \tag{6.6}$$

或从倒数第 2 步有

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^a \geqslant \frac{3^a}{2^a-1}E\sigma^{(p)}(f)^a=\frac{3^a}{2^a-1}\|f\|_{{}_pH_a^\sigma}^a. \tag{6.7}$$

关于所有如此的原子分解取下确界即得到 (6.2) .

最后由 (e_n^k) 的定义, $\sum\limits_{k=l}^m\mu_ke^k=f^{(\tau_{m+1})}-f^{(\tau_l)}$. 由于 $f\in_p H_a^\sigma$ 时, $\sigma^{(p)}(f)<\infty$, a.e., 故 $\tau_{m+1}\to\infty$, a.e.. 从而

$$\sigma^{(p)}(f-f^{(\tau_{m+1})})^a\leqslant(\sigma^{(p)}(f)^a-\sigma^{(p)}(f^{(\tau_{m+1})})^p)^{\frac{a}{p}}\to 0, \text{a.e.}.$$

又 $\sigma^{(p)}(f-f^{(\tau_{m+1})})^a\leqslant\sigma^{(p)}(f)^a$, 后者可积. 由控制收敛定理,

$$\left\|f-f^{(\tau_{m+1})}\right\|_{{}_pH_a^\sigma}^a=E\sigma^{(p)}(f-f^{(\tau_{m+1})})^a\to 0.$$

另一方面, $\sigma^{(p)}(f^{(\tau_l)}) \leqslant 2^l$, 故知 $\lim\limits_{l\to-\infty}\left\|f^{(\tau_l)}\right\|_{{}_pH_a^\sigma}=0$. 总之,

$$\lim_{m\to\infty,l\to-\infty}\left\|f-\sum_{k=l}^{m}\mu_k e^k\right\|_{{}_pH_a^\sigma}=0.$$

(ii)⇒ (i). 若 $E\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|\mathrm{d}f_n\|^p<\infty$, 由于

$$E\sigma^{(p)}(f)^a\leqslant(E\sigma^{(p)}(f)^p)^{\frac{a}{p}}=\left(ES^{(p)}(f)^b\right)^{\frac{a}{p}}<\infty,$$

故 $f\in {}_pH_a^\sigma$. 设 f_n 有 (ii) 中的原子分解, $\sup\limits_k E\left\|e^{k*}\right\|^a<\infty$, 则

$$\begin{aligned}E\|f_m-f_n\|^a&\leqslant E\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^a\left\|e_m^k-e_n^k\right\|^a=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^aE\left\|e_m^k-e_n^k\right\|^a.\\&\leqslant 2^a\sum_{|k|>k_0}\mu_k^a\sup E(e^{k*})^a+\sum_{|k|\leqslant k_0}\mu_k^aE\left\|e_m^k-e_n^k\right\|^a\\&\leqslant C\sum_{|k|>k_0}\mu_k^a+\sum_{|k|\leqslant k_0}\mu_k^aE\left\|e_m^k-e_n^k\right\|^a.\end{aligned}\tag{6.8}$$

$\forall\varepsilon>0$, 由于 $(\mu_k)\in l_a$, 可取 k_0 足够大使第一项小于 ε. 又 e^k 是正则鞅, 故 $E\left\|e_n^k-e^k\right\|^a\leqslant(E\left\|e_n^k-e^k\right\|)^a\to0$, $k\in\mathbf{Z}$. 由于 (6.8) 第二项只涉及有限多项, 所以当 m,n 足够大时也小于 ε. 换句话说, 由 (6.8) 知道 (f_n) 是 L_a 中的 Cauchy 序列, 从而依概率收敛. 由 5.3 节的定理, X 同构于 p 光滑空间.

定理 2 设 $0<a\leqslant1<p\leqslant2$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) ${}_pPH_a^S$ 中的每个鞅 $f=(f_n)$ 有如 (6.1) 的分解, 其中 e^k 是 $(2,a,\infty;p)$ 原子, $\sup\limits_k\left\|e^{k*}\right\|_a<\infty$ 并且

$$\|f\|_{{}_pPH_a^S(X)}\sim\inf\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^a\right)^{\frac{1}{a}}.\tag{6.9}$$

此时 $\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}\mu_ke^k$ 以 ${}_pPH_a^S$ 范数收敛于 f.

证明 (i)⇒(ii). 设 $f=(f_n)\in_p PH_a^S$, $S_n^{(p)}(f)\leqslant\lambda_{n-1}$, $\lambda_\infty\in L_a$. 令 $\tau_k=\inf\{n\geqslant0\colon \lambda_n>2^k\}$, μ_k,e_n^k 如定理 1 中一样, 则 $e^k=(e_n^k)_{n\geqslant0}$ 是 X 值鞅并且 $S^{(p)}(f^{(\tau_k)})=S_{\tau_k}^{(p)}(f)\leqslant\lambda_{\tau_k-1}\leqslant2^k$. 类似于 (6.4) 的证明得到

$$\begin{aligned}S^{(p)}(e^k)&\leqslant\mu_k^{-1}(S_{\tau_{k+1}}^{(p)}(f)+S_{\tau_k}^{(p)}(f))\chi_{\{\tau_k<\infty\}}\\&\leqslant\mu_k^{-1}(2^{k+1}+2^k)\chi_{\{\tau_k<\infty\}}\leqslant P(\tau_k<\infty)^{-\frac{1}{a}}\chi_{\{\tau_k<\infty\}}.\end{aligned}\tag{6.10}$$

由 X 的 p 光滑性,

$$\sup_n \left\|e_n^k\right\|_p \leqslant \left\|e^{k*}\right\|_p \leqslant C\left\|S^{(p)}(e^k)\right\|_p \leqslant CP(\tau_k<\infty)^{-\frac{1}{a}+\frac{1}{p}}.$$

于是存在 $L_p(X)$ 中函数 e^k,$E_n e^k = e_n^k, \forall n \geqslant 0$, 并且 e^k 是 $(2,a,\infty;p)$ 原子. 应用 Hölder 不等式和 (6.10),

$$\begin{aligned} E(e^{k*})^a &= E(e^{k*}I_{\{\tau_k<\infty\}})^a \leqslant (E(e^{k*})^p)^{\frac{a}{p}}P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{a}{p}} \\ &\leqslant CP(\tau_k<\infty)^{(-\frac{p}{a}+1)\frac{a}{p}}P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{a}{p}} = C. \end{aligned} \tag{6.11}$$

故 $\sup\limits_k \left\|e^{k*}\right\|_a < \infty$. 类似于 (6.6), (6.7),

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^a = 3^a\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^{ka}P(\tau_k<\infty) = 3^a\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^{ka}P(\lambda_\infty>2^k)\sim E\lambda_\infty^a. \tag{6.12}$$

左端关于所有原子分解取下确界, 右端关于 $\lambda\in\Gamma$ 取下确界, 即得到 (6.9). 最后, 由于

$$\begin{aligned} S_n^{(p)}(f-f^{(\tau_{m+1})})^p &= \sum_{k=m+1}^{\infty}(S_n^{(p)}(f^{(\tau_{k+1})})^p - S_n^{(p)}(f^{(\tau_k)})^p) \\ &= \sum_{k=m+1}^{\infty}S_n^{(p)}(f^{(\tau_{k+1})}-f^{(\tau_k)})^p = \sum_{k=m+1}^{\infty}\mu_k^p S_n^{(p)}(e^k)^p, \end{aligned} \tag{6.13}$$

令 $\rho_{n,k} = \left\|S^{(p)}(e^k)\right\|_\infty \chi_{\{\tau_k\leqslant n\}}, \rho_n = \left(\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}\mu_k^p\rho_{n,k}^p\right)^{\frac{1}{p}}$, 则 $(\rho_n)_{n\geqslant 0}$ 是适应非降序列. 注意在 $\{\tau_k\geqslant n\}$ 上 $S_n^{(p)}(e^k)=0$, 所以由 (6.13), $S_n^{(p)}(f-f^{(\tau_{m+1})})\leqslant\rho_{n-1}$. 由于 $0<a\leqslant 1$, 再由 (6.10) 得到

$$\rho_n^a \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty}\mu_k^a\chi_{\{\tau_k\leqslant n\}}\left\|S^{(p)}(e^k)\right\|_\infty^a \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty}\mu_k^a\chi_{\{\tau_k\leqslant n\}}P(\tau_k<\infty)^{-1},$$

由此得到

$$\left\|f-f^{(\tau_{m+1})}\right\|_{{}_pPH_a^S} \leqslant E\rho_\infty^a \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty}\mu_k^a \to 0.$$

又 $\left\|f^{(\tau_l)}\right\|_{{}_pPH_a^S}^a \leqslant E\lambda_{\tau_l-1}^a \leqslant 2^{al}\to 0(l\to-\infty)$, 故

$$\lim_{m\to\infty,l\to-\infty}\left\|f-\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k e^k\right\|_{{}_pPH_a^S} = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). 设 $f=(f_n)$ 是 X 值鞅, $S^{(p)}(f)\in L_\infty$, 则 $f\in_p PH_a^S$. 类似定理 1(ii)$\Rightarrow$(i) 的证明知, (f_n) 依概率收敛, 从而 X 同构于 p 光滑空间.

定理 3 设 $0<a\leqslant 1$, 则以下条件等价:

(i) X 具有 RN 性质;

(ii) 每个 $f=(f_n)\in PH_a$ 有如 (6.1) 的分解, 其中 e^k 是 $(3,a,\infty)$ 原子, $(\mu_k)\in l_a$, 并且

$$\|f\|_{PH_a(X)}\sim\inf\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^a\right)^{\frac{1}{a}}. \tag{6.14}$$

此时 $\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k e^k$ 依 PH_a 范数收敛于 f.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii). 设 $f=(f_n)\in PH_a$, $(\lambda_n)\in\Gamma,\|f_n\|\leqslant\lambda_{n-1},\lambda_\infty\in L_a$. $\forall k\in\mathbf{Z}$, 定义 τ_k,μ_k 和 e_n^k 如同定理 2, 则 $\forall n\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\left\|e_n^k\right\|=\mu_k^{-1}\left\|f_n^{(\tau_{k+1})}-f_n^{(\tau_k)}\right\|&\leqslant\mu_k^{-1}(\lambda_{\tau_{k+1}-1}+\lambda_{\tau_k-1})\chi_{\{\tau_k<\infty\}}\\&\leqslant\mu_k^{-1}(2^{k+1}+2^k)\chi_{\{\tau_k<\infty\}}\leqslant P(\tau_k<\infty)^{-\frac{1}{a}}\chi_{\{\tau_k<\infty\}}.\end{aligned} \tag{6.15}$$

由此, $\left\|e^{k*}\right\|_\infty\leqslant P(\tau_k<\infty)^{-\frac{1}{a}}$. X 具有 RN 性质, 故存在 X 值可积函数 e^k 是 $(3,a,\infty)$ 原子, 并且 (6.1) 成立. 类似于定理 2 中的证明可得 (6.14). 此时

$$\left\|f_n-f_n^{(\tau_{m+1})}\right\|^a\leqslant\sum_{k=m+1}^{\infty}\mu_k^a\left\|e_n^k\right\|^a\leqslant\sum_{k=m+1}^{\infty}\mu_k^a I_{\{\tau_k\leqslant n\}}\left\|e_n^k\right\|^a\leqslant\lambda_{n-1}^a. \tag{6.16}$$

现在令 $\rho_n^a=\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}\mu_k^a\chi_{\{\tau_k\leqslant n\}}\left\|e^k\right\|_\infty^a$, 则 (ρ_n) 是适应非降 R.V. 序列, 并且由 (6.15) 和 $0<a\leqslant 1$,

$$E\rho_\infty^a=\sum_{k=m+1}^{\infty}\mu_k^a\left\|e^k\right\|_\infty^a P(\tau_k<\infty)\leqslant\sum_{k=m+1}^{\infty}\mu_k^a\leqslant\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^a<\infty.$$

由 (6.16) 知道

$$\left\|f_n-f_n^{(\tau_{m+1})}\right\|^a\leqslant\sum_{k=m+1}^{\infty}\mu_k^a\left\|e_n^k\right\|^a=\sum_{k=m+1}^{\infty}\mu_k^a\chi_{\{\tau_k\leqslant n-1\}}\left\|e_n^k\right\|^a=\rho_{n-1}^a.$$

从而 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\left\|f_n-f_n^{(\tau_{m+1})}\right\|\leqslant\rho_\infty$, a.e.. 又

$$E\rho_n^a\leqslant\sum_{k=m+1}^{\infty}\mu_k^a\leqslant 3^a\sum_{k=m+1}^{\infty}2^{ka}P(\rho_\infty>2^k)\leqslant\frac{2^a3^a}{2^a-1}\int_{\{\rho_\infty>2^{m+1}\}}\rho_\infty^a\mathrm{d}P. \tag{6.17}$$

再由 (6.17) 知 $\left\|f-f^{(\tau_{m+1})}\right\|_{PH_a}\to 0$. 另一方面, $\left\|f^{(\tau_l)}\right\|_{PH_a(X)}\leqslant 2^l\to 0(l\to-\infty)$. 于是

$$\left\|f-\sum_{k=l}^{m}\mu_k e^k\right\|_{PH_a}\to 0,\quad m\to\infty, l\to-\infty.$$

(ii) $\Rightarrow$(i). 当 $\sup_n\|f_n\|_\infty<\infty$ 时, $f\in PH_a, f$ 存在形如 (6.1) 的原子分解. 由 $(3,a,\infty)$ 原子的定义知, $E(e^{k*})^a=E(e^{k*})^a I_{\{\tau_k<\infty\}}\leqslant 1$, 从而 $\sup_k\left|e^{k*}\right|_a\leqslant 1$. 类似定理 1(ii) $\Rightarrow$ (i) 的证明知, (f_n) 依概率收敛. 由控制收敛定理可知, (f_n) 依 L_1 范数收敛, 从而 X 具有 RN 性质.

定理 4　设 $0<a\leqslant 1<p\leqslant 2$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) ${}_pH_a^\sigma$ 中每个鞅 $f=(f_n)$ 存在如 (6.1) 的分解, 其中 e^k 是 $(3,a,p)$ 原子, $(\mu_k)_{k\in\mathbf{Z}}\in l_a$, 并且

$$\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^a\right)^{\frac{1}{a}}\leqslant C\|f\|_{{}_pH_a^\sigma}. \tag{6.18}$$

证明　(i)$\Rightarrow$(ii). 设 $f=(f_n)\in{}_pH_a^\sigma, \forall k\in\mathbf{Z}$, 令

$$F_k=\{\sigma^{(p)}(f)>2^k\},\quad \tau_k=\inf\{n\geqslant 0\colon 2E_n\chi_{F_k}>1\},$$

并且令 $\mu_k=Cp(p-1)^{-1}2^{\frac{1}{p}}2^{k+1}P(\tau_k<\infty)^{\frac{1}{a}}$, $e_n^k=\mu_k^{-1}(f_n^{(\tau_{k+1})}-f_n^{(\tau_k)})$, 其中 C 是 p 光滑空间中鞅不等式中的常数. 易知 τ_k 是单调增加的, $(e_n^k)_{n\geqslant 0}$ 是 X 值鞅. 由于 X 的 p 光滑性和 Doob 不等式,

$$\begin{aligned}
E(e^{k*})^p&\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sup_n E\left\|e_n^k\right\|^p\\
&=\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sup_n\frac{E\left\|f_n^{(\tau_{k+1})}-f_n^{(\tau_k)}\right\|^p}{\mu_k^p}\\
&=\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\frac{1}{\mu_k^p}C^pE\sigma^{(p)}(f^{(\tau_{k+1})}-f^{(\tau_k)})^p\\
&=C^p\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\frac{1}{\mu_k^p}E\sum_{n=0}^{\infty}E_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^p I_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

由于

$$\begin{aligned}
&E\sum_{n=0}^{\infty}E_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^p\chi_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}\\
&=E\sum_{n=0}^{\infty}E_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^p\chi_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}\chi_{\{\sigma^{(p)}(f)\leqslant 2^{k+1}\}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+E\sum_{n=0}^{\infty}E_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^p\chi_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}\chi_{\{\sigma^{(p)}(f)>2^{k+1}\}}\\
&\leqslant 2^{(k+1)p}P(\tau_k<\infty)+E\sum_{n=0}^{\infty}E_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^p\chi_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}\chi_{F_{k+1}}\\
&\leqslant 2^{(k+1)p}P(\tau_k<\infty)+\sum_{n=0}^{\infty}E(E_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^p I_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}})E_{n-1}I_{F_{k+1}}\\
&\leqslant 2^{(k+1)p}P(\tau_k<\infty)+\frac{1}{2}E\sum_{n=0}^{\infty}E_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^p I_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}},
\end{aligned}
$$

所以

$$
E\sum_{n=0}^{\infty}E_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^p I_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}\leqslant 2\cdot 2^{(k+1)p}P(\tau_k<\infty),
$$

于是 (6.19) 变为

$$
E(e^{k*})^p\leqslant P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{p}{a}}.
$$

$(e_n^k)_{n\geqslant 0}$ 是 L_p 有界鞅. X 具有 RN 性质, 故存在函数 e^k 是 $(3,a,p)$ 原子. 由 e^k 的定义得到 (6.1). 为证 (6.1), 只需注意对于适当的常数 C,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^a&=C\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^{ka}P(\tau_k<\infty)\\
&\leqslant C\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^{ka}P(2\sup_n(E_n\chi_{F_k})>1)\\
&\leqslant C\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^p2^{ka}E\sup_n(E_n\chi_{F_k})^p\\
&\leqslant C\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^{ka}P(F_k)\\
&=C\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^{ka}P(\sigma^{(p)}(f)>2^k)\leqslant C_p\|f\|_{{}_pH_a^\sigma}^a.
\end{aligned}
$$

(ii)⇒ (i). 注意对于 $(3,a,p)$ 原子 e 有 $\|e^*\|_p\leqslant P(\tau<\infty)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{a}}$. 利用 Hölder 不等式得到

$$
Ee^{*a}=Ee^{*a}I_{\{\tau<\infty\}}\leqslant(Ee^{*p})^{\frac{a}{p}}P(\tau<\infty)^{1-\frac{a}{p}}\leqslant 1.
$$

类似的证明可知 X 同构于 p 光滑空间.

下面我们应用原子分解证明小指标空间的嵌入定理.

定理 5 设 $0<a\leqslant 1<p\leqslant 2$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) 存在 $C>0$, 使得每个 X 值鞅 $f=(f_n)$ 满足

$$\|f\|_{H_\alpha} \leqslant C\|f\|_{pH_\alpha^\sigma}; \tag{6.20}$$

(iii) 存在 $C>0$, 使得每个 X 值鞅 $f=(f_n)$ 满足

$$\|f\|_{H_\alpha} \leqslant C\|f\|_{pPH_\alpha^S}. \tag{6.21}$$

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii), (iii). 不妨设 (6.20) 右端为有限. 由定理 1, f 有关于 $(1,\alpha,\infty;p)$ 的原子分解 $f_n=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k e_n^k$, $n\geqslant 0$, 并且 (6.2) 成立. 由于 $\sup\limits_k\left\|e^{k*}\right\|_\alpha<\infty$, 故

$$E(f^*)^a \leqslant \sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^a E(e^{k*})^a \leqslant C\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^a \leqslant C\|f\|_{pH_\alpha^\sigma}.$$

此即 (6.20). 类似地可利用定理 2 证明 (6.21) 成立.

(ii), (iii)$\Rightarrow$ (i). 设 $f=(f_n)$ 是 WP 鞅, $E\sigma^{(p)}(f)^p=\sum\limits_{n=0}^{\infty}E\|\mathrm{d}f_n\|^p<\infty$. 由 Hölder 不等式, $E\sigma^{(p)}(f)^a\leqslant(E\sigma^{(p)}(f)^p)^{\frac{a}{p}}<\infty$, 故 $f\in {}_pH_a^\sigma$. 注意此时 $S_n^{(p)}(f)=\sigma_n^{(p)}(f)$, $\forall n\geqslant 1$, 故 $\|f\|_{pPH_a^S}\leqslant\|f\|_{pH_a^\sigma}$, $f\in {}_pPH_a^S$. 对于鞅 $(f_{n+m}-f_n)_{m\geqslant 0}$ 应用 (6.20) 或 (6.21), 得到

$$\|f_{m+n}-f_n\|_\alpha \leqslant C\left\|S^{(p)}(f)-S_{n-1}^{(p)}(f)\right\|_a = C\left\|\sigma^{(p)}(f)-\sigma_{n-1}^{(p)}(f)\right\|_a.$$

由控制收敛定理知道 f_n 是 L_α 中 Cauchy 序列, 从而依概率收敛. 所以 X 同构于 p 光滑空间.

定理 6　设 $0<a\leqslant 1$, $2\leqslant q<\infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 凸空间;

(ii) 存在 $C>0$, 使得每个 X 值鞅 $f=(f_n)$ 满足

$$\|f\|_{qH_a^S} \leqslant C\|f\|_{PH_a}; \tag{6.22}$$

(iii) 存在 $C>0$, 使得每个 X 值鞅 $f=(f_n)$ 满足

$$\|f\|_{qH_a^\sigma} \leqslant C\|f\|_{PH_a}. \tag{6.23}$$

证明　(i)$\Rightarrow$(ii), (iii). 设 $f=(f_n)\in PH_a$, 注意空间 X 具有 RN 性质, 由定理 3, f 存在 $(3,\alpha,\infty)$ 原子分解并且 (6.14) 成立. 由此分解知道 $(\mathrm{d}f_n)\chi_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}}=\mu_k\mathrm{d}e_n^k$, 于是

$$\begin{aligned}
S^{(q)}(f)^q &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\|\mathrm{d}f_n\|^q\chi_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}} \\
&= \sum_{k\in\mathbf{Z}}\sum_{n=0}^{\infty}\|\mathrm{d}f_n\|^q\chi_{\{\tau_k<n\leqslant\tau_{k+1}\}} = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^q S^{(q)}(e^k)^q.
\end{aligned}$$

注意到 $\|e^{k*}\|_\infty \leqslant P(\tau_k<\infty)^{-\frac{1}{a}}$, $\tau_k=\infty$, 时, $e^{k*}=0$, 由 X 的 q 凸性,

$$\begin{aligned}ES^{(q)}(e^k)^a &= ES^{(q)}(e^k)^a I_{\{\tau_k<\infty\}}\\ &\leqslant (ES^{(q)}(e^k)^q)^{\frac{a}{q}}P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{a}{q}}\\ &\leqslant C(E(e^{k*})^q)^{\frac{a}{q}}P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{a}{q}}\\ &\leqslant (E(e^{k*})^q I_{\{\tau_k<\infty\}})^{\frac{a}{q}}P(\tau_k<\infty)^{1-\frac{a}{q}}\leqslant C.\end{aligned}$$

利用上面式子和 (6.14) 得到

$$ES^{(q)}(f)^a \leqslant \sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^a ES^{(q)}(e^k)^a \leqslant C\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^a \leqslant C\|f\|_{PH_a}^a.$$

此即 (6.22).

类似上述两式知, $\sigma^{(q)}(f)^q=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^q\sigma^{(q)}(e^k)^q$, $E\sigma^{(q)}(e^k)^a\leqslant C$, 从而

$$E\sigma^{(q)}(f)^a \leqslant C\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_k^a \leqslant C\|f\|_{PH_a}^a.$$

此即 (6.23).

(ii), (iii) $\Rightarrow$ (i). 设 $f=(f_n)$ 为 X 值 WP 鞅, $\sup\limits_n\|f_n\|_\infty<\infty$, 则 $\|f\|_{PH_a}<\infty$. 由 (6.22) 或 (6.23) 可得 $S^{(p)}(f)<\infty$, a.e., 或 $\sigma^{(p)}(f)<\infty$,a.e.. 在后一种情形由于 $d^*(f)=\sup\limits_n\|\mathrm{d}f_n\|\in L_\infty$, Garsia 引理说明 $S^{(p)}(f)<\infty$,a.e.. 两种情况都有 X 同构于 q 凸空间.

6.7 鞅空间的共轭

像实值情况一样, B 值鞅的 Fefferman 不等式对于建立 ${}_pH_a^\sigma(X)$ 的共轭空间是重要的. 本节我们先应用 B 值鞅的 Fefferman 不等式 给出 $a>1$ 情况的 ${}_aH_p^\sigma(X)$ 的共轭空间, 然后利用原子分解方法给出 $0<a\leqslant 1$ 情况的 ${}_aH_p^\sigma(X)$ 的共轭. 此外, 本节还将对 B 值 BMO 鞅给出等价刻画.

记 X^* 是 X 的共轭, 分别以 ${}_pH_a^S(X)$, ${}_pH_a^S(X^*)$ 记 X 值的和 X^* 值的相应空间. 另外, 本节总是以 p',a' 分别记 p,a 的共轭数.

定理 1 设 $1<p\leqslant 2, 1\leqslant a\leqslant p$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) 存在 $c>0$, 使得 $\forall f\in {}_pH_a^S(X), \varphi= {}_{p'}K_{a'}(X^*)$, $f_0=\varphi_0=0$,

$$|Ef_n\varphi_n|\leqslant c\|f\|_{pH_a^S(X)}\|\varphi\|_{p'K_{a'}(X^*)},\quad n\geqslant 1. \tag{7.1}$$

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii). 当 $f \in {}_pH_a^S(X)$ 时, $\mathrm{d}f_i \in L_a(X)$, 从而 $f_n \in L_a(X)$. 当 $\varphi \in {}_{p'}K_{a'}(X^*)$ 时, 由定义, 取 $m=n$, 注意到 $p' \leqslant a'$, 则

$$\|\mathrm{d}\varphi_n\| = (E(\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|^{p'}|B_n))^{1/p'} \leqslant (E(\gamma^{p'}|B_n))^{1/p'},$$
$$\|\mathrm{d}\varphi_n\|_{a'} \leqslant \left\|(E(\gamma^{p'}|B_n))^{1/p'}\right\|_{a'} \leqslant \|\gamma\|_{a'} < \infty,$$

从而 $\varphi_n \in L_{a'}(X^*)$. 这说明积分 $Ef_n\varphi_n$ 是有意义的. 由于 $\forall n \geqslant 1$,

$$Ef_n\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} E\mathrm{d}f_i\mathrm{d}\varphi_i, \tag{7.2}$$

所以

$$\begin{aligned}
|Ef_n\varphi_n| &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|E\mathrm{d}f_iS_i^{(p)}(f)^{\frac{a}{p}-1}\mathrm{d}\varphi_iS_i^{(p)}(f)^{1-\frac{a}{p}}\right| \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}E\|\mathrm{d}f_i\|^pS_i^{(p)}(f)^{a-p}\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}E\|\mathrm{d}\varphi_i\|^{p'}S_i^{(p)}(f)^{p'(\frac{a}{p}-1)}\right)^{1/p'}. \\
&= AB.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

对于 A, 利用不等式 $\rho^\alpha - 1 \geqslant \alpha(\rho-1)\rho^{\alpha-1}$ $(\alpha \leqslant 1 \leqslant \rho)$, 并且取 $\alpha = a/p$, $\rho = S_i^{(p)}(f)^pS_{i-1}^{(p)}(f)^{-p}$, 则得到

$$S_i^{(p)}(f)^a - S_{i-1}^{(p)}(f)^a \geqslant \frac{a}{p}(S_i^{(p)}(f)^p - S_{i-1}^{(p)}(f)^p)S_{i-1}^{(p)}(f)^{a-p},$$

由此得出

$$\begin{aligned}
A^p &= \sum_{i=1}^{n}E\|\mathrm{d}f_i\|^pS_i^{(p)}(f)^{a-p} \\
&= E\sum_{i=1}^{n}(S_i^{(p)}(f)^p - S_{i-1}^{(p)}(f)^p)S_i^{(p)}(f)^{a-p} \\
&\leqslant \frac{p}{a}ES_n^{(p)}(f)^a.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

为了估计 B, 注意 X p 光滑, 则 X^* p' 凸, 于是对于 φ,

$$E\left(\sum_{i=n}^{m}\|\mathrm{d}f_i\|^{p'}|B_n\right) \leqslant cE(f_m - f_{n-1})^{p'}|B_n), \quad m \geqslant n \geqslant 0. \tag{7.5}$$

由于 $\varphi \in {}_{p'}K_{a'}(X^*)$, 故有 $\gamma \geqslant 0, \gamma \in L_{a'}$, 使得

$$E(\|\varphi_m - \varphi_{j-1}\|^{p'}|B_j) \leqslant E(\gamma^{p'}|B_j), \quad m \geqslant j \geqslant 0. \tag{7.6}$$

若归纳地定义

$$S_i^{(p)}(f)^{p'(1-\frac{a}{p})} = \sum_{j=1}^{i} Q_j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

则 Q_j 关于 B_j 可测, 由 (7.5), (7.6),

$$\begin{aligned} B^{p'} &= \sum_{i=1}^{n} E\left\|\mathrm{d}\varphi_i\right\|^{p'} S_i^{(p)}(f)^{p'(1-\frac{a}{p})} = \sum_{i=1}^{n} E\left\|\mathrm{d}\varphi_i\right\|^{p'} \sum_{j=1}^{i} Q_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} EQ_j \sum_{i=j}^{n} E(\left\|\mathrm{d}\varphi_i\right\|^{p'} |B_j) \\ &\leqslant c\sum_{j=1}^{n} EQ_j E(\left\|\varphi_i - \varphi_{j-1}\right\|^{p'} |B_j) \\ &\leqslant c\sum_{j=1}^{n} EQ_j \gamma^{p'} = CES_n^{(p)}(f)^{p'(1-\frac{a}{p})}\gamma^{p'}, \end{aligned} \tag{7.7}$$

注意 $p'\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{p}\right) + \dfrac{p'}{a'} = 1$, 应用 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned} B &\leqslant c^{1/p'}[E(S_n^{(p)}(f)^a)^{p'(\frac{1}{a}-\frac{1}{p})}(\gamma^{a'})^{p'/a'}]^{1/p'} \\ &\leqslant c^{1/p'}(ES_n^{(p)}(f)^a)^{(\frac{1}{a}-\frac{1}{p})}(E\gamma^{a'})^{1/a'}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

(7.3), (7.4), (7.8) 给出

$$|Ef_n\varphi_n| \leqslant \left(\frac{p}{a}\right)^{1/p} c^{1/p'}(ES_n^{(p)}(f)^a)^{1/a}(E\gamma^{a'})^{1/a'} = c'\left\|S_n^{(p)}(f)\right\|_a \|\gamma\|_a'.$$

γ 是使 (7.6) 成立的任一函数, 由此得到 (7.1).

(ii)⇒(i). 若 (7.1) 对于任何 ${}_pH_a^S(X)$ 与 ${}_{p'}K_{a'}(X^*)$ 中的元素成立, 则对于 $\varphi \in L_{a'}(X^*)$, 令 $\varphi_n = E(\varphi\,|B_n)$, 由 Doob 不等式,

$$\left\|\varphi^*\right\|_{a'} \leqslant a\left\|\varphi\right\|_{a'}. \tag{7.9}$$

由 $E(\left\|\varphi_m - \varphi_{n-1}\right\|^{p'} |B_n) \leqslant E((2\varphi^*)^{p'} |B_n)$ 知道 $(\varphi_n) \in_{p'} K_{a'}(X^*)$, 并且

$$\left\|(\varphi_n)\right\|_{p'K_{a'}(X^*)} \leqslant \left\|2\varphi^*\right\|_{a'} \leqslant 2p\left\|\varphi\right\|_{a'}. \tag{7.10}$$

由 (7.1), (7.10),

$$\begin{aligned} \|f_n\|_a &= \sup_{\|\varphi\|_{a'}=1} |Ef_n\varphi| = \sup_{\|\varphi\|_{a'}=1} |Ef_nE(\varphi\,|B_n)| \\ &\leqslant c\|f\|_{{}_pH_a^S(X)} \sup_{\|\varphi\|_{a'}=1} \left\|(\varphi_n)\right\|_{p'K_{a'}(X^*)} \leqslant 2ca\|f\|_{{}_aH_p^S(X)}. \end{aligned}$$

换句话说

$$\|f\|_a \leqslant c' \left\|S^{(p)}(f)\right\|_a. \tag{7.11}$$

由此得出 X 同构于 p 光滑空间. 当 $a=1$ 时, 特别地得到向量值形式的 Fefferman 定理.

推论 1　设 X p 光滑, $1<p\leqslant 2$, 则存在 $c>0$, 使得 $\forall f\in PH_1^S(X), \varphi\in \mathrm{BMO}_{p'}(X^*)(f_0=\varphi_0=0)$, $n\geqslant 1$ 有

$$|Ef_n\varphi_n| \leqslant c\,\|f\|_{{}_pH_1^S(X)}\,\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}(X^*)}. \tag{7.12}$$

现在转到 ${}_pH_a^S(X)$ 的共轭空间. 为此, 考虑更大的空间 $L_a(l_p)(X)$, 其中每个 $\theta\in L_a(l_p)(X)$ 形如 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots), \theta_i$ 是取值于 Banach 空间 X 的 R.V., 满足

$$\|\theta\| = \left[E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|\theta_i\|^p\right)^{a/p}\right]^{1/a} < \infty. \tag{7.13}$$

容易验证, $L_a(l_p)(X)$ 是 Banach 空间.

引理 1　设 X 是自反空间, $1\leqslant a\leqslant p<\infty$, 则 $L_a(l_p)^*(X)=L_{a'}(l_{p'})(X^*)$. 若 $l(\theta)$ 是 $L_a(l_p)(X)$ 上的有界线性泛函, 则存在 $\sigma\in L_{a'}(l_{p'})(X^*)$ 使得 $\|\sigma\|\leqslant\|l\|$, 并且

$$l(\theta)=\sum_{i=1}^{\infty}E\sigma_i\theta_i, \quad \forall\theta\in L_a(l_p)(X). \tag{7.14}$$

证明　先考虑 $a>1$ 的情况, 对于任意的 $\theta_i\in L_a(X)$, 若

$$\theta=(0,\cdots,0,\theta_i,0,\cdots),$$

令 $l_i(\theta_i)=l(\theta)$, 则 $|l_i(\theta_i)|\leqslant\|l\|\ \ \|\theta\|=\|l\|\,\|\theta_i\|_a$. 注意 X^* 具有 RN 性质, 从而存在 $\sigma_i\in L_{a'}(X^*), l_i(\theta_i)=E\sigma_i\theta_i, \forall\theta_i\in L_a(X)$. 由于 l 是线性的, 当 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n,0,\cdots)$ 时,

$$l(\theta)=\sum_{i=1}^{n}E\sigma_i\theta_i. \tag{7.15}$$

记 $\sigma^{(n)}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n,0,\cdots)$, 为了估计 $\left\|\sigma^{(n)}\right\|$, 注意

$$\xi_i=\sigma_i\left(\sum_{i=1}^{n}\|\sigma_i\|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}\left(\frac{a'}{p'}-1\right)} \in L_{p'}(X^*)$$

且 $L_p(X)$ 是自反空间 (见文献 [78] 定理 4.1), 故有 $\bar\theta_i\in L_p(X), \left\|\bar\theta_i\right\|_p=1$ 使得 $E\xi_i\bar\theta_i=\|\xi_i\|_{p'}$. 令 $\theta=(\theta_1,\ \cdots,\theta_n,0,\cdots)$, 其中

$$\theta_i=\bar\theta_i\left(\sum_{i=1}^{n}\|\sigma_i\|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}\left(\frac{a'}{p'}-1\right)}\|\xi_i\|_{p'}^{p'-1},$$

则

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \sum_{i=1}^{n} E\sigma_i\theta_i = \sum_{i=1}^{n} E\sigma_i\bar{\theta}_i \left(\sum_{i=1}^{n} \|\sigma_i\|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}(\frac{a'}{p'}-1)} \|\xi_i\|_{p'}^{p'-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} E\xi_i\bar{\theta}_i \|\xi_i\|_{p'}^{p'-1} = \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|_{p'}^{p'} \\ &= \sum_{i=1}^{n} E\|\sigma_i\|^{p'} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\sigma_i\|^{p'}\right)^{\frac{a'}{p'}-1} = E\left(\sum_{i=1}^{n} \|\sigma_i\|^{p'}\right)^{\frac{a'}{p'}}. \end{aligned} \tag{7.16}$$

应用 Hölder 不等式以及 $E\|\bar{\theta}_i\|^p = 1$, 得出

$$\begin{aligned} \|\theta\|^a &= E\left(\sum_{i=1}^{n} \|\bar{\theta}_i\|^p \left(\sum_{i=1}^{n} \|\sigma_i\|^{p'}\right)^{\frac{p}{p'}(\frac{a'}{p'}-1)} \|\xi_i\|_{p'}^{p(p'-1)}\right)^a /p \\ &= E\left(\sum_{i=1}^{n} \|\bar{\theta}_i\|^p \|\xi_i\|_{p'}^{p'}\right)^{a/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\sigma_i\|^{p'}\right)^{\frac{a'}{p'}(1-\frac{a}{p})} \\ &\leqslant \left[E\left(\sum_{i=1}^{n} \|\bar{\theta}_i\|^p \|\xi_i\|_{p'}^{p'}\right)\right]^{a/p} \left[E\left(\sum_{i=1}^{n} \|\sigma_i\|^{p'}\right)^{a'/p'}\right]^{1-\frac{a}{p}} \\ &\leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|_{p'}^{p'}\right]^{a/p} \left[E\left(\sum_{i=1}^{n} \|\sigma_i\|^{p'}\right)^{a'/p'}\right]^{1-\frac{a}{p}} \\ &= E\left(\sum_{i=1}^{n} \|\sigma_i\|^{p'}\right)^{a'/p'}, \end{aligned} \tag{7.17}$$

从而 $\|\theta\| \leqslant \left[E\left(\sum_{i=1}^{n} \|\sigma_i\|^{p'}\right)^{a'/p'}\right]^{1/a}$, 根据不等式 $|l(\theta)| \leqslant \|l\|\,\|\theta\|$ 容易得到

$$\left\|\sigma^{(n)}\right\| = \left[E\left(\sum_{i=1}^{n} \|\sigma_i\|^{p'}\right)^{a'/p'}\right]^{1/a'} \leqslant \|l\|. \tag{7.18}$$

n 是任意的, 由此知道 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots) \in L_{a'}(l_{p'})(X^*)$, 并且

$$l(\theta) = \lim_{n\to\infty} E\sum_{i=1}^{n} \sigma_i\theta_i = \sum_{i=1}^{\infty} E\sigma_i\theta_i.$$

于是 (7.14) 成立.

若 $a = 1$, 这时 $L_b(l_p)(X) \subset L_1(l_p)(X)$ $(\forall b > 1)$, 并且此嵌入是连续的, 从而 $L_1(l_p)(X)$ 上每个连续泛函也是 $L_b(l_p)(X)$ 上的连续泛函, 故存在 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots)$ 满足

$$\|\sigma\|_{L_{b'}(l_{p'})(X^*)} \leqslant \|l\|, \quad \forall 1 < a' < \infty,$$

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} E\sigma_i\theta_i, \quad \forall \theta \in L_b(l_p)(X).$$

从其中的第一式得到

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \|\sigma_i\|^{p'} \right)^{1/p'} \right\|_{\infty} = \lim_{b' \to +\infty} \|\sigma\|_{L_{b'}(l_{p'})(X^*)} \leqslant \|l\|.$$

引理 2　设 $1 < p \leqslant 2, p \leqslant a < \infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 光滑空间;

(ii) 存在 $c = c_{ap} > 0$, 对于每个 $\sigma \in L_a(l_p)(X)$, 若以

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} [E(\sigma_i \mid B_i) - E(\sigma_i \mid B_{i-1})], \quad \varphi_0 = 0 \tag{7.19}$$

为鞅, 则

$$\|\varphi\|_{pK_a(X)} \leqslant c\,\|\sigma\|_{L_a(l_p)(X)}. \tag{7.20}$$

证明　(i)⇒(ii). 容易验证 $\varphi = (\varphi_n)$ 确实是 X 值鞅. 记

$$g = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\sigma_i\|^p \right)^{1/p}, \quad g^* = \sup_n E(g \mid B_n), \tag{7.21}$$

$\sigma \in L_a(l_p)(X)$ 表明 $g \in L_a$. 根据 Doob 不等式 $\|g^*\|_a \leqslant a'\,\|g\|_a$, 故 $g^* \in L_a$. 当 $i \geqslant n+1$ 时,

$$\begin{aligned} E(\|\mathrm{d}\varphi_i\|^p \mid B_n) &\leqslant E(E(\|\mathrm{d}\varphi_i\|^p \mid B_{i-1} \mid B_n) \\ &\leqslant 2^{p-1} E(\|E(\sigma_i \mid B_i)\|^p + \|E(\sigma_i \mid B_{i-1})\|^p \mid B_n) \\ &\leqslant 2^p (E(\|\sigma_i\|^p \mid B_n), \end{aligned} \tag{7.22}$$

当 $i = n$ 时,

$$\begin{aligned} \|\mathrm{d}\varphi_i\|^p &\leqslant 2^{p-1}(\|E(\sigma_n \mid B_n)\|^p + \|E(\sigma_n \mid B_{n-1})\|^p) \\ &\leqslant 2^{p-1}(E(\|\sigma_n\|^p \mid B_n) + (g^*)^p), \end{aligned} \tag{7.23}$$

从 (7.22), (7.23) 得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=n}^{\infty} E(\|\mathrm{d}\varphi_i\|^p \,|B_n) &\leqslant 2^p \sum_{i=n}^{\infty} E(\|\sigma_i\|^p \,|B_n) + 2^{p-1}E((g^*)^p \,|B_n) \\
&\leqslant 2^p E(g^p \,|B_n) + 2^{p-1}E((g^*)^p \,|B_n) \\
&\leqslant 2^p E(g^p + g^{*p} \,|B_n),
\end{aligned} \tag{7.24}
$$

由于 p 的光滑性,

$$
E(\|\varphi_m - \varphi_{n-1}\|^p \,|B_n) \leqslant cE\left(\sum_{i=n}^{m} \|\mathrm{d}\varphi_i\|^p \,|B_n\right) \leqslant c2^p E(g^p + (g^*)^p \,|B_n\right).
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\|\varphi\|_{{}_pK_a(X)} &\leqslant \left\|2c^{1/p}(g^p + (g^*)^p)^{1/p}\right\|_a \\
&\leqslant 2c^{1/p} \|g + g^*\|_a \\
&\leqslant 2c^{1/p}(1+a') \|g\|_a = c' \|g\|_a .
\end{aligned}
$$

于是 (7.20) 成立, $\varphi \in_p K_a(X)$.

(ii)⇒ (i). 注意当 $f \in_p H_a^S(X)$ 时, 令 $\sigma = \mathrm{d}f = (\mathrm{d}f_1, \mathrm{d}f_2, \cdots)$, 容易知道 ${}_pH_a^S(X) \subset L_a(l_p)(X)$. 特别地,

$$
\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} [E(\mathrm{d}f_i \,|B_i) - E(\mathrm{d}f_i \,|B_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}f_i = f_n.
$$

由 (7.20) 知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\gamma \geqslant 0, \gamma \in L_a$, 使得

$$
E(\|f_m - f_{n-1}\|^p \,|B_n) \leqslant E(\gamma^p \,|B_n), \quad m \geqslant n \geqslant 0,
$$

并且

$$
\|\gamma\|_a \leqslant \|\varphi\|_{{}_pK_a(X)} + \varepsilon \leqslant c \left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\mathrm{d}f_i\|^p\right)^{1/p}\right\|_a + \varepsilon.
$$

以 $\tilde{f} = (\tilde{f}_i)$ 代替 $f = (f_n)$, 其中 $\tilde{f}_i = f_{i+n-1} - f_{n-1} (i \geqslant 0)$, 则有

$$
E\|f_m - f_{n-1}\|^p \leqslant E\gamma^p \leqslant \|\gamma\|_a^p \leqslant \left(c \left\|\left(\sum_{i=n}^{\infty} \|\mathrm{d}f_i\|^p\right)^{1/p}\right\|_a + \varepsilon\right)^p.
$$

注意到 $\sum\limits_{i=n}^{\infty} \|\mathrm{d}f_i\|^p \downarrow 0$, 根据 Fatou 引理, 存在 $n_0 \in N$, 当 $m \geqslant n \geqslant n_0$ 时,

$$
E\|f_m - f_{n-1}\|^p \leqslant (c+1)^p \varepsilon^p.
$$

从而 f_n 在 L_p 中以及 a.e. 收敛. 重复定理 1 中使用过的证明得出, X 同构于 p 光滑空间.

定理 2　设 $2 \leqslant q < \infty, 1 \leqslant a \leqslant q$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 凸空间;

(ii) 存在 $c = c_{qa} > 0$, $\forall l \in {}_qH_a^S(X)^*$, 相应地存在 $\varphi \in {}_{q'}K_{a'}(X^*)$, 使得

$$l(f) = \lim_{n\to\infty} Ef_n\varphi_n, \quad \forall f \in_q H_a^S(X), \tag{7.25}$$

并且 $\|\varphi\|_{q'K_{a'}(X^*)} \leqslant c\|l\|$.

证明　(i)⇒(ii). 把 ${}_qH_a^S(X)$ 当作 $L_a(l_q)(X)$ 的子空间, 其中每个 $\theta = \mathrm{d}f = (\mathrm{d}f_1, \mathrm{d}f_2, \cdots)$. 根据 Hahn-Banach 延拓定理, 当 $l \in_q H_a^S(X)^*$ 时, 将 l 延拓为 $L_a(l_q)(X)$ 上的有界线性泛函, 并且保持原范数不变. 由引理 1, 存在 $\sigma \in L_{a'}(l_{q'})(X^*)$, 使得 (7.14) 成立. 注意当 X 是 q 凸空间时, X^* 是 q' 光滑的. 引理 2 保证了存在鞅 $\varphi = (\varphi_n) \in_{q'} K_{a'}(X^*)$, 使得

$$l(f) = \lim_{n\to\infty} l(f_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n E\sigma_i f_n = \lim_{n\to\infty} Ef_n\varphi_n,$$

$$\|\varphi\|_{q'K_{a'}(X^*)} \leqslant c\|\sigma\| \leqslant c\|l\|.$$

(ii) ⇒ (i). 设 f 是一致有界鞅 (如 $f^* \leqslant M < \infty$), 考虑停止于 n 的鞅 $f^{(n)}$, 显然 $f^{(n)} \in {}_qH_a^S(X)$. $\forall l \in {}_qH_a^S(X)^*$, 取 $\varphi \in {}_{q'}K_{a'}(X^*)$ 使 (7.25) 成立. 此时 $\forall \varepsilon > 0, \|\varphi\|_{q'} \leqslant c(\|l\| + \varepsilon)$, 从而

$$|Ef_n\varphi_n| \leqslant \|f_n\|_q \|\varphi_n\|_{q'} \leqslant c\|f_n\|_p (\|l\| + \varepsilon),$$
$$\lim_{n\to\infty} \left|l(f^{(n)})\right| = \lim_{n\to\infty} |Ef_n\varphi_n| \leqslant cM(\|l\| + \varepsilon).$$

根据共鸣定理, $f^{(n)}$ 是 ${}_qH_a^S(X)$ 中的有界序列, 从而

$$\left\|S^{(q)}(f)\right\|_a < \infty, \quad S^{(q)}(f) < \infty, \text{a.e.}.$$

这一事实表明 X 同构于 q 凸空间.

定理 3　设 $1 \leqslant a \leqslant 2$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间;

(ii) ${}_2H_a^S(X)^* \sim_2 K_{a'}(X^*)$.

证明　(i)⇒(ii). 由于 X 同构于 2 光滑空间, 定理 1 成立. 这说明

$${}_2K_{a'}(X^*) \subset_2 H_a^S(X)^*,$$

并且嵌入是连续的. X 又同构于 2 凸空间, 于是定理 2 成立, 所以 ${}_2H_a^S(X)^* \subset {}_2K_{a'}(X^*)$. 此时 $\forall l \in {}_2H_a^S(X)^*, f \in {}_2H_a^S(X)$,

$$l(f) = \lim_{n\to\infty} Ef_n\varphi_n = \sum_{i=1}^{\infty} E\mathrm{d}f_i\mathrm{d}\varphi_i.$$

这里 $\varphi \in {}_2K_{a'}(X^*)$ 使得

$$c_1 \|\varphi\|_{{}_2K_{a'}(X^*)} \leqslant \|l\| \leqslant c_2 \|\varphi\|_{{}_2K_{a'}(X^*)},$$

其中 c_1, c_2 仅与 a 有关. 于是 (ii) 成立.

(ii)⇒(i). (ii) 反过来说明 (7.1) 和 (7.25) 成立. (7.1) 表明 X 同构于 2 光滑空间, (7.25) 表明 X 同构于 2 凸空间. 根据 Kwapien 定理, X 同构于 Hilbert 空间.

现在让我们用原子分解方法给出空间 ${}_pH_a^\sigma(X)$, $PH_a(X)(0 < a \leqslant 1)$ 的共轭, 这里要用到 Lipschitz 鞅空间.

设 $\mathcal{A}^{(n)}$ 是 σ 代数 B_n 中所有原子的集合, $\omega_n = \sum_{I\in\mathcal{A}^{(n)}} P(I)\chi_I$. 当 $1 \leqslant p < \infty, \beta \geqslant 0$ 时, 考虑满足下面条件的 X 值鞅 $f = (f_n)$ 的全体:

$$\sup_n \left\| \sup_{m\geqslant n} \omega_n^{-\beta}(E_n \|f_m - \theta_n\|^p)^{1/p} \right\|_\infty < \infty,$$

若 $\theta_n = f_n$, 记之为 ${}_p\lambda^\beta(X)$; 若 $\theta_n = f_{n-1}$, 则记为 ${}_p\Lambda^\beta(X)$. 并且以上述数值分别作为 f 在相应空间的范数 $\|\cdot\|_{{}_p\lambda^\beta}, \|\cdot\|_{{}_p\Lambda^\beta}$.

若 $f_\infty = \lim_{n\to\infty} f_n$ a.e., 范数 $\|\cdot\|_{{}_p\lambda^\beta}$ 有一个等价表示

$$\|f\|_{{}_p\lambda^\beta} = \sup_\tau p(\tau < \infty)^{-\frac{1}{p}-\beta} \|f_\infty - f_\tau\|_p. \tag{7.26}$$

其中 "sup" 遍历所有停时 τ. 实际上对于 $f \in {}_p\lambda^\beta$, 记 (7.26) 右端为 b, 则 $\forall\tau$,

$$\begin{aligned} E_\tau \|f_\infty - f_\tau\|^p &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n \|f_\infty - f_n\|^p \chi_{\{\tau=n\}} \\ &\leqslant \|f\|_{{}_p\lambda^\beta}^p \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^{\beta p}\chi_{\{\tau=n\}} = \|f\|_{{}_p\lambda^\beta}^p P(\tau < \infty)^{\beta p}. \end{aligned}$$

或者

$$P(\tau < \infty)^{-1}E\|f_\infty - f_\tau\|^p = E\|f_\infty - f_\tau\|^p \leqslant \|f\|_{{}_p\lambda^\beta}^p P(\tau < \infty)^{\beta p},$$

即 $b \leqslant \|f\|_{{}_p\lambda^\beta}$. 反之, $\forall\, n$ 与 $A \in \mathcal{A}^{(n)}$, 定义 $\tau_A = n\chi_A + \infty\chi_{A^c}$, 则

$$P(A)^{-1-\beta p}\int_A \|f_\infty - f_n\|^p \mathrm{d}P \leqslant b^p.$$

或者

$$\omega_n^{-\beta}(E_n\|f_\infty - f_n\|^p)^{1/p} \leqslant b,$$

于是 $\|f\|_{p\lambda^\beta} \leqslant b$. 所以 (7.26) 成立.

注意 6.4 节中的鞅空间 ${}_p\mathcal{L}_a(X)$ 与 ${}_pL_a(X)$ 的范数 $\|\cdot\|_{p\mathcal{L}_a}, \|\cdot\|_{pL_a}$ 也有一个等价表示. 若 γ 满足 $\gamma^{-1} = p^{-1} - a^{-1} \geqslant 0$,

$$G_p^a = \left\{ g = (g_n)_{n\geqslant 0}\colon\ g_n \in L^\gamma, E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|g_n\|^p\right)^{\frac{\gamma}{p}} \leqslant 1 \right\},$$

则当 $1 < p \leqslant a < \infty$ 或 $-\infty \leqslant a < 0$ 时,

$$\|f\|_{p\mathcal{L}_a} = \sup_{g\in G_p^a}\left(E\sum_n \|g_n\|^p \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\|\mathrm{d}f_k\|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{7.27}$$

$$\|f\|_{pL_a} = \sup_{g\in G_p^a}\left(E\sum_n \|g_n\|^p \left(\sum_{k=n}^{\infty}\|\mathrm{d}f_k\|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7.28}$$

上述事实与实值鞅情况的证明完全类似 (见文献 [161]), 此处不再赘述.

定理 4 设 $1 < p \leqslant 2, -\infty \leqslant a < 0$ 或 $a = \infty, \beta = -a^{-1} \geqslant 0, X$ 同构于 p 光滑空间, 则

(i) 存在 $c = c_{p,a} > 0$, 使得每个 $f \in {}_p\mathcal{L}_a(X)$ 满足

$$\|f\|_{p\lambda^\beta} \leqslant c\|f\|_{p\mathcal{L}_a}; \tag{7.29}$$

(ii) 存在 $c = c_{p,a} > 0$, 使得每个 $f \in {}_pL_a(X)$ 满足

$$\|f\|_{p\Lambda^\beta} \leqslant c\|f\|_{pL_a}. \tag{7.30}$$

证明 这里仅证 (i), 类似地可证明 (ii). 设 $f = (f_n) \in {}_p\mathcal{L}_a(X), \forall A \in \mathcal{A}^{(m)}$, 取 $g = (g_n)$: $g_m = P(A)^{-1/\gamma}\chi_A$, 当 $n \neq m$ 时, $g_n = 0$. 显然 $g \in G_p^a$. X 具有 RN 性质, 故 f_n 在 L_p 中收敛, 其极限仍记为 f_∞. 由 (7.27)

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p\mathcal{L}_a}^p &\geqslant E\sum_{n=0}^{\infty}\|g_n\|^p \sum_{k=n+1}^{\infty}\|\mathrm{d}f_k\|^p = E\|g_m\|^p\sum_{k=m+1}^{\infty}\|\mathrm{d}f_k\|^p \\
&= EP(A)^{-p/\gamma}\chi_A\sum_{k=m+1}^{\infty}\|\mathrm{d}f_k\|^p \\
&\geqslant cP(A)^{-\frac{p}{\gamma}-1}\int_A E_m\|f_\infty - f_m\|^p\,\mathrm{d}P.
\end{aligned}$$

于是

$$\left(\frac{1}{P(A)}\int_A E_m\|f_\infty - f_m\|^p\,\mathrm{d}P\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c_{p,a}\|f\|_{p\mathcal{L}_a} P(A)^\beta. \tag{7.31}$$

由于 $\beta \geqslant 0$, 当 A 不含 B_n 原子时, 若 $P(A)$ 很小, $E_m\|f_\infty - f_m\|^p \chi_A$ 亦很小, 此即 $E_m\|f_\infty - f_m\|^p \chi_A = 0$, 若 A 不含 B_m 原子. 而当 $A = I$ 是 B_m 原子时 (7.31) 成立, 于是

$$(E_m\|f_\infty - f_m\|^p)^{1/p} \leqslant C_{p,a}\|f\|_{p\mathcal{L}_a}\omega_n^\beta,$$

并且

$$\|f\|_{p\lambda^\beta} = \sup_n \left\|\omega_n^{-\beta}(E_m\|f - f_m\|^p)^{\frac{1}{p}}\right\|_\infty \leqslant c_{p,a}\|f\|_{p\lambda^\beta}.$$

即 $p\mathcal{L}_a(X)$ 连续嵌入 ${}_p\lambda^\beta(X)$.

定理 5 设 $2 \leqslant q < \infty, -\infty \leqslant a < 0$ 或 $a = \infty, \beta = -a^{-1} \geqslant 0$, X 同构于 q 凸空间, 则

(i) 存在 $c = c_{q,a} > 0$, 使得每个 $f \in {}_q\lambda^\beta(X)$ 满足

$$\|f\|_{q\mathcal{L}_a} \leqslant c\|f\|_{q\lambda^\beta}; \tag{7.32}$$

(ii) 存在 $c = c_{p,a} > 0$, 使得每个 $f \in {}_q\Lambda^\beta(X)$ 满足

$$\|f\|_{qL_a} \leqslant c\|f\|_{q\Lambda^\beta}. \tag{7.33}$$

证明 这里仅证 (i), 类似地证明 (ii). 设 $f = (f_n) \in_q \lambda^\beta(X)$, 由 (7.27) 和 q 凸性,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{q\mathcal{L}_a}^q &= \sup_{g\in G_q^a} E\sum_{n=0}^\infty \|g_n\|^q \left(\sum_{k=n+1}^\infty \|\mathrm{d}f_k\|^q\right) \\
&\leqslant c_1 \sup_{g\in G_q^a} E\sum_{n=0}^\infty \|g_n\|^q \sup_{m>n} E_n\|f_m - f_n\|^q \\
&= c\sup_{g\in G_q^a} E\sum_{n=0}^\infty \|g_n\|^q\omega_n^{q\beta}\left(\omega_n^{-q\beta}\sup_{m>n} E_n\|f_m - f_n\|^q\right) \\
&\leqslant c\|f\|_{q\lambda^\beta}^q \sup_{g\in G_q^a} E\sum_{n=0}^\infty \|g_n\|^q\omega_n^{q\beta}.
\end{aligned} \tag{7.34}$$

设 $r_n = \left(\sum_{k\leqslant n}\|g_k\|^q\right)^{\gamma/q}$, 则 $E(r_n) \leqslant 1$, $r_n\omega_n \leqslant 1$, 于是

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^\infty \|g_n\|^q\omega_n^{q\beta} &\leqslant \sum_{n=0}^\infty \left(r_n^{1-\frac{q}{a}} - r_{n-1}^{1-\frac{q}{a}}\right) r_n^{\frac{q}{a}} \\
&= \sum_{n=0}^\infty \left(\left(r_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{a}}\right)^q - \left(r_{n-1}^{\frac{1}{q}-\frac{1}{a}}\right)^q\right)\left(r_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{a}}\right)^{t-q},
\end{aligned} \tag{7.35}$$

其中 t 满足 $t(q^{-1}-a^{-1})=1$, $t=qa(a-t)^{-1}\leqslant q$, 利用初等不等式

$$\lambda(\rho-1)\rho^{\lambda-1}\leqslant\rho^{\lambda}-1,\qquad \rho\geqslant 1, 0<\lambda\leqslant 1,$$

取 $\rho=\left(\dfrac{B}{A}\right)^{q}$, $B^q\geqslant A^q$, $\lambda=\dfrac{t}{q}$ 得 $(B^q-A^q)B^{t-q}\leqslant\dfrac{q}{t}(B^t-A^t)$ $(0\leqslant t\leqslant q)$, 再取 $B=\lambda_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{a}}$, $A=\lambda_{n-1}^{\frac{1}{q}-\frac{1}{a}}$, 则

$$\left(\left(\lambda_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{a}}\right)^q-\left(\lambda_{n-1}^{\frac{1}{q}-\frac{1}{a}}\right)^q\right)\left(\lambda_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{a}}\right)^{t-q}\leqslant\frac{q}{t}\left(\left(\lambda_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{a}}\right)-\left(\lambda_{n-1}^{\frac{1}{q}-\frac{1}{a}}\right)^t\right).$$

(7.35) 变为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|g_n\|^q\omega_n^{q\beta}\leqslant\frac{q}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\lambda_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{a}}\right)^t-\left(\lambda_{n-1}^{\frac{1}{q}-\frac{1}{a}}\right)^t\right)=\frac{q}{t}\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\lambda_{n-1}).$$

从而

$$\begin{aligned}\|f\|_{{}_q\mathcal{L}_a}^q&\leqslant c\|f\|_{{}_q\lambda^\beta}^q\sup\frac{q}{t}E\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\lambda_{n-1})\\&\leqslant\frac{cq}{t}\|f\|_{{}_q\lambda^\beta}^q\sup E(r_\infty)\leqslant c\|f\|_{{}_q\lambda^\beta}^q,\end{aligned}$$

即 ${}_q\lambda^\beta(X)$ 可连续嵌入 ${}_p\mathcal{L}_a(X)$.

根据 Kwapien 定理得到:

推论 2　设 $-\infty\leqslant a<0$ 或者 $a=\infty$, $\beta=-a^{-1}\geqslant 0$, X 同构于 Hilbert 空间, 则 ${}_2\lambda^\beta(X)\sim{}_2\mathcal{L}_a(X)$, ${}_2\Lambda^\beta(X)\sim{}_2L_a(X)$.

定理 6　设 X 同构于 p 光滑空间, $1<p\leqslant 2$, $0<a\leqslant 1$, 则在等距同构意义下

$$_{p'}\lambda^\beta(X^*)\subset_p H_a^\sigma(X)^*,\quad {}_{p'}\lambda^\beta(X^*)\subset_p PH_a^S(X)^*,\tag{7.36}$$

其中 $\beta=\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{p'}\geqslant 0$.

证明　(i) 往证 ${}_{p'}\lambda^\beta(X^*)\subset{}_pH_a^\sigma(X)^*$. 若 $f\in{}_pH_p^\sigma(X)\subset{}_pH_a^\sigma(X)$, 则存在停时 τ_k, $(1,a,\infty;p)$ 原子 e^k 及实数 $\mu_k, k\in\mathbf{Z}$, 使得 $\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}\mu_ke^k=f$, 这里的级数在 ${}_pH_p^\sigma(X)$ 中收敛. 由于 ${}_pH_p^\sigma(X)\subset L_p(X)$, ${}_{p'}\lambda^\beta(X^*)\subset L_{p'}(X^*)$, 故

$$l_\varphi(f)=E(f\varphi)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\mu_kE(e^k\varphi),\quad\forall f\in{}_pH_p^\sigma(X),\ \varphi\in{}_{p'}\lambda^\beta(X^*)$$

有意义. 由原子 e^k 的定义, $E(e^k\varphi)=E(e^k(\varphi-\varphi^{\tau_k}))$. 利用 Hölder 不等式与 X 的

p 光滑性得到

$$
\begin{aligned}
|l_\varphi(f)| &\leqslant \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\mu_k \, \|E(e^k\varphi)| \leqslant \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\mu_k| \left\|e^k\right\|_p \|\varphi-\varphi^{\tau_k}\|_{p'} \\
&\leqslant \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\mu_k| \, c_p \left\|\sigma^{(p)}(e^k)\right\|_p \|\varphi-\varphi^{\tau_k}\|_{p'} \\
&= c_p \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\mu_k| (E\sigma^{(p)}(e^k)^p P(\tau_k\neq\infty))^{\frac{1}{p}} \|\varphi-\varphi^{\tau_k}\|_{p'} \\
&\leqslant c_p \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\mu_k| P(\tau_k\neq\infty)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{a}} \|\varphi-\varphi^{\tau_k}\|_{p'} \\
&\leqslant c_p \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\mu_k| \, \|\varphi\|_{p'\lambda^\beta(X^*)},
\end{aligned}
$$

其中 $\beta=\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{p'}$. 由于 $0<a\leqslant 1$, 于是

$$
|l_\varphi(f)|^a \leqslant c\sum_{k\in\mathbf{Z}} |u_k|^a \, \|\varphi\|^a_{p'\lambda^\beta(X^*)},
$$

从而

$$
|l_\varphi(f)| \leqslant c\,\|f\|_{{}_pH^\sigma_a(X)} \, \|\varphi\|_{p'\lambda^\beta(X^*)}, \tag{7.37}
$$

其中 $c_p, c>0$ 为仅与 p 或 p,a 有关的常数. 这说明 l_φ 可连续地延拓为 ${}_pH^\sigma_a(X)$ 上的线性泛函, 且 $\|l_\varphi\| \leqslant c\|\varphi\|_{p'\lambda^\beta(X^*)}$. 从而得出在等距同构意义下 ${}_{p'}\lambda^\beta(X^*)\subset {}_pH^\sigma_a(X)^*$.

(ii) 为证 ${}_{p'}\lambda^\beta(X^*)\subset {}_pPH^S_a(X)^*$. 注意 ${}_pPH^S_p(X)\subset {}_pPH^S_a(X), {}_pPH^S_p(X)\subset L_p(X)$, ${}_{p'}\lambda^\beta(X^*)\subset L_{p'}(X^*)$. 类似于 (7.37) 可以证明

$$
|l_\varphi(f)|\leqslant c\|f\|_{{}_pPH^S_a(X)}\|\varphi\|_{p'\lambda^\beta(X^*)}, \quad f\in {}_pPH^S_a(X), \ \varphi\in_{p'}\lambda^\beta(X^*). \tag{7.38}
$$

这说明 l_φ 可连续地延拓为 ${}_pPH^S_a(X)$ 上的线性泛函, 并且 $\|l_\varphi\|\leqslant c\|\varphi\|_{p'\lambda^\beta}$. 于是在等距同构意义下, ${}_{p'}\lambda^\beta(X^*)\subset_p PH^S_a(X)^*$.

定理 7 设 $0<a\leqslant 1$. 若 X 具有 RN 性质, 则

$$
{}_2\lambda^\beta(X^*)\subset PH_a(X)^*, \qquad \beta=\frac{1}{a}-1;
$$

若 X 自反, 则

$$
{}_1\lambda^\beta(X^*)\subset PH_a(X)^*, \qquad \beta=\frac{1}{a}-2.
$$

证明 (i) 设 X 具有 RN 性质, 由 $PH_2(X) \subset PH_a(X), PH_2(X) \subset L_2(X)$, ${}_2\lambda^\beta(X^*) \subset L_2(X^*)$, 类似于 (7.37) 的证明知

$$|l_\varphi(f)| \leqslant C\|f\|_{PH_a(X)}\|\varphi\|_{{}_2\lambda^\beta(X^*)}, \quad \forall f \in PH_a(X), \varphi \in {}_2\lambda^\beta(X^*).$$

这说明 l_φ 可连续地延拓为 $PH_a(X)$ 上的线性泛函, 且 $\|l_\varphi\| \leqslant c\|\varphi\|_{{}_2\lambda^\beta(X)}$.

(ii) 设 X 自反, 由 $L_\infty(X) \subset PH_a(X)$, ${}_1\lambda^\beta(X^*) \subset L_1(X^*)$, $L_\infty(X) = L_\infty(X^{**})$, 类似地可证

$$|l_\varphi(f)| \leqslant c\|f\|_{PH_a(X)}\|\varphi\|_{{}_1\lambda^\beta(X^*)}, \quad \forall f \in L_\infty(X), \varphi \in {}_1\lambda^\beta(X^*).$$

由此得到 $\|l_\varphi\| \leqslant c\|\varphi\|_{{}_1\lambda^\beta(X^*)}$.

定理 8 设 X 同构于 q 凸空间, $2 \leqslant q < \infty, 0 < a \leqslant \frac{1}{2}$ 或者 $2 \leqslant q \leqslant \frac{2a}{2a-1}$, $\frac{1}{2} < a \leqslant 1$, 则在等距同构意义下,

$$ {}_qH_a^\sigma(X)^* \subset {}_{q'}\lambda^\beta(X^*), \tag{7.39}$$

其中 $\beta = \frac{1}{a} - \frac{2}{q'} \geqslant 0$.

证明 设 $l \in {}_qH_a^\sigma(X)^*$, 只需证明存在 $\varphi \in {}_{q'}\lambda^\beta(X^*)$, 使得 $l = l_\varphi$ 并且 $\|\varphi\|_{{}_{q'}\lambda^\beta(X^*)} \leqslant \|l\|$. 为此, 首先由 $0 < a \leqslant 1$ 和 q 凸性得到

$$\begin{aligned}\|f\|_{{}_qH_a^\sigma(X)} &= \left\|\sigma^{(q)}(f)\right\|_a \leqslant \left\|\sigma^{(q)}(f)\right\|_1 \\ &= E\left(\sum_{n=1}^\infty E_{n-1}\|\mathrm{d}f_n\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(E\left(\sum_{n=1}^\infty \|\mathrm{d}f_n\|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c\|f\|_q.\end{aligned}$$

其中用到 Garsia 不等式, 于是 $L_q(X) \subset {}_qH_a^\sigma(X)$. 从而存在 $\varphi \in L_{q'}(X^*)$, 使得 $l(f) = E(f\varphi)$, $\forall f \in L_q(X)$. $\forall\tau$, 设 $\zeta = \varphi - \varphi^\tau$, 则 $\zeta \in L_p(X^*)$. $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $\varphi_\varepsilon \in L_q(X^{**})$, $\|\varphi_\varepsilon\|_q < 1 + \varepsilon$, 使得

$$\|\zeta\|_{q'} = \|\zeta - \zeta^\tau\|_{q'} = E((\zeta - \zeta^\tau)\varphi_\varepsilon) = E(\zeta(\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon^\tau))$$

一致凸空间是自反的, 故 $\varphi_\varepsilon \in L_q(X)$. 特别地, 存在 $\alpha \in L_q(X), \|\alpha\|_q \leqslant 2$, 使得 $\|\zeta\|_{q'} = E(\zeta(\alpha - \alpha^\tau))$. 令

$$g = 4^{-1}cP(\tau \neq \infty)^{-\frac{1}{a}+\frac{1}{q'}}(\alpha - \alpha^\tau), \quad \text{常数 } c \text{ 待定}, \tag{7.40}$$

g 满足 $\sigma^{(q)}(g)=\sigma^{(q)}(g)\chi_{\{\tau\neq\infty\}}$. 由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\|g\|_{{}_qH_a^\sigma(X)}&=4^{-1}cP(\tau\neq\infty)^{-\frac{1}{a}+\frac{1}{q'}}(E\sigma^{(q)}(\alpha-\alpha^\tau)^a\chi_{\{\tau\neq\infty\}})^{\frac{1}{a}}\\&\leqslant P(\tau\neq\infty)^{-\frac{1}{a}+\frac{1}{q'}}(E(\sigma^{(q)}(\alpha-\alpha^\tau)^q)^{a/q}P(\tau\neq\infty)^{1-\frac{a}{q}})^{\frac{1}{a}}\\&\leqslant 4^{-1}c(E\sigma^{(q)}(\alpha-\alpha^\tau)^q)^{\frac{1}{q}}P(\tau\neq\infty)^{\frac{1}{q'}-\frac{1}{q}}\\&\leqslant 4^{-1}cc_q\|\alpha-\alpha^\tau\|_q\leqslant 1,\end{aligned}$$

选取 $cc_q'=1$ 即可, 于是

$$\begin{aligned}\|l\|\geqslant|l(g)|&=E(g\varphi)=E(g(\varphi-\varphi^\tau))=E(g\zeta)\\&=E\left(\frac{(\alpha-\alpha^\tau)\zeta}{4c_{q'}P(\tau\neq\infty)^{\frac{1}{a}-\frac{1}{q'}}}\right)=\frac{1}{c_q}\|\zeta\|_{q'}P(\tau\neq\infty)\\&=\frac{1}{c_q}\|\varphi-\varphi^\tau\|_{q'}P(\tau\neq\infty)^{-\frac{1}{a}+\frac{1}{q'}}\\&=\frac{1}{c_q}\|\varphi-\varphi^\tau\|_{q'}P(\tau\neq\infty)^{-\frac{1}{a}-\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{p}\right)}=\frac{1}{c_q}\|\varphi\|_{{}_{q'}\lambda^\beta(X^*)},\end{aligned}\tag{7.41}$$

即在等距同构定义下, ${}_qH_a^\sigma(X)^*$ 连续嵌入 ${}_{q'}\lambda^\beta(X^*)$.

推论 3 设 X 同构于 Hilbert 空间, $0<a\leqslant 1$, $\beta=\dfrac{1}{a}-1$, 则

$${}_2H_a^\sigma(X)^*\sim{}_2\lambda^\beta(X^*).\tag{7.42}$$

6.8 加权与内插

我们将讨论鞅的某些加权不等式, 其中所用的权函数是通常的 A_p 类权函数. 之后将叙述正规鞅的实内插空间的性质. 并由此给出 q 凸性与 p 光滑性在内插空间的保持性.

设 $z\in L^1(\Omega)$ 是严格正的随机变量, $Ez=1$ 时称 z 是测度变换. $\hat{P}=zP$ 是由 z 产生的测度 $\left(\hat{P}(A)=\int_A z\mathrm{d}P,\forall\ A\in B\right)$. 记 $z_n=E(z|B_n)$, $n\geqslant 1$. 称 z 满足 S 条件, 若存在常数 K 使得

$$\frac{1}{K}z_{n-1}\leqslant z_n\leqslant Kz_{n-1},\text{a.e.},\quad\forall n\geqslant 1.\tag{8.1}$$

当 z 满足 S 条件时, 记成 $z\in S$. 条件 S^-,S^+ 分别表示 z 只满足上式左边或右边的不等式. 称 $z\in A_p$ $(p\geqslant 1)$, 若存在常数 c_p 使得

$$E(z|B_n)E(z^{-\frac{1}{p-1}}|B_n)^{p-1}\leqslant c_p,\ \text{a.e.},\quad\forall n\geqslant 1,\quad p>1,\tag{8.2}$$

$$z_n \leqslant c_1 z, \text{ a.e.}, \quad \forall n \geqslant 1, \quad p = 1.$$

称 $z \in \tilde{A}_p$, 若 $\dfrac{1}{z} \in \hat{A}_p$(即关于测度 $\hat{P}$ 的 A_p 条件). 记

$$A_\infty = \bigcup_{p \geqslant 1} A_p, \quad \tilde{A}_\infty = \bigcup_{p \geqslant 1} \tilde{A}_p.$$

本节关于测度 $\hat{P}$ 的有关记号用关于测度 P 的相应记号加 "^" 表示. 例如, $\hat{E}$ 表示关于 $\hat{P}$ 的条件期望. 当谈到 $f = (f_n)$ 是一个 X 值鞅时, 若无特别声明均指关于测度 P 的鞅.

关于 $\hat{A}_p$ 权函数, 有一些等价的刻画条件, 例如, $z \in \hat{A}_p$ 当且仅当对于任何非负可测函数 ξ,

$$E(\xi \,|B_\tau) \leqslant c\hat{E}(\xi^p \,|B_\tau)^{1/p}, \tag{8.3}$$

其中 τ 是任一停时.

定理 1 设 $z \in \hat{A}_\infty$, $f = (f_n)$ 是 X 值鞅, 若存在非负增加适应过程 $D = (D_n)$ 满足 $\|\mathrm{d}f_n\| \leqslant D_{n-1}$. 则关于测度 $\hat{P} = zP$ 的下面事实成立:

(i) 当 X 同构于 q 凸空间时, 函数对 $(S^{(q)}(f), f^* + D^*)$ 满足好 λ 不等式

$$\hat{P}(S^{(q)}(f) > \alpha\lambda, f^* + D^* \leqslant \beta\lambda) \leqslant \varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{P}(S^{(q)}(f) > \lambda); \tag{8.4}$$

(ii) 当 X 同构于 p 光滑空间时, 函数对 $(f^*, S^{(p)}(f) + D^*)$ 满足好 λ 不等式

$$\hat{P}(f^* > \alpha\lambda, S^{(p)}(f) + D^* \leqslant \beta\lambda) \leqslant \varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{P}(f^* > \lambda). \tag{8.5}$$

证明 (i) $\forall \lambda > 0, \beta > 0$, 定义 $\tau = \inf\left\{n\colon f_n^* + D_n > \beta\lambda\right\}$, 因为 $\|\mathrm{d}f_n\| \leqslant D_{n-1}$, 故 $\|f_n\| \leqslant \|f_{n-1}\| + \|\mathrm{d}f_n\| \leqslant f_{n-1}^* + D_{n-1}$. 因此 $f_\tau^* \leqslant f_{\tau-1}^* + D_{\tau-1} \leqslant \beta\lambda$. 考虑停止鞅 $f^{(\tau)} = (f_{n\wedge\tau})$. 对同一个 λ 定义停时

$$\sigma = \inf\left\{n\colon S_n^{(q)}(f^{(\tau)}) > \lambda\right\},$$

则 $S_{\sigma-1}^{(q)}(f^{(\tau)}) \leqslant \lambda$. 注意 $\{f^* + D_\infty \leqslant \beta\lambda\} \subset \{\tau = \infty\}$, 故当 $\alpha > 1$ 时,

$$\begin{aligned} &\{S^{(q)}(f) > \alpha\lambda, f^* + D^* \leqslant \beta\lambda\} \subset \{S^{(q)}(f^{(\tau)}) \leqslant \alpha\lambda\}, \\ &\{S^{(q)}(f^{(\tau)}) > \alpha\lambda\} \subset \{S^{(q)}(f^{(\tau)})^q - S_{\sigma-1}^{(q)}(f^{(\tau)})^q > (\alpha^q - 1)\lambda^q\}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

因此

$$
\begin{aligned}
&E(\chi_{\{S^{(q)}(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}}\,|B_\sigma)\\
\leqslant\ &\frac{1}{(\alpha^q-1)\lambda^q}E(S^{(q)}(f^{(\tau)})^q-S^{(q)}_{\sigma-1}(f^{(\tau)})^q\,|B_\sigma)\\
\leqslant\ &\frac{1}{(\alpha^q-1)\lambda^q}\left[E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|f^{(\tau)}_{\sigma+i}-f^{(\tau)}_{\sigma+i-1}\right\|^q\middle|B_\sigma\right)+E(\|f^{(\tau)}_\sigma-f^{(\tau)}_{\sigma-1}\|^q\,|B_\sigma)\right]\\
\leqslant\ &\frac{1}{(\alpha^q-1)\lambda^q}\left[E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|f^{(\tau)}_{\sigma+i}-f^{(\tau)}_{\sigma+i-1}\right\|^q\middle|B_\sigma\right)+2\beta^q\lambda^q\right].
\end{aligned}
\tag{8.7}
$$

因为 X 同构于 q 凸空间, 故

$$
E\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|f^{(\tau)}_{\sigma+i}-f^{(\tau)}_{\sigma+i-1}\right\|^q|B_\sigma\right)\leqslant KE\left(\left\|f^{(\tau)}_{\sigma+i}\right\|^q-\left\|f^{(\tau)}_{\sigma+i-1}\right\|^q|B_\sigma\right)\leqslant 2K\beta^q\lambda^q.
$$

由 Fatou 引理得到

$$
E\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|f^{(\tau)}_{\sigma+i}-f^{(\tau)}_{\sigma+i-1}\right\|^q|B_\sigma\right)\leqslant 2K\beta^q\lambda^q. \tag{8.8}
$$

结合 (8.7), (8.8) 两式知

$$
E(\chi_{\{S^{(q)}(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}}\,|B_\sigma)\leqslant\frac{2(K+1)\beta^q}{\alpha^q-1}.
$$

由 $z\in\tilde{A}_\infty$, 根据 (8.3), 存在 $r\geqslant 1$ 和 $c_r>0$, 使得

$$
\begin{aligned}
\hat{E}(\chi_{\{S^{(q)}(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}}\,|B_\sigma)&\leqslant c_rE(\chi_{\{S^{(q)}(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}}\,|B_\sigma)^{\frac{1}{r}}\\
&\leqslant c_r\left(\frac{2(K+1)\beta^q}{\alpha^q-1}\right)^{\frac{1}{r}}\triangleq\varepsilon_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}
$$

因为 $\{S^{(q)}(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}\subset\{\sigma<\infty\}\in B_\sigma$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\hat{P}(S^{(q)}(f^{(\tau)})>\alpha\lambda)&=\int_{\{\sigma<\infty\}}\hat{E}(\chi_{\{S^{(q)}(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}}\,|B_\sigma)\mathrm{d}\hat{P}\\
&\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{P}(\sigma<\infty)=\varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{P}(S^{(q)}(f^{(\tau)})>\lambda)\\
&\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{P}(S^{(q)}(f)>\lambda).
\end{aligned}
$$

考虑到 (8.7) 即知

$$
\hat{P}(S^{(q)}(f^{(\tau)})>\alpha\lambda,f^*+D^*\leqslant\beta\lambda)\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{P}(S^{(q)}(f)>\lambda).
$$

注意对固定的 $\alpha > 1$, 有 $\lim\limits_{\beta\to 0}\varepsilon_{\alpha,\beta} = 0$. 这说明 $(S^{(q)}(f), f^* + D^*)$ 关于测度 $\hat{P}$ 满足好 λ 不等式.

(ii) 类似地, 对 $\lambda > 0, \beta > 0$ 定义停时

$$\tau = \inf\{n:\ S_n^{(p)}(f) + D_n > \beta\lambda\}, \quad \sigma = \inf\{n:\ \|f_n^{(\tau)}\| > \lambda\}.$$

考虑关于 σ 代数族 $(B_{\sigma+i-1}, i \geqslant 1)$ 的鞅 $g = (g_i)_{i\geqslant 1} = (f_{\sigma+i-1}^{(\tau)} - f_{\sigma-1}^{(\tau)})_{i\geqslant 1}$. 注意

$$g^* = \sup_{i\geqslant 1}\left\|f_{\sigma+i-1}^{(\tau)} - f_{\sigma-1}^{(\tau)}\right\| \geqslant \left(\sup_{i\geqslant 1}\left\|f_{\sigma+i-1}^{(\tau)}\right\| - \left\|f_{\sigma-1}^{(\tau)}\right\|\right) \geqslant f^{(\tau)*} - f_{\sigma-1}^{(\tau)*},$$

$$S^{(p)}(g) = S^{(p)}(f^{(\tau)}) = S_{\tau-1}^{(p)}(f) \leqslant \beta\lambda.$$

由于 p 光滑性, 对 g 应用 Davis 不等式得到

$$\begin{aligned} E(\chi_{\{f^{(\tau)*}>\alpha\lambda\}}|B_\sigma) &\leqslant E(\chi_{\{f^{(\tau)*}-f_{\sigma-1}^{(\tau)*}>(\alpha-1)\lambda\}}|B_\sigma) \\ &\leqslant E(\chi_{\{g^*>(\alpha-1)\lambda\}}|B_\sigma) \\ &\leqslant (\alpha-1)^{-1}\lambda^{-1}E(g^*|B_\sigma) \\ &\leqslant (\alpha-1)^{-1}\lambda^{-1}E(S^{(p)}(g)|B_\sigma) \leqslant c\beta(\alpha-1)^{-1}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

再利用 $z \in \tilde{A}_\infty$ 的条件, 与 (i) 的证明类似可知, $(f^*, S^{(q)}(f) + D^*)$ 关于测度 $\hat{P}$ 满足好 λ 不等式.

定理 2　设 $1<p\leqslant 2\leqslant q<\infty, z\in\tilde{A}_\infty\cap S^-$, Φ 是限制增长的 Young 凸函数, 则

(i) X 同构于 q 凸空间, 当且仅当存在 $c > 0$, 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$\left\|S^{(q)}(f)\right\|_\Phi \leqslant c\left\|f^*\right\|_\Phi; \tag{8.10}$$

(ii) X 同构于 p 光滑空间, 当且仅当存在 $c > 0$, 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$\|f^*\|_\Phi \leqslant c\left\|S^{(p)}(f)\right\|_\Phi, \tag{8.11}$$

其中 $\|f^*\|_\Phi = \sup\limits_{n\geqslant 1}\|f_n^*\|_\Phi$.

证明　1° 假设 X 同构于 q 凸空间, 对于 f 作 Davis 分解 $f = g + h$, 由于 $z \in S^{-1}$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\mathrm{d}h_n\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}2(d_n^*-d_{n-1}^*)+\sum_{n=1}^{\infty}2E(d_n^*-d_{n-1}^*\,|B_{n-1})$$
$$=2d^*+2\sum_{n=1}^{\infty}z_{n-1}\hat{E}\left((d_n^*-d_{n-1}^*)\frac{1}{z_n}\middle|B_{n-1}\right)$$
$$=2d^*+2K\sum_{n=1}^{\infty}\hat{E}(d_n^*-d_{n-1}^*|B_{n-1}).$$

由 6.1 节推论 2, 我们有

$$\hat{E}\Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty}\hat{E}(d_n^*-d_{n-1}^*\,|B_{n-1})\right)\leqslant C\hat{E}\Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty}(d_n^*-d_{n-1})\right)\leqslant C\hat{E}\Phi(d^*).$$

对于 g, 由定理 1(i) 知 $(S^{(q)}(g),g^*+4d^*)$ 满足好 λ 不等式. 由 6.1 节引理 4 得到

$$\hat{E}\Phi(S^{(q)}(g))\leqslant C\hat{E}\Phi(g^*+4d^*).\tag{8.12}$$

利用以上诸式得到

$$\begin{aligned}\hat{E}\Phi(S^{(q)}(f))&\leqslant C\hat{E}\Phi(S^{(q)}(g))+C\hat{E}\Phi(S^{(q)}(h))\\&\leqslant C\hat{E}\Phi(g^*+4d^*)+C\hat{E}\Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|\mathrm{d}h_n\|\right)\\&\leqslant C\hat{E}\Phi(f^*)+C\hat{E}\Phi(h^*)+C\hat{E}\Phi(4d^*)\\&\quad+C\hat{E}\Phi\left(2K\sum_{n=1}^{\infty}\hat{E}(d_n^*-d_{n-1}^*\,|B_{n-1})\right)\\&\leqslant C\hat{E}\Phi(f^*)+C\hat{E}\Phi(d^*)\leqslant C\hat{E}\Phi(f^*),\end{aligned}$$

C 仅与 Φ 和 z 有关, 于是 (8.10) 得证.

反过来, 若 (8.10) 成立, f 是一致有界 X 值 WP 鞅, 则 $S^{(q)}(f)<\infty$ $\hat{P}$- a.e., 但测度 P 和 $\hat{P}$ 是几乎处处一致的, 于是由 6.2 节定理 1 X 同构于 q 凸空间.

2° (ii) 的证明与 (i) 类似, 只须注意将以上不等式中的 $S^{(q)}(f)$ 换为 f^*, 将 f^* 换为 $S^{(p)}(f)$. 另外反过来的证明仿照上一节定理 2 (iii) ⇒ (i), 但需注意是在测度 $\hat{P}$ 之下.

推论 1 设 Φ 是限制增长的 Young 凸函数, 则 X 同构于 Hilbert 空间, 当且仅当对于任何 $z\in\tilde{A}_\infty\cap S^{-1}$, 存在 $C>0$ 使得每个 X 值鞅满足

$$C^{-1}\|f^*\|_\Phi\leqslant\left\|S^{(2)}(f)\right\|_\Phi\leqslant C\|f^*\|_\Phi.\tag{8.13}$$

让我们转到 B 值正规鞅的实内插空间. 在这一部分中我们记鞅 f 的极大函数为 Mf, 而将实值可测函数 $\varphi(\omega)$ 的非增重排记为 φ^*, 这里

$$\varphi^*(t)=\inf\{s:\ m(s,f)\leqslant t\},\ m(s,f)=\mu\{\omega:\ f(\omega)>s\}.$$

实值可测函数的 Lorentz 空间记为 $L_{ra}(0<r,a\leqslant\infty,r\neq\infty)$, 它们是满足下面条件的函数 φ 的全体:

$$\|\varphi\|_{L_{ra}}=\left(r^{-1}a\int_0^\infty (t^{\frac{1}{r}}\varphi^*(t))^a t^{-1}\mathrm{d}t\right)^{1/a}<\infty,\qquad 0<a<\infty,$$
$$\|\varphi\|_{L_{ra}}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{r}}\varphi^*(t)<\infty.\qquad a=\infty.$$

对于取值于 Banach 空间 X 的鞅, 定义两类空间

$${}_pH^S_{ra}=\{f=(f_n):\ \|f\|_{{}_pH^S_{ra}}=\left\|S^{(p)}(f)\right\|_{L_{ra}}<\infty\},$$

$$H_{ra}=\{f=(f_n):\ \|f\|_{H_{ra}}=\|Mf\|_{L_{ra}}<\infty\}.$$

特别地, ${}_pH^S_{aa}$ 即 ${}_pH^S_a$, H_{aa} 即 H_a.

对于相容的一对 Banach 空间 X_0,X_1, 记 $x\in X_0+X_1$ 的 K 泛函为

$$K(t,x)=K(t,x,X_0,X_1)=\inf_{x=x_0+x_1}\{\|x_0\|_{x_0}+t\|x_1\|_{x_1}\},$$

其中 $x_0\in X_0,x_1\in X_1,X_0,X_1$ 的内插空间记为 $(X_0,X_1)_{\theta a}$, 它是由满足下述条件的如上元素 x 构成的:

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta a}}=\left(\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,x))^a t^{-1}\mathrm{d}t\right)^{1/a}<\infty,\quad 0<\theta<1\leqslant a<\infty;$$
$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta a}}=\sup_{t>0}t^{-\theta}K(t,x)<\infty,\qquad 0<\theta<1,\ a=\infty.$$

为讨论上述两类鞅空间的内插, 需要先对 K 泛函做出估计.

引理 1　设 $0<a<\infty,1<p<\infty$, 则存在 $c_a>0$, 使得对于任何正规鞅 f,

(i) 若 $K(t,f)=\inf_{f=f_0+f_1}\{\|f_0\|_{{}_pH^S_a}+t\|f_1\|_{{}_pH^S_\infty}\}$, 则

$$C_a^{-1}\int_0^{t^a}S^{(p)}(f)^{*a}(s)\mathrm{d}s\leqslant K(t,f)^a\leqslant C_a\int_0^{\mathrm{d}t^a}S^{(p)}(f)^{*a}(s)\mathrm{d}s;\tag{8.14}$$

(ii) 若 $K(t,f)=\inf_{f=f_0+f_1}\{\|f_0\|_{H_a}+t\|f_1\|_{H_\infty}\}$, 则

$$C_a^{-1}\int_0^{t^a}(Mf)^{*a}(s)\mathrm{d}s\leqslant K(t,f)^a\leqslant C_a\int_0^{\mathrm{d}t^a}(Mf)^{*a}(s)\mathrm{d}s.\tag{8.15}$$

这里常数 $d \geqslant 1$ 是由鞅的正规性条件确定的, 按照规定 $S^{(p)}(f)^*$ 与 $(Mf)^*$ 分别代表 $S^{(p)}(f)$ 与 Mf 的非增重排函数.

证明 (ii) 的证明与 (i) 类似, 这里仅证 (i). 对于任何 $f = f_0 + f_1 \in {}_pH_a^S + {}_pH_\infty^S$, 其中$f_0 = (f_{0n}), f_1 = (f_{1n})$, 由于

$$S^{(p)}(f) \leqslant S^{(p)}(f_0) + S^{(p)}(f_1),$$

$$S^{(p)}(f)^* \leqslant S^{(p)}(f_0)^* + \left\|S^{(p)}(f_1)\right\|_\infty.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^{t^a} S^{(p)}(f)^{*a}(s)\mathrm{d}s &\leqslant \int_0^{t^a} (S^{(p)}(f_0)^* + \|S^{(p)}(f_1)\|_\infty)^a(s)\mathrm{d}s \\ &\leqslant C_a\left(\int_0^{t^a} (S^{(p)}(f_0)^{*a}(s))\mathrm{d}s + t^a\|S^{(p)}(f_1)\|_\infty^a\right) \\ &\leqslant C_a(\|f_0\|_{{}_pH_a^S}^a + t^a\left\|S^{(p)}(f_1)\right\|_\infty^a) \\ &\leqslant C_a(\|f_0\|_{{}_pH_a^S} + t\left\|f_1\right\|_{{}_pH_\infty^S})^a,\end{aligned}$$

其中 $C_a = 1$, 若 $0 < a < 1$; $C_a = 2^{a-1}$, 若 $1 \leqslant a < \infty$. 关于 f_0, f_1 取下确界即得到 (i) 的右端.

反过来, 对于 $f \in {}_pH_a^S + {}_pH_\infty^S$, 由正规性, 取停时 τ, 使得

$$S_\tau^{(p)}(f) \leqslant \lambda, \quad P(\tau < \infty) \leqslant \mathrm{d}P(S^{(p)}(f) > \lambda),$$

其中 $\lambda = S^{(p)}(f)^*(t^a)$, 考虑 f 的如下分解 $f_0 + f_1$, 其中 $f_0 = (f_n - f_{\tau\wedge n}), f_1 = (f_{\tau\wedge n})$, 注意

$$S_\tau^{(p)}(f_0)\,|_{\tau=\infty} = S^{(p)}(f) - S_\tau^{(p)}(f)\,|_{\tau=\infty} = 0,$$

$$P(\tau < \infty) \leqslant \mathrm{d}P(S^{(p)}(f) > S^{(p)}(f)^*(t^a)) < \mathrm{d}t^a.$$

于是

$$\begin{aligned}K(t,f)^a &\leqslant C_a(\|f_0\|_{{}_pH_a^S}^a + t^a\left\|f_1\right\|_{{}_pH_\infty^S}^a) \\ &= C_a\left(\int_{\{\tau<\infty\}} S^{(p)}(f_0)^a\mathrm{d}P + t^a\lambda^a\right) \\ &\leqslant C_a\left(\int_{\{\tau<\infty\}} S^{(p)}(f)^a\mathrm{d}P + \int_{\{\tau<\infty\}} S^{(p)}(f_1)^a\mathrm{d}P + t^a\lambda^a\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant C_a \left(\int_0^{\mathrm{d}t^a} S^{(p)}(f)^{*a}(s)\mathrm{d}s + \lambda^a P(\tau < \infty) + t^a \lambda^a \right)$$

$$\leqslant C_a \left(\int_0^{\mathrm{d}t^a} S^{(p)}(f)^{*a}(s)\mathrm{d}s + (d+1)t^a S^{(p)}(f)^{*a} t^a \right)$$

$$= C_a \int_0^{\mathrm{d}t^a} S^{(p)}(f)^{*a}(s)\mathrm{d}s.$$

此即 (8.6) 的右端.

定理 3 设 $0 < a, b \leqslant \infty, a \neq \infty, 0 < \theta < 1, r = a(1-\theta)^{-1}, 1 < p < \infty$, 则

$$({}_pH_a^S,\ {}_pH_\infty^S)_{\theta b} = {}_pH_{rb}^S, \quad (H_a, H_\infty)_{\theta b} = H_{rb}. \tag{8.16}$$

证明 这里仅证前一式, 另一个类似可证. 对于 $f \in {}_pH_a^S + {}_pH_\infty^S$ 和 $b < \infty$, 由 (8.14) 的左端得出

$$S^{(p)}(f)^*(t^a) \leqslant \left(t^{-a} \int_0^{t^a} S^{(p)}(f)^{*a}(s)\mathrm{d}s \right)^{1/a} \leqslant C_a t^{-1} K(t,f). \tag{8.17}$$

从而

$$\begin{aligned}
\left\|S^{(p)}(f)\right\|_{L_{rb}}^b &= r^{-1} b \int_0^\infty (t^{\frac{1}{r}} S^{(p)}(f)^*(t))^b t^{-1}\mathrm{d}t \\
&= C_{ra} \int_0^\infty (t^{a/r} S^{(p)}(f)^*(t^a))^b t^{-1}\mathrm{d}t \\
&\leqslant C_{ra} \int_0^\infty t^{a/r-1} K(t,f)^b t^{-1}\mathrm{d}t \\
&= C_{ra} \left\|f\right\|_{({}_pH_a^S,\ {}_pH_\infty^S)_{\theta b}}^b .
\end{aligned}$$

若 $b = \infty$, 应用 (8.17) 得到

$$\begin{aligned}
\left\|S^{(p)}(f)\right\|_{L_{r\infty}} &= \sup_{t>0} t^{1/r} S^{(p)}(f)^*(t) = \sup_{t>0} t^{a/r} S^{(p)}(f)^*(t^a) \\
&\leqslant C_a \sup_{t>0} t^{a/r} K(t,f) = C_a \left\|f\right\|_{({}_pH_a^S, {}_pH_\infty^S)_{\theta\infty}} .
\end{aligned}$$

这说明 $({}_pH_a^S, {}_pH_\infty^S)_{\theta b} \subset {}_pH_{rb}^S$ 并且嵌入是连续的.

反过来, 若 $b < \infty$, 应用 (8.14) 右端的不等式,

$$\begin{aligned}
\left\|f\right\|_{({}_pH_{a,p}^S H_\infty^S)_{\theta b}} &= \int_0^\infty (t^{-\theta} K(t,f))^b t^{-1}\mathrm{d}t \\
&\leqslant C_a \int_0^\infty (t^{-\theta b} \left(\int_0^{\mathrm{d}t^a} S^{(p)}(f)^{*a}(s)\mathrm{d}s \right)^{b/a} t^{-1}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C_{\theta a}\int_0^\infty t^{(1-\theta)b/a}\left(t^{-1}\int_0^t S^{(p)}(f)^{*a}(s)\mathrm{d}s\right)^{b/a}t^{-1}\mathrm{d}t\\
&\leqslant C_{\theta a}\int_0^\infty t^{(1-\theta)b/a}S^{(p)}(f)^{*b}(t)t^{-1}\mathrm{d}t\\
&=C_{\theta a}\left\|S^{(p)}(f)\right\|_{L_{rb}}^b,
\end{aligned}
$$

其中倒数第二步用到了通常的 Hardy 不等式. 对于 $b=\infty$, 类似地

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{({}_pH_a^S,{}_pH_\infty^S)_{\theta\infty}}&=\sup_{t>0}t^{-\theta}K(t,f)\\
&\leqslant C_a\sup_{t>0}t^{-\theta}\left(\int_0^{\mathrm{d}t^a}S^{(p)}(f)^{*a}(s)\mathrm{d}s\right)^{1/a}\\
&\leqslant C_a\sup_{t>0}t^{(1-\theta)/a}S^{(p)}(f)^*(t)t^{-\theta}\left(\int_0^{\mathrm{d}t^a}s^{\theta-1}\mathrm{d}s\right)^{1/a}\\
&=C_{\theta a}\left\|S^{(p)}(f)\right\|_{L_{r\infty}}.
\end{aligned}
$$

总之有 ${}_pH_{rb}^S\subset({}_pH_a^S,\ {}_pH_\infty^S)_{\theta b}$, 并且嵌入是连续的.

推论 2 设 $0<a_i,\ b_i\leqslant\infty, a_0\neq a_1,\ \ a_i\neq\infty,\ i=0,1,\ \dfrac{1}{a}=\dfrac{1-\theta}{a_0}+\dfrac{\theta}{a_1},\ 0<\theta<1, 1<p<\infty, 1\leqslant b\leqslant\infty$, 则

$$
({}_pH_{a_0b_0}^S,\ {}_pH_{a_1b_1}^S)_{\theta b}={}_pH_{ab}^S,\quad (H_{a_0b_0},\ H_{a_1b_1})_{\theta b}=H_{ab}. \tag{8.18}
$$

证明 取 $0<r<\min(a_0,a_1)$, 令 $\theta_i=1-r/a_i$, 则 $0<\theta_i<1,\ i=0,1,\theta_0\neq\theta_1$, 由定理 3,

$$
({}_pH_{a_i}^S,\ {}_pH_\infty^S)_{\theta_ib}=\ {}_pH_{a_ib}^S,\quad (H_{a_i},H_\infty)_{\theta_ib}=H_{a_ib}.
$$

由一般内插空间的稳定性定理, 取 $\delta=(1-\theta)\theta_0+\theta\theta_1$, 则

$$
\begin{aligned}
({}_pH_{a_0b_0}^S,\ {}_pH_{a_1b_1}^S)_{\theta b}&=(({}_pH_r^S,\ {}_pH_\infty^S)_{\theta_0b_0},({}_pH_r^S,\ {}_pH_\infty^S)_{\theta_1b_1})_{\theta b}\\
&=({}_pH_r^S,\ {}_pH_r^S)_{\delta b}=\ {}_pH_{ab}^S,
\end{aligned}
$$

此即 (8.18) 第一式, 同样地得到第二式.

通过令 $a_i=b_i(i=0,1)$ 以及 $a=b$, 得到

推论 3 设 $0<a_i<\infty, i=0,1\ a_0\neq a_1,\ \ \dfrac{1}{a}=\dfrac{1-\theta}{a_0}+\dfrac{\theta}{a_1},\ 1<p<\infty, 0<\theta<1$, 则

$$
({}_pH_{a_0}^S,\ {}_pH_{a_1}^S)_{\theta b}=\ {}_pH_{ab}^S,\quad (H_{a_0},H_{a_1})_{\theta b}=H_{ab}. \tag{8.19}
$$

特别地,

$$
({}_pH_{a_0}^S,\ {}_pH_{a_1}^S)_{\theta a}=\ {}_pH_a^S,\quad (H_{a_0},H_{a_1})_{\theta a}=H_a. \tag{8.20}
$$

定理 4　设 X 是 Banach 空间, $0 < a, b < \infty$, 则

(i) X q 可凸当且仅当存在 $c = c_{q,a,b} < \infty$ 使得对于每个正规鞅 f,

$$\|f\|_{{}_pH^S_{ab}} \leqslant c\|f\|_{H_{ab}}; \tag{8.21}$$

(ii) X p 可光滑当且仅当存在 $c = c_{p,a,b} > 0$ 使得对于每个正规鞅 f,

$$\|f\|_{H_{ab}} \leqslant c\|f\|_{{}_pH^S_{ab}}; \tag{8.22}$$

(iii) X 同构于 Hilbert 空间当且仅当存在 $c = c_{a,b} > 0$ 使得对于每个正规鞅 f,

$$c^{-1}\|f\|_{H_{ab}} \leqslant \|f\|_{{}_2H^S_{ab}} \leqslant c\|f\|_{H_{ab}}. \tag{8.23}$$

证明　当 $a = b$ 时, 此定理即 6.2 节中的定理. 若 $a \neq b$, 容易选取 $\theta, a_0, a_1, a_0 \neq a_1$ 使得 (8.19) 成立. 若 X 同构于 q 凸空间, 则存在 $C_{a_0}, C_{a_1} > 0$ 使得对于任何 X 值鞅 f,

$$\|f\|_{{}_qH^S_{a_0}} \leqslant C_{a_0}\|f\|_{H_{a_0}}, \quad \|f\|_{{}_qH^S_{a_1}} \leqslant C_{a_1}\|f\|_{H_{a_1}}, \tag{8.24}$$

此时

$$\begin{aligned} K(t, f, {}_qH^S_{a_0}, {}_qH^S_{a_1}) &= \inf_{f=f_0+f_1}\{\|f_0\|_{{}_qH^S_{a_0}} + t\|f_1\|_{{}_qH^S_{a_1}}\} \\ &\leqslant C_{a_0}K(C_{a_1}t/C_{a_0}, f, H_{a_0}, H_{a_1}). \end{aligned}$$

由此应用 (8.19), 得出

$$\begin{aligned} \|f\|^b_{{}_qH^S_{ab}} &\leqslant c\|f\|^b_{({}_qH_{a_0},\,{}_qH^S_{a_1})_{\theta b}} \\ &= c\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t, f, {}_qH^S_{a_0}, {}_qH^S_{a_1}))^b t^{-1}\mathrm{d}t \\ &= c\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t, f, H_{a_0}, H_{a_1})^b t^{-1}\mathrm{d}t \\ &\leqslant c\|f\|^b_{(H_{a_0}, H_{a_1})}\,\theta b \leqslant c\|f\|^b_{H_{ab}}. \end{aligned}$$

此即 (8.21).

反过来, 若 (8.21) 对于任何 X 值鞅 f 成立, 这说明恒等算子 $I : H_{ab} \to {}_qH^S_{ab}$, $If = f$ 是有界的. 根据内插性质, 特别地, I 在 H_{a_0} 上的限制是有界的. 此时对于任何 WP 鞅 $f = (f_n)$, 若 $\|f\|_\infty = \sup\limits_n \|f_n\|_\infty < \infty$, 则

$$\|f\|_{{}_qH^S_{ab}} = \left(\frac{b}{a}\int_0^\infty (t^{\frac{1}{a}}S^{(q)}(f)^*)^b t^{-1}\mathrm{d}t\right)^{1/b} < \infty,$$

从而 $S^{(q)}(f) < \infty$, a.e., X 同构于 q 凸空间. 以上证明了 (i).

(ii) 的必要性的证明与 (i) 类似. 现证明当 (8.22) 成立时, X 必同构于 p 光滑空间. 设有 WP 鞅 $f=(f_n)$, 满足 $\|S^{(p)}(f)\|_\infty<\infty$, 考虑鞅 $f^{(n)}=(f_k-f_n)_{n\leqslant k<\infty}$, 容易知道当 $n\to\infty$ 时,

$$S^{(p)}(f^{(n)})=(S^{(a)}(f)^p-S_n^{(p)}(f)^p)^{1/p}\downarrow 0,$$

由于当 $r_1\leqslant r_2$ 时, $L_{pr_1}\subset L_{Pr_2}$, 故 (8.22) 说明

$$\begin{aligned}\sup_{t>0}t^{1/a}(\sup_{k\geqslant n}\|f_k-f_n\|)^*&=\left\|(M(f^{(n)})^*\right\|_{L_\infty}\\&\leqslant c\left\|(M(f^{(n)})^*\right\|_{L_{ab}}\leqslant c\left\|S^{(p)}(f^{(n)})^*\right\|_{L_{ab}}\\&\leqslant c\left(\frac{b}{a}\int_0^{2\|S^{(p)}(f)\|_\infty}(t^{\frac{1}{a}}S^{(p)}(f^{(n)})^*)^bt^{-1}\mathrm{d}t\right)^{1/b}\to 0,\end{aligned}$$

这说明当 $n\to\infty$ 时, $\sup\limits_{k\geqslant n}\|f_k-f_n\|$ 依概率收敛于 0, 从而 f_n a.e. 收敛, X 必同构于 p 光滑空间.

由 (i) 和 (ii), 应用 Kwapien 定理得到 (iii).

现在我们转到内插空间的凸性和光滑性.

定理 5 设 X_0,X_1 是相容的 Banach 空间对, $0<\theta<1, 1<a_0,a_1<\infty, a^{-1}=(1-\theta)a_0^{-1}+\theta a_1^{-1}$, 则

$$H_a^S((X_0,X_1)_{\theta a})=(H_{a_0}^S(X_0),H_{a_1}^S(X_1))_{\theta a},\tag{8.25}$$

$$H_a((X_0,X_1)_{\theta a})=(H_{a_0}(X_0),H_{a_1}(X_1))_{\theta a}.\tag{8.26}$$

证明 为了证明 (8.25), 首先根据 Lions-Peetre 内插定理, 对于相容的 Banach 空间对 X_0,X_1, 在等价范数意义下,

$$(L_{a_0}(X_0),L_{a_1}(X_1))_{\theta a}=L_a((X_0,X_1)_{\theta a}).$$

同样地, 在序列情况下,

$$(l_{a_0}(X_0),l_{a_1}(X_1))_{\theta a}=l_a((X_0,X_1)_{\theta a}).$$

从而不难得出对于定理中的 X_0,X_1 和 θ,a,a_0,a_1, 在等价范数意义下,

$$(L_{a_0}(l_{a_0}(X_0)),L_{a_1}(l_{a_1}(X_1)))_{\theta a}=L_a(l_a((X_0,X_1)_{\theta a})),\tag{8.27}$$

其中 $L_a(l_a(X))$ 中的元素 $\xi=(\xi_0,\xi_1,\cdots)$ 的范数是

$$\|\xi\|_{L_a(l_a(X))}=\left[E\left(\sum_{n=0}^\infty\|\xi_n\|_X^a\right)\right]^{1/a}.$$

其次我们将看到对于每个鞅 $f=(f_n)\in H^S_{a_0}(X_0)+H^S_{a_1}(X_1)$, 若相应的鞅差序列为 $\mathrm{d}f=(\mathrm{d}f_n)$, 则

$$K(t,\mathrm{d}f,L_{a_0}(l_{a_0}(X_0)),L_{a_1}(l_{a_1}(X_1)))\sim K(t,f,H^S_{a_0}(X_0),H^S_{a_1}(X_1)). \tag{8.28}$$

实际上其中的一半是明显的, 由于映射 $T:H^S_{a_0}(X_0)\to L_{a_0}(l_{a_0}(X_0))$和 $T:H^S_{a_1}(X_1)\to L_{a_1}(l_{a_1}(X_1)), Tf=\mathrm{d}f$ 是等距嵌入, 同时每个鞅差序列的分解也是一个可测函数序列的分解, 故

$$\begin{aligned}
&K(t,\mathrm{d}f,L_{a_0}(l_{a_0}(X_0),L_{a_1}(l_{a_1}(X_1)))\\
&=\inf_{\mathrm{d}f=\mathrm{d}f_1+\mathrm{d}f_2}\{\|\mathrm{d}f_0\|_{L_{a_0}(l_{a_0}(X_0))}+t\,\|\mathrm{d}f_1\|_{L_{a_1}(l_{a_1}(X_1))}\}\\
&\leqslant\inf_{\mathrm{d}f=\mathrm{d}f_1+\mathrm{d}f_2}\{\|f_0\|_{H^S_{a_0}(X_0))}+t\,\|f_1\|_{H^S_{a_1}(X_1)}\}\\
&=K(t,f,H^S_{a_0}(X_0),H^S_{a_1}(X_1)).
\end{aligned}$$

为了证明另一方向的不等式, 注意对于 $\mathrm{d}f$ 的任一可测函数序列的分解 $\mathrm{d}f=\mathrm{d}\tilde{f}_0+\mathrm{d}\tilde{f}_1$, 其中 $\mathrm{d}\tilde{f}_0=(\mathrm{d}\tilde{f}_{0n}),\mathrm{d}\tilde{f}_1=(\mathrm{d}\tilde{f}_{1n})$, 自然地有一个鞅差序列分解

$$\mathrm{d}f_n=\mathrm{d}\tilde{f}_{0n}-E(\mathrm{d}\tilde{f}_{0n}\,|B_{n-1})+\mathrm{d}\tilde{f}_{1n}-E(\mathrm{d}\tilde{f}_{1n}\,|B_{n-1})=\mathrm{d}f_{0n}+\mathrm{d}f_{1n},$$

这里 $(\mathrm{d}f_{0n})=\mathrm{d}f_0,(\mathrm{d}f_{1n})=\mathrm{d}f_1$ 均为鞅差序列, 并且

$$\left\|\mathrm{d}\tilde{f}_0-\mathrm{d}f_0\right\|_{L_{a_0}(l_{a_0}(X_0))}=\left(E\sum_{n=0}^{\infty}\left\|E(\mathrm{d}\tilde{f}_{0n}\,|B_{n-1})\right\|^{a_0}\right)^{1/a_0}\leqslant\left\|\mathrm{d}\tilde{f}_0\right\|_{L_{a_0}(l_{a_0}(X_0))},$$

从而与 $\mathrm{d}f_0$ 相应的鞅 f_0 满足

$$\|f_0\|_{H^S_{a_0}(X_0)}=\|\mathrm{d}f_0\|_{L_{a_0}(l_{a_0}(X_0))}\leqslant\left\|2\mathrm{d}\tilde{f}_0\right\|_{L_{a_0}(l_{a_0}(X_0))}.$$

同样地, 对于 $\mathrm{d}f_1$ 以及相应的鞅 f_1,

$$\|f_1\|_{H^S_{a_1}(X_1)}=\|\mathrm{d}f_1\|_{L_{a_1}(l_{a_1}(X_1))}\leqslant\left\|2\mathrm{d}\tilde{f}_1\right\|_{L_{a_1}(l_{a_1}(X_1))},$$

由此得出

$$\begin{aligned}
&K(t,f,H^S_{a_0}(X_0),H^S_{a_1}(X_1))\\
&=\inf_{f=f_0+f_1}\{\|f_0\|_{H^S_{a_0}(X_0)}+t\,\|f_1\|_{H^S_{a_1}(X_1)}\}\\
&=\inf_{\mathrm{d}f=\mathrm{d}f_0+\mathrm{d}f_1}\{\|\mathrm{d}f_0\|_{L_{a_0}(l_{a_0}(X_0))}+t\,\|\mathrm{d}f_1\|_{L_{a_1}(l_{a_1}(X_1))}\}\\
&\leqslant 2\inf_{\mathrm{d}f=\mathrm{d}\tilde{f}_0+\mathrm{d}\tilde{f}_1}\left\{\left\|\mathrm{d}\tilde{f}_0\right\|_{L_{a_0}(l_{a_0}(X_0))}+t\left\|\mathrm{d}\tilde{f}_1\right\|_{L_{a_1}(l_{a_1}(X_1))}\right\}\\
&\leqslant 2K(t,\mathrm{d}f,L_{a_0}(l_{a_0}(X_0)),L_{a_1}(l_{a_1}(X_1))),
\end{aligned}$$

所以 (8.33) 成立.

现在对于 $f \in \tilde{H}_{a_0}(X_0) + \tilde{H}_{a_1}(X_1)$,

$$\begin{aligned}
\|f\|^a_{H^S_a((X_0,X_1)_{\theta a})} &= \|\mathrm{d}f\|^a_{L_a(l_a((X_0,X_1)_{\theta a}))} \\
&\leqslant C_a \|\mathrm{d}f\|_{(L_a(l_a(X_0)),L_{a_1}(l_{a_1}(X_1)))_{\theta a}} \\
&= C_a \int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, \mathrm{d}f, L_{a_0}(l_{a_0}(X_0)), L_{a_1}(l_{a_1}(X_1)))^a t^{-1} \mathrm{d}t \\
&\leqslant C_a \int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, \mathrm{d}f, H^S_{a_0}(X_0), H^S_{a_1}(X_1)))^a t^{-1} \mathrm{d}t \\
&= C_a \|f\|^a_{(H^S_{a_0}(X_0),H^S_{a_1}(X_1))_{\theta a}}.
\end{aligned}$$

反过来,$\forall f \in H^S_a((X_0,X_1)_{\theta a})$, 相应地有

$$\mathrm{d}f \in L_a(l_a((X_0,X_1)_{\theta a})) = (L_{a_0}(l_{a_0}(X_0)), L_{a_1}(l_{a_1}(X_1)))_{\theta a},$$

由上述方法可得到 f 的分解 $f_0+f_1 \in H^S_{a_0}(X_0)+H^S_{a_1}(X_1)$, 在估计 $\|f\|_{(H^S_{a_0}(X_0),H^S_{a_1}(X_1))_{\theta a}}$ 时, 上述不等式的每一步都是可逆的, 故 (8.25) 成立.

为证 (8.26), 设 $f \in (H_{a_0}(X_0), H_{a_1}(X_1))_{\theta a}$, 对于任何 n, 若 $f^{(n)}$ 是相应的停止于 n 的鞅, 先根据 Doob 不等式, 再应用 Lions-Peetre 内插定理得到

$$\begin{aligned}
\left\|f^{(n)}\right\|^a_{H_a((X_0,X_1)_{\theta a})} &\leqslant C_a \|f_n\|^a_{L_a((X_0,X_1)_{\theta a})} \\
&\leqslant C_a \|f_n\|^a_{(L_{a_0}(X_0),L_{a_1}(X_1))_{\theta a}} \\
&= C_a \int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, f_n, L_{a_0}(X_0), L_{a_1}(X_1)))^a t^{-1} \mathrm{d}t \\
&\leqslant C_a \int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, f^{(n)}, H_{a_0}(X_0), H_{a_1}(X_1)))^a t^{-1} \mathrm{d}t \\
&= C_a \left\|f^{(n)}\right\|^a_{(H_{a_0}(X_0),H_{a_1}(X_1))_{\theta a}}.
\end{aligned}$$

其中用到明显的不等式

$$K(t, f_n, L_{a_0}(X_0), L_{a_1}(X_1)) \leqslant K(t, f^{(n)}, H_{a_0}(X_0), H_{a_1}(X_1)).$$

由于 n 是任意的, 从而得到 $(H_{a_0}(X_0), H_{a_1}(X_1))_{\theta a} \subset H_a((X_0,X_1)_{\theta a})$ 并且嵌入是连续的.

反过来, 若 $f = (f_n) \in H_a((X_0,X_1)_{\theta a})$, $f^{(n)}$ 是相应的停止于 n 的鞅, 则当

$f^{(n)} \doteq f_0^{(n)} + f_1^{(n)}$ 时,

$$\left\|f_0^{(n)}\right\|_{H_{a_0}(X_0)} \leqslant a_0' \left\|f_{0n}^{(n)}\right\|_{L_{a_0}(X_0)},$$
$$\left\|f_1^{(n)}\right\|_{H_{a_1}(X_1)} \leqslant a_1' \left\|f_{1n}^{(n)}\right\|_{L_{a_1}(X_1)},$$

从而

$$\left\|f_0^{(n)}\right\|_{H_{a_0}(X_0)} + t\left\|f_1^{(n)}\right\|_{H_{a_1}(X_1)} \leqslant a_0' \|f_{0n}\|_{L_{a_0}(X_0)} + ta_0' \|f_{1n}\|_{L_{a_1}(X_1)}.$$

另一方面, 对于每个函数分解 $f_n = \tilde{f}_{0n} + \tilde{f}_{1n} \in L_{a_0}(X_0) + L_{a_1}(X_1)$, 考虑鞅分解 $f^{(n)} = f_0^{(n)} + f_1^{(n)}$, 其中

$$f_0^{(n)} = (f_{0i})_{0\leqslant i\leqslant n} = (E(\tilde{f}_{0n}\,|B_i))_{0\leqslant i\leqslant n},$$
$$f_1^{(n)} = (f_{1i})_{0\leqslant i\leqslant n} = (E(\tilde{f}_{1n}\,|B_i))_{0\leqslant i\leqslant n},$$

显然, $f_0^{(n)} + f_1^{(n)} \in H_{a_0}(X_0) + H_{a_1}(X_1)$, 并且由前面得出的不等式

$$\begin{aligned}
&K(t, f^{(n)}, H_{a_0}(X_0), H_{a_1}(X_1)) \\
=& \inf_{f^{(n)}=f_0^{(n)}+f_1^{(n)}} \{\|f_0^n\|_{H_{a_0}(X_0)} + t\|f_1^n\|_{H_{a_1}(X_1)}\} \\
\leqslant& \inf_{f^{(n)}=f_0^{(n)}+f_1^{(n)}} \{a_0' \|f_{0n}\|_{L_{a_0}(X_0)} + ta_1' \|f_{1n}\|_{L_{a_1}(X_1)}\} \\
\leqslant& \inf_{f^{(n)}=\tilde{f}_0^{(n)}+\tilde{f}_1^{(n)}} \{a_0' \left\|\tilde{f}_{0n}\right\|_{L_{a_0}(X_0)} + ta_1' \left\|\tilde{f}_{1n}\right\|_{L_{a_1}(X_1)}\} \\
=& a'_0 K(a'^{-1}_0 a'_1 t, f_n, L_{a_0}(X_0), L_{a_1}(X_1)).
\end{aligned}$$

应用 Lions-Peetre 内插定理得到

$$\begin{aligned}
&\|f^{(n)}\|^a_{(H_{a_0}(X_0), H_{a_1}(X_1))_{\theta a}} \\
=& \int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, f^{(n)}, H_{a_0}(X_0), H_{a_1}(X_1)))^a t^{-1}\mathrm{d}t \\
\leqslant& C_a \int_0^\infty (t^{-\theta} K(a'^{-1}_0 a'_1 t, f_n, L_{a_0}(X_0), L_{a_1}(X_1)))^a t^{-1}\mathrm{d}t \\
=& C_a \|f_n\|^a_{(L_{a_0}(X_0), L_{a_1}(X_1))_{\theta a}} \\
\leqslant& C_a \|f_n\|^a_{L_a((X_0, X_1)_{\theta a})} \leqslant C_a \|f^{(n)}\|^a_{H_a((X_0, X_1)_{\theta a})}.
\end{aligned}$$

这说明 $H_a((X_0, X_1)_{\theta a}) \subset (H_{a_0}(X_0), H_{a_1}(X_1))_{\theta a}$, 并且嵌入是连续的. 定理得证.

定理 6 设 X_0, X_1 是相容的 Banach 空间对.

(i) 若 X_i 分别同构于 p_i 光滑空间, $i=0,\ 1,\ 1<p_0,\ p_1\leqslant 2,\ 0<\theta<1, p^{-1}=(1-\theta)p_0^{-1}+\theta p_1^{-1}$, 则 $(X_0,X_1)_{\theta p}$ 同构于 p 光滑空间;

(ii) 若 X_i 分别同构于 q_i 凸空间, $i=0,\ 1,\ 2\leqslant q_0,\ q_1<\infty,\ 0<\theta<1, q^{-1}=(1-\theta)q_0^{-1}+\theta q_1^{-1}$,则$(X_0,X_1)_{\theta q}$ 同构于 q 凸空间.

证明 以明显的方式定义线性算子

$$T: H_{p_i}^S(X_i)\to H_{p_i}(X_i),\ S: H_{q_i}(X_i)\to H_{q_i}^S(X_i),\quad i=0,1,$$

$(Tf=f, Sf=f)$. 在 6.2 节中我们已经证明: 在 (i) 的情况下 T 是有界的, 在 (ii) 的情况下 S 是有界的. 根据 Marcinkiewicz 定理, 在 (i) 的情况下 T 是$(H_{p_0}^S(X_0),H_{p_1}^S(X_1))_{\theta p}\to(H_{p_0}(X_0),H_{p_1}(X_1))_{\theta p}$ 有界的, 在 (ii) 的情况下 S 是 $(H_{q_0}(X_0),H_{q_1}(X_1))_{\theta q}\to(H_{q_0}^S(X_0),H_{q_1}^S(X_1))_{\theta q}$ 有界的. 根据定理 5, 前者 $H_p^S((X_0,X_1)_{\theta p})\to H_p((X_0,X_1)_{\theta p})$ 有界, 后者 $H_q((X_0,X_1)_{\theta q})\to H_q^S((X_0,X_1)_{\theta q})$ 有界. 最后由定理 4 分别得到: 在 (i) 的情况下 $(X_0,X_1)_{\theta p}$ 同构于 p 光滑空间, 在 (ii) 的情况下 $(X_0,X_1)_{\theta q}$ 同构于 q 凸空间.

6.9 向量值 Littlewood-Paley 定理

本节将介绍调和分析中著名的 Littlewood-Paley 定理的向量值类比. 如果读者具有包括 Brown 运动在内的随机过程与调和函数方面的基本知识阅读起来将是方便的.

设 $D=\{z\in C:|z|<1\}$ 是复平面中的单位圆盘, ∂D 是其边界, 视 ∂D 等同于 $T=[0,2\pi]$, 具有规范 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}m=\mathrm{d}\theta/2\pi$. 本节记 $L^a(\partial D,X)$ 是 ∂D 上定义的取值于 Banach 空间 X 的 p 方可积函数全体. 若 $u\in L^a(\partial D,X)$, 则

$$u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})P_r(\theta-t)\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant r<1 \tag{9.1}$$

是 u 从 ∂D 到 D 中的调和延拓, 这里 $P_r(t)=(1-r^2)(1-2r\cos t+r^2)^{-1}$ 是 Poisson 核. 我们将 u 与它的调和延拓等同起来. 令 $u_r(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$, (9.1) 可记为卷积 $u_r=P_r*u$.

若 u 是 D 中的调和函数, $1<p<\infty$, $\forall z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\in\partial D$, 定义

$$G_p(u)(z)=\left(\int_0^1(1-r)^{p-1}|\nabla u(rz)|^p\,\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{9.2}$$

$$S_p(u)(z) = \left(\int_{\Gamma(z)} (1-|\xi|)^{p-2} |\nabla u(\xi)|^p \, \mathrm{d}A(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{9.3}$$

其中

$$|\nabla u(z)| = \left(\left| \frac{\partial u}{\partial r}(z) \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}(z) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Gamma(z) = \{\xi \in D : |\arg\xi - \arg z| < 1 - |\xi|\},$$

$\mathrm{d}A$ 是面积测度. 称 G_p 是 Littlewood-Paley G 函数, S_p 是 Luzin 面积积分. 经典调和分析中的一个重要的结论是对于任何 $1 < a < \infty$,

$$\|G_2(u)\|_a \approx \|S_2(u)\|_a \approx \|u - \hat{u}(0)\|_a, \quad \forall u \in L^a(\partial D, X), \tag{9.4}$$

其中 $\hat{u}(0)$ 是 u 的第 0 项 Fourier 系数.

现在要考虑取值于 Banach 空间的调和函数, 仍像 (9.2), (9.3) 一样定义 G_p 和 S_p, 只不过以范数代替其中的绝对值. 这里的结论的要点是像鞅的情况一样, 值空间的凸性和光滑性分别决定了 (9.4) 中单边不等式是否成立.

记 X 值调和函数的 Hardy 空间为

$$h^a(X) = \left\{ u: \ \|u\| = \sup_{0 \leqslant r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\| u(re^{i\theta}) \right\|^a \mathrm{d}\theta \right)^{\frac{1}{a}} < \infty \right\}, \quad 1 < a < \infty,$$

$$h^\infty(X) = \left\{ u: \ \|u\| = \sup_{z \in D} \|u(z)\| < \infty \right\}.$$

记它们的范数为 $\|u\| = \|u\|_{h^a(X)}$, 对于 $1 \leqslant a \leqslant \infty$, $h^a(X)$ 都是 Banach 空间. 另记径向极大函数为

$$u^*(e^{i\theta}) = \sup_{0 \leqslant r < 1} \left\| u(re^{i\theta}) \right\|, \quad e^{i\theta} \in \partial D. \tag{9.5}$$

容易由经典情况的结论得到 $\|u^*\|_a = \|u\|_{h^a(X)}$, 并且当 $1 < a \leqslant \infty$ 时,

$$\|u^*\|_a \leqslant c_a \|u\|_a, \quad \forall u \in L^a(\partial D, X).$$

对于 $0 < a < 1$, 将 $h^a(X)$ 看成 L^2 在 $\|u^*\|_a$ 之下的完备化空间, 此时 $h^a(X)$ 是拟 Banach 空间.

引理 1　若 $a > 1$, 则存在 $c = c_a > 0$ 使得对于任何调和函数 u,

$$G_a(u)(z) \leqslant cS_a(u)(z), \quad \forall z \in \partial D, \tag{9.6}$$

$$\|S_a(u)\|_a \leqslant c \|G_a(u)\|_a, \quad \forall z \in \partial D. \tag{9.7}$$

证明 不妨就 $z=1$ 加以证明. 记 $r_n=1-2^{-n}, n\geqslant 0$, 设 $r_n\leqslant s_n\leqslant r_{n+1}$, $\left\|\frac{\partial u_r}{\partial r}\right\|$ 在 s_n 达到极大值, 则

$$G_a(1)^a\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{\partial u(s_n)}{\partial r}\right\|^a\int_{r_n}^{r_{n+1}}(1-r)^{a-1}\mathrm{d}r\leqslant\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-na}\left\|\frac{\partial u(s_n)}{\partial r}\right\|^a. \tag{9.8}$$

由 Cauchy 公式, 如果 $s<1-r$, 则

$$\left\|\frac{\partial u(r)}{\partial r}\right\|=\left\|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\xi-r|=s}\frac{u'(\xi)}{\xi-r}\mathrm{d}\xi\right\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|u'(r+s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right\|\mathrm{d}\theta,$$

$$\left\|\frac{\partial u(r)}{\partial r}\right\|^a\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|u'(r+s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right\|^a\mathrm{d}\theta. \tag{9.9}$$

以 $D(r,l)$ 代表圆 $|z-r|\leqslant l$ 并且假定 $D(r,l)\subset D$, 用 s^{a-1} 乘 (9.9) 两端并且关于 s 积分得到

$$\begin{aligned}\frac{l^a}{a}\left\|\frac{\partial u(r)}{\partial r}\right\|^a&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^l s^{a-2}\int_0^{2\pi}\left\|u'(r+s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right\|^a\mathrm{d}\theta\, s\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{D(r,l)}(1-r)^{a-2}\left\|u'(z)\right\|^a\mathrm{d}A(z).\end{aligned}$$

取 $r=r_n$, 再取 $l=\varepsilon 2^{-n}$, ε 如此小, 以至于 $D(r_n,\varepsilon 2^{-n})\subset\Gamma(1)$, $n\geqslant 0$, 则

$$\pi\varepsilon^2\sum_{n=0}^{\infty}2^{-na}\left\|\frac{\partial u(r_n)}{\partial r}\right\|^a\leqslant\int_{\Gamma(1)}(1-|z|)^{a-2}\left\|u'(z)\right\|^a\mathrm{d}A(z).$$

实际上对于 $\left\|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\|$ 可以做类似的估计. 合并以上诸式即得到 (9.6). 至于 (9.7) 容易用类似的方法通过估计积分得到.

下面引理与实值情况的证明类似, 见文献 [216]、[225].

引理 2 设 X 是 Banach 空间, X^* 是 X 的共轭, $1<p,q<\infty$, 若 f 是 X 值系数三角多项式, g 是 X^* 值系数三角多项式, $\widehat{g}(0)\widehat{f}(0)=0$, 则

$$\left|\int_T g(z)f(z)\mathrm{d}m\right|\leqslant 4\int_T G_p(f)(z)G_q(g)(z)\mathrm{d}m. \tag{9.10}$$

这里 $\widehat{f}(0),\widehat{g}(0)$ 分别表示 f 与 g 的第 0 项 Fourier 系数.

回忆如果 $(W_t)_{t\geqslant 0}$ 是从 0 点出发的 Brown 运动, 则根据强 Markov 性 $(W_t)_{t\geqslant 0}$ 是连续鞅. $(W_t)_{t\geqslant 0}$ 在 ∂D 上的分布是规范 Lebesgue 测度. 当 $0\leqslant r<s\leqslant 1$ 时, W_{τ_s} 关于 $W_{\tau_r}=r\mathrm{e}^{i\theta_0}$ 的条件分布恰是 Poisson 核 $P_{r/s}(\theta_0-\theta)$. 对于任何序列 $0\leqslant r_n\uparrow 1$, 定义停时 $\tau_n=\inf\{t>0:|W_t|=r_n\}$, 若 u 在 D 中调和, 则 $u(W_{\tau_n})$ 仍是 (离散) 鞅.

引理 3　存在 $c>0$, 使得对于任何 $0<r<1$,

$$\sqrt{r}(1-\sqrt{r})\left\|\frac{\partial u_r}{\partial r}\right\|_a \leqslant c\left[E\left\|u(W_{\tau_{\sqrt{r}}})-u(W_{\tau_r})\right\|^a\right]^{1/a}. \tag{9.11}$$

证明　对于 $0\leqslant r,s<1$, 则有 $u_{sr}=P_r*u_s$. 先关于 r 微分, 再同取 $r,s=\sqrt{r}$, 得到 $\sqrt{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial r}=\left(\dfrac{\partial P}{\partial r}\Big|_{\sqrt{r}}\right)*u_{\sqrt{r}}$. 因为 $\int_0^{2\pi}\left(\dfrac{\partial P}{\partial r}\Big|_{\sqrt{r}}\right)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta=0$, 故

$$\begin{aligned}\sqrt{r}\frac{\partial u}{\partial r}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial P}{\partial r}\Big|_{\sqrt{r}}\right)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-t)})u_{\sqrt{r}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial P}{\partial r}\Big|_{\sqrt{r}}\right)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-t)})[u_{\sqrt{r}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})-u_r(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})]\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

因此

$$\sqrt{r}\left\|\frac{\partial u}{\partial r}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right\|\leqslant\frac{c}{2\pi(1-\sqrt{r})}\int_0^{2\pi}P_{\sqrt{r}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-t)})\left\|u_{\sqrt{r}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})-u_r(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right\|\mathrm{d}t.$$

利用强 Markov 性以及上面提到的 W_{τ_s} 关于 $W_{\tau_r}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ 的条件分布的性质,

$$\begin{aligned}&\sqrt{r}(1-\sqrt{r})\left\|\frac{\partial u}{\partial r}\right\|_a\\&\leqslant\frac{c}{(2\pi)^2}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}P_{\sqrt{r}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-t)})\left\|u_{\sqrt{r}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})-u_r(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right\|^a\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta\right]^{1/a}\\&=c\left[E\left\|u(W_{\tau_{\sqrt{r}}})-u(W_{\tau_r})\right\|^a\right]^{1/a}.\end{aligned}$$

引理 4　设 X 是 Banach 空间, A 是 X 值系数三角多项式, B 是复系数三角多项式且 $\hat{B}(0)=0$, 定义 $B_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=B(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta})$, $F_n=AB_n$, 则

$$G_a(F_n)(z)=\|A(z)\|\,G_a(B_n)(z)+o(n^{-1}),\quad\forall z\in\partial D. \tag{9.12}$$

证明　假如

$$A=\sum_{|j|\leqslant M}x_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta},\quad B=\sum_{|k|\leqslant N}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta},$$

则

$$F_n=\sum_{j,k}x_jc_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+kn)\theta},\quad F_n(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\sum_{j,k}x_jc_kr^{|j+kj|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+kn)\theta}.$$

由于 $k\neq0$, 当 n 充分大时上面式子中每个指标都互不相同, 从而

$$\frac{\partial F_n(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\partial r}=\sum_{j,k}x_jc_k\left|j+kn\right|r^{|j+kn|-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+kn)\theta}.$$

另一方面,

$$A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\frac{\partial B_n(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\partial r}=\sum_{j,k}x_jc_k\,|kn|r^{|kn|-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+kn)\theta}.$$

注意当 n 充分大时对于任何如上的 j,k, $|j+kn|=\mathrm{sgn}(k)j+|kn|$. 记

$$\frac{\partial F_n(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\partial r}-A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\frac{\partial B_n(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\partial r}=D_1+D_2,$$

这里

$$D_1=\sum_{j,k}x_jc_k\mathrm{sgn}(k)j\;r^{|j+kn|-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+kn)\theta},$$

$$D_2=\sum_{j,k}x_jc_k\,|kn|\;(r^{|j+kn|-1}-r^{|kn|-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+kn)\theta}.$$

对于 D_1,

$$\begin{aligned}\int_0^1(1-r)^{a-1}\,\|D_1\|^a\,\mathrm{d}r&\leqslant c_{A,B,a}\sum_{j,k}\int_0^r(1-r)^{a-1}r^{a(|j+kn|-1)}\mathrm{d}r\\&\leqslant c_{A,B,a}\sum_{j,k}\frac{1}{|j+kn|^a}=o(n^{-a}).\end{aligned}$$

对于 D_2, 注意对于充分大的 n,

$$\left|r^{|j+kn|-1}-r^{|kn|-1}\right|=r^{|kn|-1}(1-r^{|j|}),\quad jk\geqslant 1,$$

$$\left|r^{|j+kn|-1}-r^{|kn|-1}\right|=r^{|j+kn|-1}(1-r^{|j|}),\quad jk\leqslant -1,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1(1-r)^{a-1}\|D_2\|^a\mathrm{d}r\leqslant{}& c_{A,B,a}\Bigg[\sum_{jk\geqslant1}|kn|^a\int_0^1(1-r)^{2a-1}r^{a(|kn|-1)}\mathrm{d}r\\&+\sum_{jk\leqslant-1}|kn|^a\int_0^1(1-r)^{2a-1}r^{a(|j+kn|-1)}\mathrm{d}r\Bigg]\\\leqslant{}& c_{A,B,a}\Bigg[\sum_{jk\geqslant1}\frac{1}{|kn|^a}+\sum_{jk\leqslant-1}\frac{|kn|^a}{|j+kn|^{2a}}\Bigg]=o(n^{-a}).\end{aligned}$$

合并在一起即得到 (9.11).

引理 4 的结论还可以扩展到有限多个如上的乘积之和的情况, 即若 K 是一个自然数, 对于 $1\leqslant k\leqslant K$ 和一个增加自然数序列 (n_k), 设

$$F\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\sum_{k=1}^{K}A_{k,(n)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})B_{k,(n)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),$$

其中 $A_{k,(n)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = A_k(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+n_1\theta)}, \cdots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{K-1}+n_{K-1}\theta)})$ 是 $[0,2\pi]^{K-1}$ 上的 X 值系数三角多项式, $B_{k,(n)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = B_k(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_K+n_K\theta)})$ 是复系数多项式, $\hat{B}(0)=0$, 则对于 F 类似的估计式成立. 具体叙述如下, 这里将证明略去.

引理 5　存在自然数序列 (n_k), 使得

$$2^{-1}G_a(F) \leqslant \left[\sum_{k=1}^{K} G_a(A_{k,(n)}B_{k,(n)})^a\right]^{1/a} \leqslant 2G_a(F), \tag{9.13}$$

下面是本节的主要结论.

定理 1　设 $2 \leqslant q < \infty$, 则对于 Banach 空间 X 以下条件等价:

(i) X 同构于 q 凸空间;

(ii) 存在 $c = c_q > 0$, 使得

$$\|G_q(u)\|_q \leqslant c\,\|u\|_q, \quad \forall u \in L^q(\partial D, X); \tag{9.14}$$

(iii) 存在 $c = c_q > 0$, 使得

$$\|S_q(u)\|_q \leqslant c\,\|u\|_q, \quad \forall u \in L^q(\partial D, X). \tag{9.15}$$

证明　由引理 1, (ii) 与 (iii) 等价. 于是只需证明 (i) 与 (ii) 等价.

为证 (i) $\Rightarrow$(ii), 只需证明 $\forall u \in L^q$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r)^{q-1}\left\|\frac{\partial u_r}{\partial r}\right\|^q \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \leqslant c\,\|u\|_q^q, \tag{9.16}$$

以及

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r)^{q-1}\left\|\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right\|^q \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \leqslant c\,\|u\|_q^q, \tag{9.17}$$

这里 $c = c_q$ 为常数. 其实两式的证明也完全类似, 故我们仅证明 (9.16).

如通常所知, 当 u 在 D 中调和时, $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ 也在 D 中调和, 从而 $\left\|\dfrac{\partial u}{\partial r}\right\|_a$ 随 r 单调增加. 设 $r_n = 1 - 2^{-n} (n \geqslant 0)$, 则 (9.16) 即是

$$E\sum_{n\geqslant 1} 2^{-nq}\left\|\frac{\partial u_{r_n}}{\partial r}\right\|^q \leqslant c\,\|u\|_q^q, \tag{9.18}$$

其中 E 是 $(\partial D,\ \mathrm{d}\theta/2\pi)$ 上的条件期望.

为得到 (9.18), 对其右端应用引理 3, 则 $\forall u \in L^q(\partial D, X)$,

$$E\sum_{n\geqslant 1} 2^{-nq}\left\|\frac{\partial u_{r_n}}{\partial r}\right\|^q \leqslant c\,E\sum_{n\geqslant 1}\left\|u(W_{\tau_{\sqrt{r_n}}}) - u(W_{\tau_{r_n}})\right\|^q.$$

由于 $r_1, \sqrt{r_1}, r_2, \sqrt{r_2}, \cdots$ 是单调增加数列, X 同构于 q 凸空间, 故有

$$E\sum_{n\geqslant 1}\left\|u(W_{\tau_{s_n}})-u(W_{\tau_{s_{n-1}}})\right\|^q\leqslant C\sup_{n\geqslant 1}E\left\|u(W_{\tau_n})\right\|^q=C\left\|u\right\|_q^q.$$

两式一起说明 (9.18) 成立.

(ii)⇒(i). 为证 X 同构于 q 凸空间, 只需证明对于每个有限 WP 鞅 $f=(f_j, 0\leqslant j\leqslant J)$, 有不等式

$$\sum_{j=1}^{J}E\left\|\mathrm{d}f_j\right\|^q\leqslant c\sup_j E\left\|f_j\right\|^q \tag{9.19}$$

成立. 以 $\Omega=\{-1,1\}^N$ 代表 [0,1] 上 Haar 测度的二进群 (参见 2.1 节例 4), $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ 是其中元素的坐标表示. 于是可记

$$\mathrm{d}f_j=d_j(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{j-1})\varepsilon_j,\quad 1\leqslant j\leqslant J.$$

注意存在着 $\Omega\to[0,2\pi]^N$ 上的一一变换, 令

$$A_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{j-1}})=d_j(\operatorname{sgn}\cos\theta_1,\cdots,\operatorname{sgn}\cos\theta_{j-1}),$$
$$B_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j})=\operatorname{sgn}(\cos\theta_j).$$

则 $\hat{B}_j(0)=0,\ \hat{B}_j(1)=2/\pi$. 下面要行使一个逼近过程, 既如此不妨假定 A_j, B_j 分别是 X 值系数和复系数的多项式. 由引理 5, 存在自然数序列 (n_j)(不妨设其快速增加), 使得 (9.13) 成立. 由引理 4,

$$G_q(F_{j,(n)})(z)\leqslant\left\|A_{j,(n)}(z)\right\|G_q(B_{j,(n)})(z)+o(n_j^{-1}),\quad 2\leqslant j\leqslant n,$$
$$G_q(F_{1,(n)})(z)\leqslant\left\|A_{1,(n)}(z)\right\|G_q(B_{1,(n)})(z).$$

与 (9.13) 合并在一起得到

$$\sum_{j=1}^{J}\left\|A_{j,(n)}(z)\right\|^qG_q(B_{j,(n)})^q(z)+o(n_2^{-1})\leqslant 2G_q(F)^q(z),$$

由不等式 (9.14), 这导致

$$\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|A_{j,(n)}(z)\right\|^qG_q(B_{j,(n)})^q(z)\mathrm{d}\theta+o(n_2^{-1})\leqslant\frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|F(z)\right\|^q\mathrm{d}\theta.$$

这里 $F=\sum_{j=1}^{J}A_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+n_1\theta)},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_{j-1}+n_{j-1}\theta)})B_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_j+n_j\theta)})$. 在 $[0,2\pi]^J$ 上积分有

$$\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{(2\pi)^{J+1}}\int_{\partial D^{J+1}}\left\|A_{j,(n)}(z)\right\|^qG_q(B_{j,(n)})^q(z)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_J+o(n_2^{-1})$$
$$\leqslant\frac{c}{(2\pi)^{J+1}}\int_{\partial D^{J+1}}\left\|F(z)\right\|^q\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_J. \tag{9.20}$$

映射 $(\theta_1,\cdots,\theta_J)\to(\theta_1-n_1\theta,\cdots,\theta_J-n_j\theta)$ 和 Fubini 定理使右端变为

$$\frac{c}{(2\pi)}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\frac{1}{(2\pi)^J}\int_{\partial D^J}\|F(z)\|^q\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_J=cE\|f_J\|^q.$$

在同样的映射之下, 左端变为

$$\frac{1}{(2\pi)^{J+1}}\int_{\partial D^{J+1}}\left\|A_{j,(n)}(z)\right\|^qG_q(B_{j,(n)})^q(z)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_J=\delta_j^qE\|\mathrm{d}f_j\|^q,$$

其中 δ_j 是某个常数, 具体的计算可知 $\inf\limits_j\delta_j\geqslant\delta>0$. 于是 (9.20) 变为

$$\delta^q\sum_{j=1}^JE\|d_j\|^q+o(n_2^{-1})\leqslant cE\|f_J\|^q,$$

令 $n_2\to\infty$, 即得到不等式 (9.19). 定理证毕.

实际上将 G_p 和 S_p 看成空间 $H^a(\partial D,X)$ 上的算子, 指标 p 与值空间的凸性或光滑性密切相关. 运用一定的技巧还可以证明下面结论成立. 详见文献 [232].

定理 2　设 $2\leqslant q<\infty$, $1<a<\infty$, 则 Banach 空间 X 同构于 q 凸空间当且仅当下面条件之一成立:

(i) $\forall u\in L^1(\partial D,X),P(G_q(u)>\lambda)\leqslant\dfrac{c}{\lambda}\|u\|_1,\ \forall\lambda>0$;

(ii) 存在 $c=c_{qa}>0$, 使得

$$\|G_q(u)\|_a\leqslant c\|u\|_a,\quad\forall u\in L^a(\partial D,X).$$

将其中的 G_q 换为 S_q 结论仍成立.

利用 (9.10), 对于具有紧支撑的三角多项式 $f\in L_\alpha(\partial D,X^*),g\in L_\beta(\partial D,X)$,若 $1<\alpha,\beta,p,q<\infty,\alpha^{-1}+\beta^{-1}=1,p^{-1}+q^{-1}=1$, 不妨设 $\widehat{f}(0)=0$, 则可得到

$$\begin{aligned}\left|\int_Tg(z)f(z)\mathrm{d}m\right|&\leqslant4\int_TG_p(f)(z)G_q(g)(z)\mathrm{d}m\\&\leqslant4\|G_p(f)\|_\alpha\|G_q(f)\|_\beta.\end{aligned}\tag{9.21}$$

由于三角多项式在 L_p 中的稠密性, (9.21) 对于相应空间中的任何函数 f,g 成立. 然后由定理 2 对偶地可证明下面定理成立.

定理 3　设 $1<p\leqslant2$, $1<a<\infty$, 则 Banach 空间 X 同构于 p 光滑空间, 当且仅当下面条件之一成立:

(i) $\forall u\in L^1(\partial D,X),P(\|u-\hat{u}(0)\|>\lambda)\leqslant\dfrac{c}{\lambda}\|G_p(u)\|_1,\ \forall\lambda>0$;

(ii) 存在 $c=c_{pa}>0$, 使得

$$\|u-\hat{u}(0)\|_a\leqslant c\|G_p(u)\|_a,\quad\forall u\in L^p(\partial D,X).$$

将其中的 G_p 换为 S_p 结论仍成立.

第 6 章评注:

本章较为全面地阐述了 B 值鞅不等式与鞅空间的有关问题. 应该说 Pisier 1975 年的文章 [176] 是一个起点, Diestel 和 Uhl 高度评价 Pisier 的这一工作, 认为是应用强有力的新工具得到的强有力的定理. 其中谈到标量值鞅不等式由于 Burkholder、Davis 和 Gundy 的工作被证明具有无可争议的重要性, 但是直到 Pisier 的振聋发聩的工作出现之前向量值鞅一直被排除在外. 标量值鞅不等式与鞅空间的主要工具是分布函数, Pisier 的工作显示出向量值的情况本质上依赖于 Banach 空间的几何性质. Diestel 和 Uhl 还预言, Pisier 的工作还只是一个开头, 这一领域的研究具有极大的发展潜力.

实际上在 Pisier 的不等式中有两个因素是纠合在一起的, 一个是几何的, 一个是分析的 (或者概率的), 必须把二者剥离开来. 大约在 1987 年我们引入了 p- 均方函数 (算子) 的概念, 以后的事实证明它是研究 Banach 空间值鞅不等式和鞅空间问题的关键, 同时在其他问题上也有重要的作用. 这样一来不仅鞅论与 Banach 空间的几何性质有机地结合在一起, 而且标量值的结论就成为向量值情况的特例. 这是通过本章的叙述可以明显得出的结论.

6.1 节罗列了一些关于凸函数和 Orlicz 空间的基本事实. 此外几个基本引理在 [75]、[99]、[161] 的书中都可以找到.

6.2 节前面部分关于鞅的 p- 均方函数的不等式来自文献 [149]、[151], 关于正规鞅的相应不等式来自 [150].

6.3 节讨论各类鞅空间的相互嵌入关系, 所有定理来自文献 [151].

6.4 节讨论鞅空间上的三类算子. 关于变差算子的不等式还见文献 [186], 所有定理见文献 [158].

6.5 节中关于上下函数的不等式是标量值情况的类比, 用来刻画 Hilbert 空间的鞅特征, 定理 1~4 见文献 [153]. 这一结果 (还有很多其他结果) 清楚地表明, 标量值鞅的结论正是 B 值鞅的特殊情况, 因为实数域或复数域可以看成一个 Hilbert 空间. B 值鞅的微分从属最先是由 Burkholder[54] 研究的, 定理 5, 6, 7 见文献 [56]、[156].

6.6 节中标量值鞅的原子分解在文献 [161]、[206] 有讨论, 后者系统地应用了原子分解方法. 本节的$(1,\ a,\ \infty;\ p)$和$(2,a,\infty;p)$原子是在 [157] 中引进的并且得到了几类鞅空间的原子分解定理, 给出了小指标鞅空间的嵌入定理. 文献 [160] 证明了另外一些空间的原子分解定理, 文献 [220] 利用原子分解给出了一些小指标鞅空间的共轭. 目前关于原子分解及其在鞅论中应用的研究远不是完备的.

6.7 节中 $a \geqslant 1$ 的情况见文献 [152], $0 < a < 1$ 情况见文献 [218]~[220].

6.8 节中加权不等式见文献 [156], 其中的结论反映出权函数、鞅的分析性质与值空间的几何性质三者之间是相互依赖和制约的关系. 内插空间见文献 [162].

6.9 节中引理 1, 2 见文献 [225], 其余来自文献 [216]. 本节的叙述可以看成一个梗概, 详细的内容可阅读原文. 这里的事实再一次反映出向量值调和分析的结论深刻地依赖于值空间的几何

第 7 章　UMD 空间及其应用

有几种不同背景的问题牵动着 20 世纪早期的数学研究, 它们都与本章的内容有关. 例如, 共轭函数的有界性. 设有实系数三角多项式

$$f_n(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta,\quad \theta\in[-\pi,\pi],$$

其共轭函数是

$$g_n(\theta)=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin k\theta-b_k\cos k\theta,\quad \theta\in[-\pi,\pi].$$

考虑两者的 L_p 范数, 是否存在仅与 p 有关常数 c_p, 使得

$$\|g_n\|_p\leqslant c_p\|f_n\|_p,\quad \forall n\geqslant 1,\quad 1\leqslant p<\infty. \tag{0.1}$$

当 $p=2$ 时, 用三角级数的正交性可以得到此不等式, 而 M. Riesz 证明了当 $p\geqslant 1$ 时, g_n a.e. 收敛; 当 $1<p<\infty$ 时, c_p 存在 (有限).

其次是 L_p 空间上的 Hilbert 变换. 这一问题不仅与 Fourier 分析有关, 而且联系着微分方程的基本解. 对于 $\varepsilon>0$, 考虑截断函数

$$H_\varepsilon f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{\{|s|>\varepsilon\}}\frac{f(t-s)}{s}\mathrm{d}s,$$

何时 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}H_\varepsilon f(t)$ a.e. 存在? 记其极限为 $Hf(t)$, 何时有 $c_p>0$, 使得

$$\|Hf\|_p\leqslant c_p\|f\|_p,\quad \forall f\in L_p. \tag{0.2}$$

M. Riesz 等证明了对于 $p\geqslant 1$ 前者有肯定答案, 对于 $p>1$ 后者有肯定答案. 之后 Calderon, Zygmund 将它推广到 n 维空间并且对于十分广泛的带核奇异积分算子给出了类似的解答.

再看较近的关于鞅变换的情况. 对于标量值鞅 $f=(f_n)$ 及其变换 $g=(g_n)$, $g_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\pm\mathrm{d}f_i$, 是否有与 f,g 无关的常数 c_p, 使得

$$\|g_n\|_p\leqslant c_p\|f_n\|_p,\quad \forall n\geqslant 0. \tag{0.3}$$

Burkholder 证明了当 $p\geqslant 1$ 时, g_n a.e. 收敛; 当 $1<p<\infty$ 时, c_p 存在 (有限).

向量值情况很早就引起了人们的注意, 即什么样的 Banach 空间 X 能使在其中取值的三角多项式, 或 Hilbert 变换, 或鞅变换满足相应的不等式? 首先 Bochner, Taylor 发现当三角多项式的系数 a_k, b_k 换为 l_1 或 l_∞ 的元素时, (0.1) 不再成立. Maurey 指出要使任何取值于 Banach 空间 X 的鞅满足 (0.3), X 必须是超自反空间. 不久 Pisier 又举出例子说明反过来的结论并不成立. 即超自反空间不能保证在其中取值的鞅满足 (0.3). Burkholder 系统地研究了 B 值鞅的上述变换, 发现了它与乘积空间 $X \times X$ 上定义的某种双凸函数有关系, 并且与 Bourgain 等证明了 (0.1), (0.2), (0.3) 确定的是同一类型的 Banach 空间, 称之为 UMD 空间.

本章将先从鞅变换谈起, 建立好鞅变换性质、UMD 性质与 ξ 凸性的等价关系, 研究 UMD 空间的若干特征, 在 UMD 空间取值的鞅变换的极限定理和大数定律, 最后转到奇异积分算子以及经典调和分析, 经典鞅论中不等式的最优系数.

7.1 好鞅变换性质

考虑鞅 $f = (f_n)$ 和标量值可料序列 $v = (v_n)$, 称 $g = (g_n)$ 是 f 经过 v 的变换, 若

$$g_0 = f_0, \quad g_n = g_0 + \sum_{i=1}^{n} v_i \mathrm{d}f_i, \quad n \geqslant 1, \tag{1.1}$$

容易知道当每个 $E\|g_n\| < \infty$ 时, g 也是鞅. 首先让我们叙述关于实值鞅的下面结果.

定理 1 (Burkholder) 设 $f = (f_n)$ 是 L_1 有界实值鞅, $v = (v_n)$ 是实值可料 R.V. 序列, $v^* < \infty$ a.e.. 若 $g = (g_n)$ 是 f 经过 v 的变换, 则 g_n a.e. 收敛.

证明 1° 首先设 $\|f\|_2 < \infty, v^* \leqslant 1$ a.e., 由鞅差序列的正交性,

$$Eg_n^2 = E\left|\sum_{i=0}^{n} \mathrm{d}g_i\right|^2 = \sum_{i=0}^{n} E\left|v_i \mathrm{d}f_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=0}^{n} E\left|\mathrm{d}f_i\right|^2 = Ef_n^2,$$

从而 $\|g\|_2 \leqslant \|f\|_2 < \infty$, g_n a.e. 收敛.

2° 若 f 是下鞅, $\|f\|_2 < \infty, v^* \leqslant 1$. 不妨设 $f_n = f_n' + A_n$ 是 f 的 Doob 分解, 其中 $f' = (f_n')$ 是鞅, A_n 是非负可料增加过程 (2.3 节定理 2), $EA_\infty < \infty$. 不失一般性, 可设 $f_n \geqslant 0$, 从而

$$\begin{aligned} Ef_n^2 &= E(f_{n-1} + \mathrm{d}f_n)^2 = Ef_{n-1}^2 + 2Ef_{n-1}E(\mathrm{d}f_n \mid \Sigma_{n-1}) + E\mathrm{d}f_n^2 \\ &\geqslant Ef_{n-1}^2 + E\mathrm{d}f_n^2 \geqslant \cdots \geqslant \sum_{i=0}^{n} \mathrm{d}f_n^2. \end{aligned}$$

另一方面,

$$Edf'^2_n = E(df_n - dA_n)^2 = Edf_n^2 - 2EdA_nE(df_n\,|\Sigma_{n-1}) + EdA_n^2$$
$$= Edf_n^2 - EdA_n^2 \leqslant Edf_n^2,$$

故 $f' = (f'_n)$ 是 L_2 有界鞅. 由 1°, 相应的鞅变换 $g' = (g'_n)$ a.e. 收敛, 但 A_n 增加, 故其变换

$$\left|\sum_{i=0}^{n} v_i dA_i\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} dA_i = A_n \to A_\infty,$$

于是 $g_n = g'_n + \sum\limits_{i=0}^{n} v_i dA_i$ a.e. 收敛.

3° 对于一般鞅 f, $\|f\|_1 < \infty$, $v^* \leqslant 1$. 仍设 $f_n \geqslant 0, \forall N > 0$, 考虑下鞅 $(-f_n \wedge N)$, 由 2°, 它的变换 $g^{(N)} = (g_n^{(N)})$ a.e. 收敛, 实际上即是 g_n 在 $\{f^* \leqslant N\}$ 上 a.e. 收敛. 由 $f^* < \infty$ a.e., N 任意, 从而 g_n a.e. 收敛.

4° 若 $\|f\|_1 < \infty, v^* < \infty$, a.e., 令 $v_n^{(N)} = v_n \chi_{\{v_n \leqslant N\}}$, 易知在 $\{v^* \leqslant N\}$ 上 $g_n^{(N)} = g_n$, 由上面所证 g_n 在 $\{v^* \leqslant N\}$ a.e. 收敛. N 是任意的, 最终得出 g_n 在 $\{v^* < \infty\}$ 上 a.e. 收敛.

定理证毕.

下面例子表明 L_1 有界鞅的变换可以不是 L_1 有界的. 所以上述定理不被 Doob 鞅收敛定理包含.

例 1　$\Omega = N$ 是全体自然数的集合, Σ 是 Ω 的全体子集构成的 σ 代数, $P(\{k\}) = k^{-1} - (k+1)^{-1}$. (Ω, Σ, P) 是概率空间. 定义

$$f_n(k) = \begin{cases} -1, k \leqslant n, \\ n, k > n, \end{cases} \qquad n \geqslant 1,$$

则 $f = (f_n)$ 是关于 $B_n = \sigma(f_1, \cdots, f_n)$ 的鞅并且

$$\|f_n\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |f_n(k)| P(\{k\}) = \sum_{k=1}^{n} P(\{k\}) + \sum_{k=n+1}^{n} P(\{k\})$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \leqslant 2.$$

若 $v = (v_n)$, 其中 $v_n = (-1)^{n+1}, g = (g_n)$ 是 f 经过 v 的变换, 实际计算知道 $\|g_n\|_1 \geqslant \log\left[\frac{n}{2}\right]$, 故 $\sup\limits_{n \geqslant 1} \|g_n\|_1 = \infty$.

对于 Banach 空间 X, 让我们以 $\mathfrak{M}$ 记三元素组 (f, v, g) 的全体, 其中 f 是任意 X 值鞅, v 是可料标量 R.V. 序列, $v^* \leqslant 1$, g 是 f 经过 v 的变换. 允许基本概率空间和 σ 代数序列变动.

定理 2 (Burkholder)　对于任何 Banach 空间 X, 以下条件等价:

(i) $\forall(f,v,g)\in\mathfrak{M}$, 若 $\|f\|_1<\infty$, 则 g_n a.e. 收敛;

(ii) 存在 $c>0$, 使得 $\forall(f,v,g)\in\mathfrak{M}$, 若 $g^*>1$ a.e., 则 $\|f\|_1\geqslant c$;

(iii) 存在 $c>0$, 使得 $\forall(f,v,g)\in\mathfrak{M}$ 满足

$$\lambda P(g^*>\lambda)\leqslant c\|f\|_1,\quad \forall\lambda>0; \tag{1.2}$$

(iv) 对于任何 (或某个)$1<p<\infty$, 存在 $c_p>0$ 使得

$$\|g\|_p\leqslant c_p\|f\|_p,\quad \forall(f,v,g)\in\mathfrak{M}. \tag{1.3}$$

当定理中的任一条成立时, 都称 X 具有好鞅变换的性质.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 若 (ii) 不成立, 则对于每个自然数 j, 存在 $(f_j,v_j,g_j)\in\mathfrak{M}$ 使得 $g_j^*>1$ a.e., 但 $\|f_j\|\leqslant 2^{-j}$. 不妨设基本概率空间是同一个并且与 $f_j=(f_{jn})$ 适应的 σ 代数列 $(B_{jn},n\geqslant 0)$ 相互独立, $j\geqslant 1$, 满足 $B_{j\infty}=\sigma(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}B_{jn})$. 不失一般性假设 $f_{j0}=0$.

由 $g_j^*>1$ a.e., 存在自然数 n_j 使得 $P(A_j)>1/2$, 其中

$$A_j=\{\omega:\exists\, n\leqslant n_j,|g_{jn}(\omega)|>1\}.$$

令 $(B_n,n\geqslant 0)$ 是如同 6.2 节定理 1 证明中的 σ 代数族. 考虑序列

$$D=(\mathrm{d}f_{11},\cdots,\mathrm{d}f_{1n_1},\mathrm{d}f_{21},\cdots,\mathrm{d}f_{2n_2},\mathrm{d}f_{31},\cdots),$$
$$V=(v_{11},\cdots,v_{1n_1},v_{21},\cdots,v_{2n_2},v_{31},\cdots),$$

由 $B_{j\infty}$ 的独立性, D 是与 $(B_n,n\geqslant 0)$ 适应的鞅差序列. 记相应的鞅为 F. V 是可料序列, $V^*\leqslant 1$. 若 $G=(G_n)$ 是 F 经过 V 的变换, 则

$$F_{n_1}+\cdots+F_{n_k}=\sum_{j=1}^{k}f_{jn_j},\quad \|F\|_1\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\|f_j\|_1\leqslant 1.$$

由于 A_j 相互独立并且 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}P(A_j)=\infty$, 根据 Borel-Cantelli 引理,

$$P(G_n\text{ 发散})\geqslant P\,(\limsup_{m,n\to\infty}\|G_m-G_n\|>1)\geqslant P(\limsup_{j\to\infty}A_j)=1,$$

与 (i) 矛盾.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 我们将证明, 对于每个固定的 n, 就 (ii) 中的 c 有

$$cP(g_n^*>2)\leqslant\|f\|_1. \tag{1.4}$$

倘若如此, 令 $n\to\infty$, 得出 $cP(g^*>2)\leqslant\|f\|_1$. $\forall\lambda>0$, 以 $(2\lambda^{-1}f,v,2\lambda^{-1}g)$ 代替 (f,v,g) 便得出 $\lambda P(g^*>\lambda)\leqslant 2c^{-1}\|f\|_1$, 这就是 (1.2).

若 (1.4) 左端不为 0, 作 (f,v,g) 的独立 copy 序列 (f_j,v_j,g_j). 令

$$D=(\mathrm{d}f_{11},\cdots,\mathrm{d}f_{1n},u_1\mathrm{d}f_{21},\cdots,u_1\mathrm{d}f_{2n},u_1u_2\mathrm{d}f_{31},\cdots),$$

$$V=(v_{11},\cdots,v_{1n},v_{21},\cdots,v_{2n},v_{31},\cdots),$$

这里 $u_j=\chi_{\{g_{jn}^*\leqslant 2\}}$, 记与 D 相应的鞅是 F, 则

$$F_{kn}=F_{1n}+u_1f_{2n}+\cdots+u_1u_2\cdots u_{k-1}f_{kn},$$

由独立性,

$$\begin{aligned}\|F\|_1&\leqslant E(1+u_1+\cdots+u_1\cdots u_{k-1}+\cdots)\|f\|_1\\&=(1-Eu_1)^{-1}\|f\|_1=P(g_n^*>2)^{-1}\|f\|_1.\end{aligned}$$

由于 $G^*>1$ a.e., 由 (ii) 知 $\|F\|_1\geqslant c$, 从而得到 (1.4).

(iii) ⇒ (iv). 设 (1.2) 对于每个 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}$ 成立. 若 $W=(W_n)$ 是 $(\|\mathrm{d}f_n\|)$ 的可料强函数序列. 对于 $\delta>0,\beta>\delta+1,\lambda>0$, 定义

$$\begin{aligned}\mu&=\inf\{n:\ \|g_n(\omega)\|>\lambda\},\\v&=\inf\{n:\ \|g_n(\omega)\|>\beta\lambda\},\\\sigma&=\inf\{n:\ \|f_n(\omega)\|\vee W_{n+1}(\omega)>\delta\lambda\}.\end{aligned}$$

设 $A_k=\{\mu<k\leqslant v\wedge\sigma\},u_k=\chi_{A_k}$, 则 $u=(u_n)$ 是可料序列. 我们已经不止一次用过这种方法证明好 λ 不等式. 总之现在可得出

$$P(g^*>\beta\lambda,\ f^*\vee W^*\leqslant\delta\lambda)\leqslant 3\delta c(\beta-\delta-1)^{-1}P(g^*>\lambda).$$

由 7.1 节引理 4, 对于 $\Phi(t)=t^p(1\leqslant p<\infty)$, 得出

$$\|g^*\|_p\leqslant c_p\|f^*\|_p. \tag{1.5}$$

若 $p>1$, 由 Doob 不等式得出

$$\|g\|_p\leqslant c_p\|f\|_p. \tag{1.6}$$

(iv)⇒(i). 我们在 7.4 节中将要证明满足 (1.3) 的空间是超自反的, 从而具有 RN 性质. 于是若 $\|f\|_p<\infty(p>1)$, 由 (iv) 知道, $\|g\|_p<\infty$, 所以 g_n a.e. 收敛. 现在设 $\|f\|_1<\infty$, $\forall\lambda>0$, 令 $\tau=\inf\{n:\|f_n\|>\lambda\}$, 则

$$\begin{aligned}Ef^{(\tau)*}&=E\sup_n\|f_{\tau\wedge n}\|=E\sup_n(\|f_n\|\chi_{\{\tau>n\}}+\|f_\tau\|\chi_{\{\tau\leqslant n\}})\\&\leqslant\lambda+\sup_n E\|f_{\tau\wedge n}\|\leqslant\lambda+\|f\|_1<\infty.\end{aligned}$$

由 (iv) 和上面 (1.5) 知道 $Eg^{(\tau)^*} < \infty$, 这里 $g^{(\tau)} = (g_{\tau\wedge n})$ 是 $f^{(\tau)}$ 的变换, 所以 $g_{\tau\wedge n}$ a.e. 收敛. 即在 $\{\tau = \infty\} = \{f^* \leqslant \lambda\}$ 上 g_n a.e. 收敛. 由 $f^* < \infty$ a.e., λ 任意, 所以 g_n a.e. 收敛. 证毕.

由证明可知, 条件 (iv) 中任何 p 与某个 p 的说法不影响结论成立.

定义 称 Banach 空间 X 具有无条件鞅差序列性质 (UMD), 若存在 $p > 1$ 使得对于任何 X 值鞅 $f = (f_n)$,

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} \pm \mathrm{d}f_n\right\|_p \leqslant c_p \left\|\sum_{k=0}^{n} \mathrm{d}f_n\right\|_p, \tag{1.7}$$

其中 c_p 是某个仅与 p 有关的常数. 此时记 $X \in$UMD.

注意 (1.7) 左端的鞅是右端的变换, 其中 v_n 是常数 $+1$ 或 -1. 这和定理 2 中的条件有所不同, 那里允许 v_n 是可料 R. V. , $v^* \leqslant 1$. 不过要注意, 若将定理 2 中涉及的 $v = (v_n)$ 一律换为 $v_n = \pm 1$, 条件 (i)、(vi) 还是等价的, 并且原来的证明仍适用. 此时的 (1.3) 就是 (1.7). 现在我们要证明

定理 3 $X \in$UMD 当且仅当 X 具有好鞅变换性质.

证明 只须证明 (1.7) 蕴涵 (1.3), 实际上我们将证明更强的结论, 即 $c_p(1.7) = c_p(1.3)$, 这里连同括号的数字代表相应的不等式中允许的最小常数. 容易知道 $c_p(1.7) \geqslant c_p(1.3)$.

现在设 $(f, v, g) \in \mathfrak{M}$, 往证

$$\|g_n\| \leqslant c_p(1.7)\|f_n\|, \quad \forall n \geqslant 1. \tag{1.8}$$

为此作几种简化:

1° 可以假定 $v_k = H_k(f_0, \cdots, f_{k-1})$, $1 \leqslant k \leqslant n$, 其中 $f_0 = 0, H_k$: $X^k \to [-1, 1]$ 是连续函数. 因为可以构造 $(F, V, G) \in \mathfrak{M}$ 使之与 (f, v, g) 相差很小. 例如, 取 R 序列 r_n, 相互独立并且与 B_∞ 独立, 令

$$D_{3k-2} = \varepsilon r_{3k-2} v_k^+ z, \quad D_{3k-1} = \varepsilon r_{3k-1} v_k^- z, \quad D_{3k} = r_0 \mathrm{d}f_k.$$

这里 v_k^+, v_k^- 分别表示 v_k 的正部和负部, $z \in X, \|z\| = 1, \varepsilon > 0$. 记以 $(D_k, k \geqslant 0)$ 为差序列的鞅是 $F = (F_n)$, 则

$$F_{3n} = \sum_{k=1}^{3n} D_k = r_0 f_n + R_n z, \quad |R_n| \leqslant n\varepsilon.$$

令 $V_{3k-2} = V_{3k-1} = 0, V_{3k} = v_k$, 则 $G_{3n} = \sum\limits_{k=1}^{3n} v_k \mathrm{d}F_k = r_0 g_n$. 由于

$$V_{3k} = H(\|\varepsilon^{-1} D_{3k-2}\| - \|\varepsilon^{-1} D_{3k-1}\|),$$

这里 $H(t) = -1 \vee t \wedge 1, H(t)$ 是 $F_0, \cdots, F_{3k-1}$ 的连续函数, 取值于 $[-1,1]$. 若 (1.8) 对于任何 (F,V,G) 成立,

$$||G_n||_p \leqslant c_p(1.7)||F_n||_p,$$

则

$$\begin{aligned}||g_n||_p &\leqslant ||r_0 g_n||_p = ||G_{3n}||_p \leqslant c_p(1.7)||F_{3n}||_p \\ &\leqslant c_p(1.7)||f_n||_p + c_p(1.7)n\varepsilon,\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$, 即得出所要的结论.

2° 可以假定 f 是简单鞅, 即 $f_1, \cdots, f_n$ 是简单函数并且存在 n, 当 $m \geqslant n$ 时, $f_m = f_n$. $\forall j$, 取 B_n 可测的函数 d_{jk} 使得 $||d_{jk} - \mathrm{d}f_k||_p \leqslant 2^{-j-1}$. 再令 $D_{j1} = d_{j1}, D_{jk} = d_{jk} - E(d_{jk}|B_{j,k-1}), k > 1$. 这里 B_{jk-1} 是 $d_{j1}, \cdots, d_{jk-1}$ 生成的 σ 代数. $(D_{jk}, B_{jk}, k \geqslant 1)$ 是鞅差并且

$$||D_{jk} - \mathrm{d}f_k||_p = ||d_{jk} - \mathrm{d}f_k - E(d_{jk} - \mathrm{d}f_k|B_{j,k-1})||_p \leqslant 2^{-j},$$

设由上述差序列构成的鞅是 F_j, 则 $||F_{jk} - f_k||_p \leqslant k2^{-j}$. 当 $j \to \infty$ 时, $F_{jk} \to f_k$. 由 1° 中 H_k 的连续性,

$$V_{jk} = H_k(F_{j0}, \cdots, F_{jk-1}) \to H_k(f_0, \cdots, f_{k-1}) = v_k, \text{ a.e..}$$

由控制收敛定理,

$$||v_k \mathrm{d}f_k - V_{jk}D_{jk}||_p \leqslant ||(v_k - V_{jk})\mathrm{d}f_k||_p + ||\mathrm{d}f_k - D_{jk}||_p \to 0,$$

从而 $||G_{jn} - g_n||_p \to 0(j \to \infty)$. 于是若 (1.8) 对于 f_k 为简单函数的情况成立, 一般情况也成立.

3° 可以假定 v_k 是简单函数, 甚至 $v_k = a_k, k \geqslant 1$ 是一列满足 $|a_k| \leqslant 1$ 的实数. 实际上取简单函数 v_{jk} 使得 $||v_{jk} - v_k||_\infty \leqslant 2^{-j}$, 类似于 2° 的证明成立. 然后对于 v_k 为常数的情况归纳地定义

$$D_1 = \mathrm{d}f_1, \quad a_1 = v_1 = H_1(f_0) = H_1(0).$$

若 $f_1 = \sum_{i=1}^{m_1} x_i \chi_{A_i}$ 是简单函数, 令 $D_k = \chi_{\{f_1 = x_k\}}\mathrm{d}f_2, a_k = H_2(0, x_k), 1 \leqslant k \leqslant m_1, \cdots$, 如此可改写

$$f_n = \sum_{k=1}^{m} D_k, \quad g_n = \sum_{k=1}^{m} a_k D_k. \tag{1.9}$$

$(D)_k$ 是鞅差, 这就是我们所要的情况.

4° 既如此, 只须证明对于 (1.9) 的情况, (1.8) 成立. 现在记 $\varepsilon_{jk}=+1$ 或 -1, $a_k=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_{jk}2^{-j}$. 由于 (1.7) 对于 $(\varepsilon_{jk},k\geqslant 1)$ 都成立, 故

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=1}^{m}a_kD_k\Big\|_p&=\Big\|\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_{jk}2^{-j}D_k\Big\|_p\\&=\Big\|\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_{jk}D_k\Big\|_p\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\Big\|\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_{jk}D_k\Big\|_p\\&\leqslant c_p(1.7)\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\Big\|\sum_{k=1}^{m}D_k\Big\|_p=c_p(1.7)\Big\|\sum_{k=1}^{m}D_k\Big\|_p.\end{aligned}$$

定理证毕.

推论 1 (i) UMD 性质是同构不变的;

(ii) UMD 性质被子空间, 商空间所继承, 并且 $X\in$UMD 当且仅当 $X^*\in$UMD;

(iii) 任意有限多个 UMD 空间的直积是 UMD 空间;

(iv) p 型的 UMD 空间一定同构于 p 光滑空间, q 余型的 UMD 空间一定同构于 q 凸空间.

证明 1° 利用定理 2(i) 可得之, 只需注意 a.e. 收敛性是同构不变的.

2° 对于子空间, 仍由定理 2(i) 得出. 关于 $X\in$UMD 当且仅当 $X^*\in$UMD, 上面已提到过, $X\in$UMD 则 X 超自反. 于是当 $p>1$ 时, $L_p(\mu,X)^*=L_q(\mu,X^*)$, 其中 $p^{-1}+q^{-1}=1$. 现在若 $\varphi=(\varphi_n)$ 是 $L_q(\mu,X^*)$ 中任一鞅, $\psi=(\psi_n)$ 是 φ 经过某个可料序列 $v=(v_n)$ 的变换 (不妨设 $v_n=\pm1$), 则 $\mathrm{d}\psi_n=v_n\mathrm{d}f_n$, 对于任何 $\xi\in L_p(\mu,X)$,

$$\begin{aligned}E\psi_n\xi&=E\Big(\sum_{i=1}^{n}v_i\mathrm{d}\varphi_i\Big)\xi\\&=E(v_1\varphi_1E(\xi|B_1)+\cdots+v_n\mathrm{d}\varphi_nE(\xi|B_n))\\&=E(v_1\mathrm{d}\varphi_1E(\xi|B_1)+v_2\mathrm{d}\varphi_2(E(\xi|B_2)-E(\xi|B_1))+\cdots\\&\quad+v_n\mathrm{d}\varphi_n(E(\xi|B_n)-E(\xi|B_n))),\end{aligned}\tag{1.10}$$

这里用到等式

$$Ev_i\mathrm{d}\varphi_iE(\xi|B_{i-1})=E(E(\xi|B_{i-1})v_iE(\mathrm{d}\varphi_i|B_{i-1}))=0,\quad i\geqslant 2.$$

记 $\mathrm{d}\xi_1=E(\xi|B_1),\mathrm{d}\xi_i=E(\xi|B_i)-E(\xi|B_{i-1})(i\geqslant 2)$. 若 $i<k$, 则

$$Ev_i\mathrm{d}\varphi_i\mathrm{d}\xi_i=E[E(v_i\mathrm{d}\varphi_i\mathrm{d}\xi_k|B_{k-1})]=E(v_i\mathrm{d}\varphi_i\mathrm{d}\xi_k|B_{k-1})=0.$$

若 $i>k$, 则

$$Ev_i\mathrm{d}\varphi_i\mathrm{d}\xi_k=E[E(v_i\mathrm{d}\varphi_i\mathrm{d}\xi_k|B_{i-1})]=E[v_iE(\mathrm{d}\varphi_i|B_{i-1})\mathrm{d}\xi_k]=0.$$

从而 (1.10) 变为

$$\begin{aligned}E\psi_n\xi&=E\sum_{i=1}^{n}v_i\mathrm{d}\varphi_i\mathrm{d}\xi_i=E\sum_{i,k=1}^{n}v_i\mathrm{d}\varphi_i\mathrm{d}\xi_k\\&=E(\mathrm{d}\varphi_1+\cdots+\mathrm{d}\varphi_n)(v_1\mathrm{d}\xi_1+\cdots+v_n\mathrm{d}\xi_n)\\&=E\varphi_n\Big(\sum_{i=1}^{n}v_i\mathrm{d}\xi_i\Big).\end{aligned}$$

注意到 $(\mathrm{d}\xi_n)$ 实际上是 $L_p(\mu,X)$ 中的鞅差序列, 记相应的鞅为 $\xi=(\xi_n), g_n=\sum_{i=1}^{n}v_i\mathrm{d}\xi_i$, 则 g 是 f 的变换. 由定理 2,

$$||g_n||_p\leqslant c_p||\xi_n||_p,\quad n\geqslant 1.$$

应用 Hölder 不等式有

$$|E\psi_n\xi|=\Big|E\varphi_n\Big(\sum_{i=1}^{n}v_i\mathrm{d}\xi_i\Big)\Big|\leqslant||\varphi_n||_q||g_n||_p\leqslant c_p||\varphi_n||_q||\xi_n||_p,$$

由此得出

$$||\psi_n||_q=\sup_{||\xi||_p\leqslant 1}|E\psi_n\xi|\leqslant c_p||\varphi_n||_q,\quad n\geqslant 1.$$

这说明 $X^*\in$UMD .

反之, 若 $X^*\in$UMD, 由上述推理知道 $X^{**}\in$UMD, 但 X 是自反的, 所以 $X\in$ UMD.

对于商空间, 若 $X\in$UMD, M 是 X 的闭子空间, 由上面所证, 此时 M, X^* 都是 UMD 空间. 由于 $(X/M)^*=M^{\perp}$. $M^{\perp}$ 是 X^* 的闭子空间, 从而 $M^{\perp}\in$UMD. 所以 $X/M\in$UMD.

3° (iii) 容易从定理 2 (i) 得到.

4° 设 $X\in$UMD 并且是 p 型的, $(\mathrm{d}f_n, n\geqslant 0)$ 是任一鞅差, r_n 是 R 函数序列, 与 $(\mathrm{d}f_n, n\geqslant 0)$ 独立. 注意此时 $(r_n\mathrm{d}f_n, n\geqslant 0)$ 也是鞅差, 将 $(\mathrm{d}f_n, n\geqslant 0)$ 看成 $(r_n\mathrm{d}f_n, n\geqslant 0)$ 经过 (r_n) 的变换, 类似于 (1.3) 有

$$\begin{aligned}E||f_n||^p&=E\Big\|\sum_{i=1}^{n}r_ir_i\mathrm{d}f_i\Big\|^p\leqslant c_p\int_0^1E\Big\|\sum_{i=1}^{n}r_i\mathrm{d}f_i\Big\|^p\mathrm{d}t\\&=c_pE\int_0^1\Big\|\sum_{i=1}^{n}r_i\mathrm{d}f_i\Big\|^p\mathrm{d}t\leqslant c_pc_p'E\sum_{i=1}^{n}||\mathrm{d}f_i||^p.\end{aligned}$$

最后的不等式是根据空间的 p 型, 这里 c_p' 是 p 型常数. 所以 X 同构于 p 光滑空间.

类似地可证明 q 余型的情况.

例 2 实数域 $R \in$UMD.

例 3 $l^p \in X \in$UMD, $1 < p < \infty$.

实际上设 $\mathrm{d}f = (\mathrm{d}f_n)$ 是 l^p 值鞅差, 不妨设

$$\mathrm{d}f_n(\omega) = (a_{n1}(\omega), a_{n2}(\omega), \cdots), \quad \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}(\omega)|^p < \infty.$$

由投影算子 $T_k : l^p \to R, (a_1, a_2, \cdots) \to a_k$ 的连续性知道, $(a_{nk}(\omega), n \geqslant 0)$ 是实值鞅差 $(k \geqslant 1)$. 若 g 是 f 经过 v 的变换, 则

$$\begin{aligned} ||g_n||_p^p &= E\left|\left|\sum_{i=1}^{n} v_i \mathrm{d}f_i\right|\right|^p = E\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n} v_i a_{ij}\right|^p \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} c_p^p(R) E\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right|^p = c_p^p(R) E\left|\left|\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}f_i\right|\right|^p, \end{aligned}$$

其中 $c_p(R)$ 是实值鞅满足 (1.3) 的常数. 由此还知道 $c_p(l^p) = c_p(R)$.

用稍微复杂的方法也可证明 $L_p[0,1] \in$UMD $(1 < p < \infty)$.

例 4 Hilbert 空间 $X \in$UMD.

第 6 章中已经证明, 此时存在 $c > 0$, 使得任何鞅 f 满足

$$c^{-1}||f_n||_2 \leqslant ||S_n^{(2)}(f)||_2 \leqslant c||f_n||_2.$$

现若 $(f, v, g) \in \mathfrak{M}$, 则 $||\mathrm{d}g_i|| = ||v_i \mathrm{d}f_i|| \leqslant ||\mathrm{d}f_i||$, 从而

$$||g_n||^2 \leqslant c||S_n^{(2)}(g)||_2 \leqslant c||S_n^{(2)}(f)||_2 \leqslant c^2||f_n||_2.$$

故结论成立.

7.2 ξ 凸性

我们称一个函数 $\xi : X \times X \to R$ 是双凸的, 若每个函数 $\xi(x, \cdot)$ 与每个 $\xi(\cdot, y)$ 都是凸函数; 称 ξ 是对称的, 若 $\xi(x, y) = \xi(y, x)$, $\forall x, y \in X$.

定义 1 Banach 空间 X 称为 ξ 凸的, 若存在双凸函数 ξ, 使得 $\xi(0, 0) > 0$ 并且

$$\xi(x, y) \leqslant ||x + y||, \quad ||x|| = ||y|| = 1. \tag{2.1}$$

先作几点说明:

1. 若 X 是 Hilbert 空间, 令

$$\xi(x,y)=1+\mathrm{Re}(x,y), \tag{2.2}$$

ξ 就是一个双凸函数, 并且 $\xi(0,0)=1$, 这里 $\mathrm{Re}(x,y)$ 表示内积 (x,y) 的实部. 双凸性质是容易得到的, 为验证 (2.1), 只需注意 $\|x\|=\|y\|=1$ 时,

$$\xi(x,y)^2\leqslant 1+2\mathrm{Re}(x,y)+\|x\|^2\|y\|^2=\|x+y\|^2. \tag{2.3}$$

所以 Hilbert 空间是 ξ 凸的.

2. 若 X 是 ξ 凸的, 则 $\xi(0,0)\leqslant 1$. 实际上由双凸性和 (2.1), 当 $\|x\|=1$ 时

$$\begin{aligned}\xi(0,0)&\leqslant(\xi(0,-x)+\xi(0,x))/2\\&\leqslant(\xi(-x,-x)+\xi(x,-x)+\xi(-x,x)+\xi(x,x))/4\\&\leqslant(\|2x\|+\|2x\|)/4=\|x\|=1.\end{aligned}$$

3. 有时可要求定义中的 ξ 是对称的, 实际上若 $\xi(x,y)$ 满足 (2.1), 则 $\xi_1(x,y)=\xi(x,y)\vee\xi(y,x)$ 是对称的, 同时满足 (2.1).

4. 实际上关于双凸函数 ξ, 下面条件都与 (2.1) 等价, 不过这里不准备详细讨论它.

$$(2.1)':\quad \xi(x,y)\leqslant\|x+y\|,\quad \|x\|\leqslant 1\leqslant\|y\|,$$
$$(2.1)'':\quad \xi(x,y)\leqslant\|x+y\|,\quad \|x\|\vee\|y\|\geqslant 1.$$

引理 1　对于任何 Banach 空间 X, 设 $M(x,y)$ 是 X 值鞅 f 的集合, 使得 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}, f_0=x, v=(1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots)$, 其中 $\varepsilon_n=\pm1, n>1$ 并且

$$P(\omega:\exists n\geqslant 1,\ \|g_n-y\|\geqslant 1)=1.$$

令 $\psi(x,y)=\inf\{\|f\|_1: f\in M(x,y)\}$, 则 $\psi: X\times X\to R$ 满足:

(1) $\psi(x,y)=\psi(x,2x-y)$;

(2) $\psi(\cdot,y)$ 是凸函数;

(3) 若 $\|y\|\geqslant 1$, 则 $\psi(x,y)\leqslant\|x\|$.

证明　在 $M(x,y)$ 中考虑 f 经过 $(1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots)$ 和 $(1,-\varepsilon_2,-\varepsilon_3,\cdots)$ 的变换, 分别记为

$$g_n=x+\sum_{i=1}^n\varepsilon_i\mathrm{d}f_i,\quad g_n'=x-\sum_{i=1}^n\varepsilon_i\mathrm{d}f_i.$$

由于 $\|g_n'-(2x-y)\|=\|g_n-y\|$, 所以 (1) 成立.

设 $x_1,x_2,x\in X, x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$ 是 x_1,x_2 的凸组合. 对于 $\delta>0$, 若 $f_j\in M(x_j,y)$ 并且 $\|f_i\|\leqslant\psi(x_j,y)+\delta, j=1,2, v_j=(1,\varepsilon_{j1},\varepsilon_{j2},\cdots)$ 是相应的取 ±1 值的

$M(x,y)$ 定义中的序列. 不妨设基本概率空间是同一个, 并且 f_1, f_2 适应的 σ 代数序列 $B_{1\infty}, B_{2\infty}$ 相互独立. 另取与 $B_{1\infty}, B_{2\infty}$ 独立的 σ 代数序列 B, 使 P 在 B 上无原子. 设 u_1, u_2 是 B 可测 R.V., $u_1+u_2=1, P(u_1=1)=\alpha_1, P(u_2=1)=\alpha_2$. 记 $s_j = x_j - x$, 则

$$D=(x, u_1 s_1 + u_2 s_2, u_1 d_{12}, u_2 d_{22}, u_1 d_{13}, u_2 d_{23}, \cdots)$$

是与 σ 代数列

$$(\{\varnothing, \Omega\}, B, B \vee B_{12}, B \vee B_{12} \vee B_{22}, \cdots)$$

适应的鞅差序列. 记 D 对应的鞅是 F, F 经过序列

$$V=(1,1,\varepsilon_{12},\varepsilon_{22},\varepsilon_{13},\varepsilon_{23},\cdots)$$

的变换是 G, 则

$$F_1 = x, \quad F_{2n} = u_1 f_{1n} + u_2 f_{2n}, \quad G_{2n} = u_1 g_{1n} + u_2 g_{2n},$$

于是 $F \in M(x,y)$,

$$\begin{aligned}||F_{2n}|| &\leqslant \alpha_1 ||f_{1n}||_1 + \alpha_2 ||f_{2n}||_1 \\ &\leqslant \alpha_1 \psi(x_1,y) + \alpha_2 \psi(x_2,y) + \delta.\end{aligned}$$

故有 $\psi(x,y) \leqslant \alpha_1\psi(x_1,y)+\alpha_2\psi(x_2,y)$, 得出 (2).

为证明 (3), 设 $||y||>1$, 若 $||x-y|| \geqslant 1$, 取 $f_n = g_n = x$, 则 $f \in M(x,y)$, $||f||_1 = ||x||$, (3) 成立并且 $\psi(0,y)=0$. 现在设 $x \neq 0$, 若 λ 足够大, 则 $||\lambda x - y|| \geqslant 1$, 从而由凸性得出

$$\begin{aligned}\psi(x,y) &\leqslant (1-\lambda^{-1})\psi(0,y)+\lambda^{-1}\psi(\lambda x,y) \\ &= \lambda^{-1}\psi(\lambda x,y) \leqslant \lambda^{-1}||\lambda x|| = ||x||.\end{aligned}$$

定理 1 (Burkholder) $X \in$UMD 当且仅当 X 是 ξ 凸的.

证明 先设 $X \in$UMD, 考虑上面引理中确定的函数 ψ, 令 $\xi(x,y)=2\psi\left(\frac{x+y}{2},y\right)$. 由 (1), $\xi(x,y)=\xi(y,x)$; 由 (2), ξ 是双凸的; 由 (3), 当 $||x|| \vee ||y|| \geqslant 1$ 时, $\xi(x,y) \leqslant ||x+y||$. 为证 X 是 ξ 凸的, 只须证明 $\psi(0,0)>0$.

若 $f \in M(0,0)$, 由定义存在 $v=(1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots)$ 使得 f 经过 v 的变换 g 满足 $g^* \geqslant 1$ a.e., 若 $\lambda>1$, 则 $(\lambda g)^* > 1$ a.e.. 根据 7.1 节定理 2 (ii) 和 UMD 定义后面的说明, 存在 $c>0$, 使得 $||f||_1 \geqslant c/\lambda$, 所以

$$\psi(0,0)=\inf\{||f||_1 : f \in M(0,0)\} \geqslant c > 0.$$

反过来, 设 X 是 ξ 凸的, $\xi: X \times X \to R$ 是相应的双凸函数. 令 $\varphi(x,y) = \xi(2x-y,y)/2$, 我们证明 $\psi(x,y) \geqslant \varphi(x,y)$, ψ 即是引理 1 中定义的函数. 倘若如此, 则

$\psi(0,0) \geqslant \xi(0,0)/2 > 0$, 然后由 $M(0,0)$ 的定义, 当 $g^* > 1$ a.e. 时, $\|f\|_1 \geqslant \psi(0,0) > 0$, 由 7.1 节定理 2(ii) 知道 $X \in$UMD.

为证明所说的不等式, 设

$$M_n(x,y) = \{f \in M(x,y) : P(\omega : \exists\, 1 \leqslant k \leqslant n, \|g_k(\omega) - y\| \geqslant 1) = 1\},$$
$$\psi_n(x,y) = \inf\{\|f\|_1 : f \in M_n(x,y)\}.$$

类似地, 若 g 是由 $M_n(x,y)$ 中的 f 经过 $v = (1,1,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\cdots), \varepsilon_n = \pm 1 (n > 2)$ 变换得来的, 记其全体为 $M_n^+(x,y)$; 若 g 是由 $M_n(x,y)$ 中的 f 经过 $v = (1,-1,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\cdots)$, $\varepsilon_n = \pm 1 (n > 2)$ 变换得来的, 记其全体为 $M_n^-(x,y)$. 相应地定义 $\psi_n^+(x,y)$ 和 $\psi_n^-(x,y)$. 注意 $\psi_n(x,y) = \psi_n^+(x,y) \wedge \psi_n^-(x,y)$, 在上面引理 1(1) 的证明中已得到 $\psi(x,y) = \psi(x,2x-y)$, 所以这里有 $\psi_n^-(x,y) = \psi_n^+(x,2x-y)$, 剩下只须证明 $\forall n \geqslant 2, \psi_n(x,y) \geqslant \psi(x,y)$.

不妨设 ξ 是对称的. φ 也有三条性质: (1) $\varphi(x,y) = \varphi(x,2x-y)$; (2) $\varphi(\cdot,y)$ 是凸函数; (3) $\varphi(x,y) \leqslant \|x\|$, 若 $\|y\| \geqslant 1$. 这些都可以直接验证.

现在用归纳法: 若 $n = 2, f \in M_2^+(x,y)$, 此时 $g_2 = f_2$, 于是或者 $\|x - y\| \geqslant 1$ 或者 $\|f_2 - y\| \geqslant 1$. 由 φ 满足的 (1), (3) 两条性质知道, 此时 $\varphi(x,y) \leqslant \|x\|$ 或者 $\varphi(f_2,y) \leqslant \|f_2\|$, 有 φ 的凸性和 Jensen 不等式

$$\varphi(x,y) = \varphi(Ef_2,y) \leqslant E\varphi(f_2,y) \leqslant \|f_2\|_1.$$

$f \in M_2^+(x,y)$ 是任意的, 故

$$\psi_2^+(x,y) = \inf\{\|f_2\|_1 : f \in M_2^+(x,y)\} \geqslant \varphi(x,y).$$

假设对于 $n \geqslant 2, \psi_n^+(x,y) \geqslant \varphi(x,y), f \in M_{n+1}^+(x,y)$. 假定 g 与 f 对应, f_2 有有限值域 $\{x_1,\cdots,x_m\}, \alpha_j = P(f_2 = x_j) > 0, 1 \leqslant j \leqslant m$. 此时

$$P(\omega : \exists 2 \leqslant k \leqslant n+1,\ \|g_k(\omega) - y\| \geqslant 1) = 1, \tag{2.4}$$

$$\|f_{n+1}\|_1 = \sum_{j=1}^{m} \int_{\{f_2 = x_j\}} \|x_j + \mathrm{d}f_3 + \cdots + \mathrm{d}f_{n+1}\| \mathrm{d}P, \tag{2.5}$$

若 $P_j = P(\cdot|_{f_2 = x_j})$ 为条件概率. (2.4) 说明由差序列 $D_j = (x_j, \mathrm{d}f_3, \mathrm{d}f_4, \cdots)$ 确定的鞅 $F_j \in M_n(x_j,y)$, 于是由归纳假设和 $x = Ef_2 = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j x_j$ 以及 (2.5),

$$\begin{aligned}\|f_{n+1}\|_1 &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_\Omega \|F_{jn}\| \mathrm{d}P_j \geqslant \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \psi_n(x_j,y)\\ &\geqslant \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi(x_j,y) = \varphi(x,y),\end{aligned}$$

从而 $\psi_{n+1}^{+}(x,y)=\inf\{\|f_{n+1}\|_1 : f\in M_{n+1}^{+}(x,y)\}\geqslant\varphi(x,y)$.

最后来证明 $\psi(x,y)\geqslant\varphi(x,y)$. 设 $f\in M(x,y),\delta>0$, 于是存在 n, 使得 $P(A)>1-\delta$, 其中

$$A=\{\omega:\exists\, 1\leqslant k\leqslant n,\ \|g_k(\omega)-y\|\geqslant 1\}.$$

这里 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}$. 设 $u=\chi_{A^c}$, 取 σ 代数 B 与 B_n 独立, P 在 B 上无原子, r 关于 B 可测, $P(r=\pm1)=1/2$. 又取 $z\in X,\|z\|=2$, 则

$$D=(\mathrm{d}f_1,\cdots,\mathrm{d}f_n,urz,0,\cdots)$$

是关于 $(B_1,\cdots,B_n,B_n\vee B,\cdots)$ 的鞅差序列, 其对应的鞅是 F. 若在 $\Omega\backslash A$ 上, $\|g_n-y\|<1$, 则

$$\|g_n+rzu-y\|\geqslant\|rzu\|-\|g_n-y\|\geqslant 1,$$

从而 $F\in M_{n+1}(x,y)$. 由此

$$\varphi(x,y)\leqslant\psi_{n+1}(x,y)\leqslant\|F_{n+1}\|_1\leqslant\|f_n\|_1+\|z\|Eu\leqslant\|f\|_1+2\delta,$$

δ 是任意的. 定理得证.

让我们继续讨论双凸函数.

引理 2 设 $u:X\times X\to R$ 是双凸函数, u 满足 (2.1)$''$, 则对于 $\forall x,y,x',y'\in X$,

$$|u(x,y)-u(x',y')|\leqslant\|x-x'\|+\|y-y'\|. \tag{2.6}$$

证明 若 $x\neq x'$, 则当 λ 充分大时, $\|x+\lambda(x'-x)\|>1$, 于是由 (2.1)$''$ 和 $u(\cdot,y)$ 的凸性,

$$\begin{aligned}u(x',y)-u(x,y)&\leqslant\lambda^{-1}[u(x+\lambda(x'-x),y)-u(x,y)]\\&\leqslant\lambda^{-1}[\|x\|+\|y\|+\lambda\|x'-x\|-u(x,y)].\end{aligned}$$

令 $\lambda\to\infty$, 后者成为 $\|x'-x\|$. (2.6) 由此得出.

定理 2 设 X 是 ξ 凸的, 则 X 上可以定义范数 $|\cdot|$, 使之在新范数下 X 还是 ξ 凸的并且

$$\xi(0,0)|x|\leqslant\|x\|\leqslant|x|,\quad\forall x\in X. \tag{2.7}$$

证明 不妨设 $\xi(x,y)=\xi(-x,-y)$, 否则 $\xi(x,y)\vee\xi(-x,-y)$ 是 $X\times X$ 上满足此条件的双凸函数, 且都使 (2.1) 成立. 令

$$V_0=\{x\in X:\xi(\alpha x,-\alpha x)>0,\forall\alpha,|\alpha|\leqslant 1\},\quad V=\mathrm{co}V_0.$$

我们将证明当 $|\alpha|=1$ 时, $\alpha V=V$ 并且当 $U=\{x\in X,\|x\|<1\}$ 时,

$$\xi(0,0)U\subset V\subset U, \tag{2.8}$$

然后令 $|x| = \inf\{\lambda : x \in \lambda V\}$, 则 $|x|$ 是 X 上的范数, 并且 (2.7) 成立.

为证明 (2.8), 定义 u 如 (2.3) 中 ξ_1, 记 V_0^u 如上面 V_0, 不过将 ξ 换为 u. 若 $x \in V_0$, 则 $\forall \alpha, |\alpha| \leqslant 1, \|\alpha x\| \neq 1$, 否则 $\xi(\alpha x, -\alpha x) \leqslant \|\alpha x - \alpha x\| = 0$. 于是 $x \in U, V_0 \subset U$. 类似地, $V_0^u \subset U$. 但若 $x \in U, |\alpha| \leqslant 1$, 则 $\|\alpha x\| < 1$, 由 u 的定义, $u(\alpha x, -\alpha x) = \xi(\alpha x, -\alpha x) \vee 0$, 所以实际上 $V_0 = V_0^u$. 于是 $V = \mathrm{co}V_0 \subset U$.

现证 $\xi(0,0)U \subset V_0$. 注意 u 也满足 $u(x,y) = u(-x,-y)$, 于是

$$u(0,0) \leqslant [u(x,0) + u(-x,0)]/2 = u(x,0).$$

若 $x \in \xi(0,0)U$, 则 $\|x\| < \xi(0,0)$, 当 $|\alpha| \leqslant 1$ 时, 由前面 4° 的说明和引理 2,

$$\begin{aligned}\xi(0,0) = u(0,0) &\leqslant u(\alpha x, 0) \leqslant u(\alpha x, -\alpha x) + \|\alpha x\| \\ &< u(\alpha x, -\alpha x) + \xi(0,0),\end{aligned}$$

$u(\alpha x, -\alpha x) > 0, x \in V_0^u = V_0$. 总之, (2.7) 得证.

定理 3 设 X 是 Banach 空间, 则 X 是 Hilbert 空间当且仅当 $X \times X$ 上存在对称双凸函数 ξ, 使得 (2.1) 成立并且 $\xi(0,0) = 1$.

证明 必要性已经由 1° 中给出的例子得到, 现证充分性.

不妨设 $\xi(x,y) = \xi(-x,-y)$, 首先证明 $\|\alpha x\| \vee \|\beta x\| \leqslant 1$ 时,

$$\xi(\alpha x, \beta x) = 1 + \alpha\beta\|x\|^2, \quad \alpha, \beta \in R. \tag{2.9}$$

实际上若 $x = 0$, 由 $\xi(0,0) = 1$ 知此式成立. 若 $x \neq 0$, 不妨设 $\|x\| = 1$, 则 $\xi(\pm x, 0) = \xi(0, \pm x) \leqslant \|x\| = 1$. 由于 $\xi(\cdot, 0)$ 是凸的, 所以 $\xi(\alpha x, 0) = 1, -1 \leqslant \alpha \leqslant 1$. 固定 α, 则

$$\xi(\alpha x, \pm x) \leqslant \|\alpha x \pm x\| \leqslant 1 \pm \alpha \tag{2.10}$$

(参见 4°). 由 $\xi(\alpha x, \cdot)$ 的凸性, $\xi(\alpha x, 0) = 1$ 和 (2.10) 可知

$$\xi(\alpha x, \beta x) = [(1-\beta)(1-\alpha) + (1+\beta)(1+\alpha)]/2 = 1 + \alpha\beta.$$

实际上此式对于任何 $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ 成立.

现在定义

$$\begin{aligned}F(x,y) &= \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 - 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \\ G(x,y) &= 2\xi(x,y) + 2\xi(x,-y) - 4.\end{aligned}$$

当 $\|x\| \vee \|y\| \leqslant 1$ 时, 令 $u = (x+y)/2,\ v = (x-y)/2$, 则 $\|u\| \vee \|v\| \leqslant 1$, 利用对称性和凸性

$$\begin{aligned}4\xi(u,u) &\leqslant 2(\xi(x,u) + \xi(y,u)) \\ &\leqslant \xi(x,x) + \xi(y,y) + 2\xi(x,y),\end{aligned}$$

将 (2.9) 代入可得

$$4||u||^2 \leqslant ||x||^2 + ||y||^2 + 2\xi(x,y) - 2.$$

同样的式子对于 v 也成立, 于是得到

$$F(x,y) \leqslant G(x,y), \quad ||x|| \vee ||y|| \leqslant 1. \tag{2.11}$$

由我们对于 ξ 的假设可知 $G(\pm x, \pm y) = G(x,y)$. 同时 G 是非负的, 对称双凸的. 例如, 关于非负性有

$$\begin{aligned} 2\xi(x,y) + 2\xi(x,-y) &\geqslant 4\xi(x,0) = 2(\xi(x,0) + \xi(-x,0)) \\ &\geqslant 4\xi(0,0) = 4. \end{aligned}$$

(2.9) 说明

$$G(x,0) = G(x,x) = 0, \quad ||x|| \leqslant 1.$$

若 $\alpha, \beta \in [0,1], ||x|| \vee ||y|| \leqslant 1$, 则

$$\begin{aligned} G(\alpha x, \beta y) &\leqslant (1-\alpha)G(0,\beta y) + \alpha G(x,\beta y) \\ &= \alpha G(x,\beta y) \leqslant \alpha\beta G(x,y). \end{aligned}$$

若 $0 < \alpha < \beta$, 并且 β 足够小, 使得 $||\beta x|| \vee ||\beta y|| \leqslant 1$, 则

$$G(\alpha x, \alpha y) = G\left(\beta x \cdot \frac{\alpha}{\beta}, \beta y \cdot \frac{\alpha}{\beta}\right) \leqslant \frac{\alpha^2}{\beta^2} G(\beta y, \beta y),$$

或者 $G(\alpha x, \alpha y)/\alpha^2 \leqslant G(\beta x, \beta y)/\beta^2$, 令 $H(x,y) = \lim\limits_{\alpha \to 0} G(\alpha x, \alpha y)/\alpha^2$, 此极限存在. 若 $0 < \alpha < 1$, 由 F, G 的定义知道

$$F(x,y) = F(\alpha x, \alpha y)/\alpha^2 \leqslant G(\alpha x, \alpha y)/\alpha^2 \leqslant G(x,y),$$

于是

$$F(x,y) \leqslant H(x,y) \leqslant G(x,y), \quad ||x|| \vee ||y|| \leqslant 1. \tag{2.12}$$

只要证明了 $H(x,y) = 0$, $\forall x, y$, $||x|| \vee ||y|| \leqslant 1$ 就有

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 \leqslant 2||x||^2 + 2||y||^2,$$

从而不难得出 X 是 Hilbert 空间.

为证此, 注意 $\alpha > 0$ 时,

$$H(\alpha x, \alpha y) = \lim_{\beta \to 0} G(\alpha\beta x, \alpha\beta y)/\beta^2 = \alpha^2 H(x,y).$$

若 $1 < \alpha \leqslant 1, ||x|| \vee ||y|| \leqslant 1$, 由 G 的性质得出

$$H(\pm x, \pm y) = H(x,y), \quad H(x,x) = 0,$$

$$H(\alpha x, y) \leqslant \alpha H(x,y) = \alpha H(x, \alpha\alpha^{-1}y) \leqslant \alpha^2 H(x, \alpha^{-1}y) = H(\alpha x, y).$$

同时 H 也是对称双凸, 非负的. 由 $H(x,x) = 0$ 和 $H(\alpha x, \beta y) = \alpha\beta H(x,y)$ 不难知道, 若 x 与 y 是线性相关的, 则 $H(x,y) = 0$. 若 x, y 不是相关的, 设 S 是 x, y 张成的二维子空间, 记

$$\gamma^2 + \delta^2 = \inf\{\alpha^2 + \beta^2 : ||\alpha x + \beta y|| = 1\},$$

则 $\gamma^2 + \delta^2 > 0$, 定义范数

$$|\alpha x + \beta y|^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)^{-1}, \tag{2.13}$$

在 $||\alpha x + \beta y|| = 1$ 上, $|\alpha x + \beta y| \geqslant ||\alpha x + \beta y||$, 由齐性, 在整个 S 上此不等式成立. 作变换

$$u = \delta x - \gamma y, \quad v = \gamma x + \delta y.$$

由 $||u|| \leqslant |u| = 1$, $||v|| = |v| = 1$ 并且 $|\alpha u + \beta v|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, 从而当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned}
\alpha H(x,y) &\leqslant H(\alpha x, y) \leqslant G(\alpha x, y) \\
&= 2\xi(\alpha x, y) + 2\xi(\alpha x, -y) - 4 \\
&\leqslant 2||\alpha x + y|| + 2||\alpha x - y|| - 4 \\
&\leqslant 2|\alpha x + y| + 2|\alpha x - y| - 4 \\
&= 4(1+\alpha^2)^{1/2} - 4 \leqslant 2\alpha^2, \\
\alpha H(u,v) &\leqslant H(\alpha u, v) \leqslant G(\alpha u, v) \\
&= 2\xi(\alpha u, v) + 2\xi(\alpha u, -v) - 4 \\
&\leqslant 2||\alpha u + v|| + 2||\alpha u - v|| - 4 \\
&\leqslant 2|\alpha u + v| + 2|\alpha u - v| - 4 \\
&= 4(1+\alpha^2)^{1/2} - 4 \leqslant 2\alpha^2.
\end{aligned}$$

于是必有 $H(u,v) = 0$, 由 u, v 与 x, y 的关系以及 H 的对称性、双凸性容易反过来得出 $H(x,y) = 0$. 定理证毕.

注意关于 WP 鞅, 与 7.1 节定理 2, 3 类似的结果仍成立. 我们以 $\mathfrak{M}_0$ 记 (f, v, g) 的全体, 其中 f 是 WP 鞅, $v = (v_n)$, $v_n = \pm 1$. 把 7.1 节定理 2 中属于 $\mathfrak{M}$ 的鞅换为属于 $\mathfrak{M}_0$ 的鞅, 条件 (ii)~(v) 仍相互等价, 其证明不变. 需要补充的只是验证当 (ii)~(v) 成立时, X 是 ξ 凸的.

为此定义 $M(x,y)$ 是起点在 x 的 WP 鞅 f 的全体, f 经过序列 $(1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots)(\varepsilon_n=\pm1)$ 的变换 g 满足

$$P(\omega:\exists n\geqslant 1,\|g_n(\omega)-y\|\geqslant 1)=1.$$

令 $\psi(x,y)=\inf\{\|f\|_1:f\in M(x,y)\}$. 7.1 节定理 3 中所证明的 ψ 的性质, 这里的 ψ 也有. 不过应该注意此时只需验证 $\psi(\cdot,y)$ 是中点凸的, 即

$$\psi\Big(\frac{x_1+x_2}{2},y\Big)\leqslant(\psi(x_1,y)+\psi(x_2,y))/2.$$

然后由于 $\psi(\cdot,y)$ 是局部有界的, 所以是凸的. 令 $\xi(x,y)=2\psi\Big(\dfrac{x+y}{2},y\Big)$, 则 ξ 是对称, 双凸, 满足 (2.1) 的函数. 最后要得出 X 的 ξ 凸性, 唯一要做的是证明 $\psi(0,0)>0$. 这一结论可从下面定理的 (ii) 得到.

定理 4 设 X 是 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) $X\in$UMD;

(ii) 每个 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}_0,\|f\|_1<\infty$ 时, $g^*<\infty$ a.e.;

(iii) 每个 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}_0,\|f\|_\infty<\infty$ 时, $P(g^*<\infty)>0$;

(iv) 每个 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}_0,\|f\|_\infty<\infty$ 时, g_n 依概率收敛.

证明 (i)⇒(ii)⇒(iii) 和 (i)⇒(iv) 是显然的.

为证 (iii)⇒(i), 首先若 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}_0,\|f\|_1<\infty$ 但 $g^*>1$ a.e., 则可找到 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}_0$ 使得 $\|f\|_\infty<6\|f\|_1,P(G^*>1)>1/2$, 其证明方法如同 7.2 节引理 1, 这里不述.

现在我们证明当 $\forall(f,v,g)\in\mathfrak{M}_0,g^*>1$ a.e. 时, $\|f_1\|\geqslant c>0$. 若不然, 对于每个 $j\geqslant 1$, 存在 $(f_j,v_j,g_j)\in\mathfrak{M}_0$, 使得 $g^*>1$ a.e., 但 $\|f_j\|_1<2^{-j}$. 由上所说, 存在 $(F_j,v_j,G_j)\in\mathfrak{M}_0$, 使得

$$\|F_j\|_\infty\leqslant 6\cdot 2^{-j},\quad P(G^*>1)>1/2.$$

令 $\tilde F_j=jF_j,\tilde G_j=jG_j$, 则

$$(\tilde F_j,v_j,\tilde G_j)\in\mathfrak{M}_0,\quad \|\tilde F_j\|\leqslant 6j2^{-j},\quad P(\tilde G_j>j)>1/2.$$

不妨设 $\mathrm{d}F_{j1}=0$, 基本概率空间是同一个并且 $B_{j\infty}$ 相互独立. 此时存在 n_j,

$$A_j=\{w:\exists n\leqslant n_j,|G_{jn}|>j\}$$

时, $P(A_j)>1/2$. 考虑序列

$$(D_{11},\cdots,D_{1n_1},D_{21},\cdots,D_{2n_2},D_{31},\cdots),$$

其对应的 WP 鞅记为 $\tilde{F}$, 则

$$\|\tilde{F}\|_\infty \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|\tilde{F}_{jn_j}\| \leqslant 6\sum_{j=1}^{\infty} j2^{-j} < \infty.$$

F 经过序列

$$(\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1n_1},\varepsilon_{21},\cdots,\varepsilon_{2n_2},\cdots)$$

的变换记为 $\tilde{G}$, 由于 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A_j)=\infty$, 根据 Borel-Cantelli 引理,

$$P(\tilde{G}^*=\infty) \geqslant P(\limsup_{j\to\infty} A_j)=1.$$

矛盾. 故 (iii)⇒(i) 成立.

(iv)⇒(i). 由 (iii)⇒(i) 证明中所说的事实, 将 (iv) 中的 $\|f\|_\infty<\infty$ 换为 $\|f\|_1<\infty$ 是可行的. 我们假定每个 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}_0$, $\|f\|_1<\infty$ 时, g_n 依概率收敛. 在此条件下我们证明 $X\in$UMD.

此时由定理条件, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $\|f\|_1<\delta$ 时, $\sup\limits_n P(\|g_n\|>\varepsilon)<\varepsilon$. 定义停时 $\tau=\inf\{n:\|g_n\|>\varepsilon\}$, 则 $f^{(\tau)}=(f_{\tau\wedge n}), g^{(\tau)}=(g_{\tau\wedge n})$ 是鞅并且 $g^{(\tau)}$ 是 $f^{(\tau)}$ 经过 v 的变换, 也是 f 经过 $\bar{v}=(v_n\chi_{\{\tau\geqslant n\}})$ 的变换. 于是由所说条件应有 $\sup\limits_n P(\|g_{\tau\wedge n}\|>\varepsilon)>\varepsilon$. 但

$$P(\|g_{\tau\wedge n}\|>\varepsilon)=P(\tau\leqslant n),$$

所以

$$P(\sup_n\|g_{\tau\wedge n}\|>\varepsilon)=P(\tau<\infty)=\lim_{n\to\infty}P(\tau\leqslant n)\leqslant\varepsilon.$$

换言之, 只要 $\|f\|_1<\delta$, 则 $P(g^*>\varepsilon)\leqslant\varepsilon$, 由此知道存在 $c>0$, 使得当 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}_0$, 并且 $g^*>1$ a.e. 时, $\|f\|_1\geqslant c$. 于是必有 $X\in$UMD.

7.3 UMD 空间的若干性质

在 7.1 节中我们已叙述过 UMD 空间的简单性质. 本节将讨论 UMD 空间的超自反性, X 与 $L_\Phi(\mu,X)$ 的 UMD 性质的关系, 内插性质, 鞅变换的加权不等式, 大数定律等.

定理 1 (Aldous) UMD 空间具有超自反性.

证明 这里先有一个例子: $L_p(\mu,c_0)$ 中具有不是无条件的鞅差序列. 设 $(e_i,i\geqslant 1)$ 是 c_0 的标准基, $(\beta_i,i\geqslant 1)$ 是独立 R.V. 序列,

$$P(\beta_i=-1)=\frac{9}{10},\quad P(\beta_i=9)=\frac{1}{10}. \tag{3.1}$$

$\tau_j(\omega)$ 是第 j 个整数 i 它使得 $\beta_i(\omega)=9$. 定义

$$Y_n(\omega)=(-1)^n\beta_n(\omega)e_j,$$

若 $\tau_{j-1}(\omega)<n\leqslant\tau_j(\omega)$. 注意 $E\beta_n=0$ 并且彼此独立, 所以 Y_n 是鞅差序列. 此外

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}Y_i(\omega)\right\|_{c_0}\leqslant 10,\quad \left\|\sum_{i=1}^{n}Y_i\right\|_{L_p(c_0)}\leqslant 10,\quad \forall n\geqslant 1. \tag{3.2}$$

我们将证明 $\left\|\sum_{i=1}^{n}(-1)^iY_i\right\|_{c_0}=b_n\to\infty$ a.e..

事实上, 固定 m, 设 $A_j=\{\omega:\tau_j>\tau_{j+1}+m+10\}$, A_j 相互独立并且具有相等的非 0 概率, 于是 $P(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j)=1$. 但对于 $\omega\in A_j$, 由 τ_j 的定义和 e_j 的系数得到当 n 充分大时 $\left\|\sum_{i=1}^{n}(-1)^iY_i(\omega)\right\|_{c_0}\geqslant m$, 从而

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n}(-1)^iY_i(\omega)\right\|_{c_0}\geqslant m\right)=1, \tag{3.3}$$

m 是任意的, 故得出所要的结论.

但对于每个固定的 n, $(Y_i, 1\leqslant i\leqslant n)$ 只涉及 c_0 的有限维子空间, 如果 X 是 UMD, c_0 必不会在 X 中有限可表现, 否则就不会出现上面所说的情况. 根据 6.2 节定理 4, 存在 $q<\infty$, X 是 q 余型的. X 必同构于 q 一致凸空间, 因此是超自反的. 定理证毕.

文献 [5] 还证明了如果 $L_p(\mu,X)$ 具有无条件基, 则其中的鞅差一定是无条件的, 从而 $X\in$UMD. 若 $L_p(\mu,X)$ 以一个鞅差作为基底 (不止是基序列), 则 $\dim X=1$. 此外 Pisier 和 Bourgain[28] 都分别给出反例, 一个 Banach 空间或 Banach 格可以是超自反的, 但它们并不是 UMD 空间. 在 7.4 节中我们将给出 Pisier 的反例的另一种验证方法.

定理 2 设 X 是 Banach 空间, Φ 是限制增长的严格凸函数, $1<q_\Phi\leqslant p_\Phi<\infty$, 则 $X\in$UMD当且仅当 $L_\Phi(\mu,X)\in$UMD.

证明 若 $L_\Phi(\mu,X)\in$UMD, 由于 $L_\Phi(\mu,X)$ 中含有与 X 同构的子空间, 故有 $X\in$UMD.

为了证明相反的关系成立, 注意一个实值 Orlicz 空间是自反的当且仅当 Φ 及其补函数 Ψ 同时满足 Δ_2 条件 (Φ 既是严格凸又是限制增长). 这一条件可以换为等价条件：存在互补的 Young 函数 M,N, 使得对于足够大的 $\|u\|_\Phi$,

$$CN^{-1}\left(\int_\Omega\Phi(u(\omega))\mathrm{d}\mu\right)\leqslant\|u\|_\Phi\leqslant KM^{-1}\left(\int_\Omega\Phi(u(\omega))\mathrm{d}\mu\right), \tag{3.4}$$

其中 $0 < C \leqslant K$. 见文献 [187].

现在假定 $X \in$UMD, 则 $X, L_\Phi(\mu, X)$ 都具有 RN 性质. 若 M, N 就是 (3.4) 中的函数. 令 $M'(t) = M(K^{-1}t), N'(t) = N(c^{-1}t), K, C$ 都是该结论中的常数, 则 M', N' 与 M, N 作为 Orlicz 函数类分别等价.

为了明确, 设 $L_\Phi(\mu, X)$ 定义在概率空间 $\left(\Omega', \Sigma', P'\right)$ 上, $f = (f_n)$ 是取值于 $L_\Phi(\mu, X)$ 的鞅, $g = (g_n)$ 是 f 经过 v 的变换. 注意 $f_n(\omega), g_n(\omega) \in L_\Phi(\mu, X)$, 对于几乎所有 $t \in \Omega', g_n(\omega)(t) \in X$. 如果 $L > 0$ 使得当 $\|u\|_\Phi \geqslant L$ 时,

$$M'(\|u\|_\Phi) = M(K^{-1}\|u\|_\Phi) \leqslant \int_{\Omega'} \Phi(u)\mathrm{d}P'.$$

取 $u = \|g_n(\omega)(t)\|_X$, 并且记 $A = \{t : \|g_n(\omega)(t)\|_\Phi > L\}$, 则

$$\begin{aligned}
EM'(\|g_n\|) &= \int_\Omega M'(\|g_n(\omega)\|_\Phi)\mathrm{d}P \\
&= \int_\Omega M'(\|g_n(\omega)\|_\Phi \chi_A + \|g_n(\omega)\|_\Phi \chi_{A^c})\mathrm{d}P \\
&\leqslant M'(L) + \int_\Omega M'(\|g_n(\omega)\|_\Phi \chi_A)\mathrm{d}P \\
&\leqslant M'(L) + \int_\Omega \int'_\Omega \Phi(\|g_n(\omega)(t)\|_X)\chi_A \mathrm{d}P'\mathrm{d}P \\
&\leqslant M'(L) + \int'_\Omega \int_\Omega \Phi(\|g_n(\omega)(t)\|_X)\mathrm{d}P\mathrm{d}P',
\end{aligned}$$

(f_n) 是鞅. $E(\mathrm{d}f_n|B_{n-1}) = 0$ 意味着对几乎所有 $t \in \Omega', (f_n(\omega)(t))$ 是 X 值鞅. 固定如此的 t, 由 X 的 UMD 性质, 应用 7.1 节推论 1 得到

$$\int_\Omega (\|g_n(\omega)(t)\|_X)\mathrm{d}P \leqslant \int_\Omega \Phi(g^*(\omega)(t))\mathrm{d}P \leqslant C'_\Phi \int_\Omega \Phi(f^*(\omega)(t))\mathrm{d}P.$$

现在取 $u = f^*(\omega)(t)$, 令 $B = \{\omega : \|f^*(\omega)\|_\Phi > L\}$, 则由 (3.4),

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_\Omega \Phi(f^*(\omega)(t))\mathrm{d}P\mathrm{d}P' \\
=&\int_\Omega \int'_\Omega \Phi(f^*(\omega)(t)\chi_B + f^*(\omega)(t)\chi_{B^c})\mathrm{d}P'\mathrm{d}P \\
\leqslant&\Phi(L) + \int_\Omega \int_\Omega \Phi(f^*(\omega)(t)\chi_B)\mathrm{d}P'\mathrm{d}P \\
\leqslant&\Phi(L) + \int_\Omega N'(\|f^*(\omega)\|_\Phi)\mathrm{d}P.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

特别地, 若 f 是一致有界 WP 鞅, 例如, $f^*(\omega) \leqslant L' < \infty$, 则以上各式给出

$$EM'(\|g_n\|) \leqslant M'(L) + C'_\Phi \Phi(L) + \int_\Omega N'(\Phi(L'))\mathrm{d}P < \infty, \tag{3.6}$$

于是由上节末尾所得到的结论, $L_{\Phi}(\mu, X)$ ∈UMD.

推论 实值 Orlicz 空间 $L_{\Phi}(\mu)$ ∈UMD, 当且仅当 Φ 与其补函数同时满足 Δ_2 条件, 即 $1 < q_{\Phi} \leqslant p_{\Phi} < \infty$.

证明 由于 R ∈UMD, 由定理 2, $L_{\Phi}(\mu)$ ∈UMD. 反之, 若 $L_{\Phi}(\mu)$ ∈UMD, 则 $L_{\Phi}(\mu)$ 是自反空间. 于是 $1 < q_{\Phi} \leqslant p_{\Phi} < \infty$.

由定理 2 知道, 若 X ∈UMD, 则当 $1 < p < \infty$ 时, $L_p(\mu, X)$ 是 UMD 空间. 容易直接证明, 此时 $l_p(X)$ 也是 X ∈UMD 空间. 甚至关于序列 Orlicz 空间 $l_{\Phi}(X)$ 也有类似的结果, 即若 Φ 在 0 点满足限制增长和严格凸条件, 则 X ∈UMD 当且仅当 $l_{\Phi}(X)$ ∈UMD.

通常调和分析中遇到的空间哪些是 UMD 空间? 这一问题具有实际意义. Blasco 曾经证明了 Lorentz 空间 L_{pq} ∈UMD 当且仅当 $p, q \in (1, \infty)$. 如果 X ∈UMD, 则以 X 中元素为分量的序列空间 l_B^p ∈UMD. Cobos[67] 系统地审查了某些函数空间的 UMD 性质, 证明了在 $p \in (1, \infty), r \in (-\infty, \infty)$ 时的 Zygmund 空间 $L_p(\text{Log } L)^r$, 在 $r > 0$ 时的 $L_1(\text{Log}L)^r$ 和 Z^r 都是 UMD 空间. 还有在 $p \in [1, \infty)$, $r > 0$ 时的 O'Neil 空间 $K^p(\text{Log}L)^r$ 以及 $p, q \in (1, \infty), r \in (-\infty, \infty)$ 时的 Lorentz-Zygmund 空间 $L_{pq}(\text{Log}L)^r$ 也都是 UMD 空间. 此外, Cobos 还讨论了更广泛的 Lorentz-Marcinkiewicz 算子空间的 UMD 性质. 文献 [30] 证明了从 Hilbert 空间到 Hilbert 空间的紧算子的 Schatten 类 $S^p (1 < p < \infty)$ 具有 UMD 性质. 有关的定义和详细证明可见以上参考文献.

让我们转到内插空间, 这里实和复内插方法都是有效的, 但我们仅证明实方法的结论.

定理 3 设 X_0, X_1 是可比较的内插空间对, X_0, X_1 ∈UMD, $0 < \theta < 1 < p < \infty$, 则内插空间 $(X_0, X_1)_{\theta p}$ ∈UMD.

证明 需要证明存在 $c_p > 0$, 使得每个取值于 $(X_0, X_1)_{\theta p}$ 的 $(f, v, g) \in \mathfrak{M}_0$ 满足

$$||g_n||_{L_p((X_0,X_1)_{\theta p})} \leqslant c_p ||f_n||_{L_p((X_0,X_1)_{\theta p})}, \quad \forall n \geqslant 1. \tag{3.7}$$

我们应用 Lions-Peetre 内插定理于 WP 鞅. 对于 f 的每个分解 $f = f_0 + f_1 = (f_{0n}) + (f_{1n})$, 经过变换 v, 对应着 g 的分解 $g = g_0 + g_1 = (g_{0n}) + (g_{1n})$, 于是泛函

$$\begin{aligned} K(t, g_n) &= \inf_{g=g_0+g_1} \{||g_{0n}||_{L_p(X_0)} + t||g_{1n}||_{L_p(X_1)}\} \\ &\leqslant \inf_{f=f_0+f_1} \{c_p ||f_{0n}||_{L_p(X_0)} + tc_p' ||f_{1n}||_{L_p(X_1)}\} \\ &= c_p K(c_p' c_p^{-1} t, f_n). \end{aligned}$$

这是由于 X_0, X_1 ∈UMD, c_p, c_p' 即是定义中出现的常数. 于是

$$\begin{aligned}||g_n||^p_{L_p((X_0,X_1)_{\theta p})} &\leqslant c^p||g_n||^p_{(L_p(X_0),L_p(X_1))_{\theta p}}\\ &= c^p\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,g_n))^p t^{-1}\mathrm{d}t\\ &\leqslant c^p c_p^p\int_0^\infty (t^{-\theta}K(c_p' c_p^{-1}t,f_n))^p t^{-1}\mathrm{d}t\\ &\leqslant c_{\theta,p}||f_n||^p_{(L_p(X_0),L_p(X_1))_{\theta p}}\\ &\leqslant c_{\theta,p}||f_n||^p_{(L_p(X_0,X_1)_{\theta p})}.\end{aligned}$$

此即 (3.7).

下面讨论正规鞅变换的加权不等式.

定理 4 设 X 是 Banach 空间, Z 是测度变换, $1 < p < \infty$, 则下面条件有关系：(i)+(ii)⇒(iii), (i)+(iii)⇒(ii). 若允许 (B_n) 变动, 则 (ii)+(iii)⇒(i).

(i) $X \in$UMD;

(ii) $Z \in (A_p, B_n)$;

(iii) 存在 $c = c_p > 0$, 使得每个取值于 X 的 $(f,v,g) \in \mathfrak{M}(B_n)$ 满足

$$||g^*||_p^\wedge \leqslant c||f^*||_p^\wedge \tag{3.8}$$

或者

$$\lambda^p\hat{P}(g^* > \lambda) \leqslant c||f||_p^\wedge, \quad \forall\lambda > 0, \tag{3.9}$$

其中的 (A_p, B_n) 和 $\mathfrak{M}(B_n)$ 是相对于 (B_n) 的权函数和鞅变换族.

证明 (i)+(ii)⇒(iii). 由于 (B_n) 是正则的, $Z \in (A_p, B_n)$, 故存在 $1 < r < p$, 使得 $Z \in (A_r, B_n)$. 于是有 $K > 0$, 对于任何非负可测函数 Y,

$$E(Y|B_n)^r \leqslant K\hat{E}(Y^r|B_n), \quad \forall n \geqslant 1. \tag{3.10}$$

由 UMD 性质, $\forall 1 < q < \infty$, $\exists c_q > 0$, 使得

$$||g_n||_q \leqslant c_p||f_n||_q, \quad \forall n \geqslant 1, \quad (f,v,g) \in \mathfrak{M}(B_n).$$

由此不难得到 $\forall n$, 当 $k \leqslant n$ 时,

$$E(||g_n||^q|B_k) \leqslant c_q^q E(||f_n||^q|B_k). \tag{3.11}$$

取 s, $r < s < p$, 有 (3.10), (3.11) 和 Jensen 不等式,

$$\begin{aligned}||g_k||^s = ||E(g_n|B_k)||^s &\leqslant E(||g_n||^{\frac{s}{r}}|B_k)^r\\ &\leqslant C_{s/r}E(||f_n||^{\frac{s}{r}}|B_k)^r \leqslant KC_{s/r}\hat{E}(||f_n||^s|B_k).\end{aligned}$$

记 $h_k=\hat{E}(\|f_n\|^s|B_k), h=(h_k)$, 则有

$$g_n^{*s}\leqslant KC_{s/r}h_n^*\leqslant KC_{s/r}h^*. \tag{3.12}$$

应用 Doob 不等式于 h 得到

$$\|g_n^{*s}\|_{p/s}^{\wedge}\leqslant c\|h^*\|_{p/s}^{\wedge}\leqslant c\|h\|_{p/s}^{\wedge}\leqslant c\|\|f_n\|^s\|_{p/s}^{\wedge},$$

于是

$$\|g_n^*\|_p^{\wedge}\leqslant c\|f_n\|_p^{\wedge},\quad \forall n\geqslant 1.$$

由此得到 (3.8), 再由 Chebyshev 不等式得到 (3.9).

(i)+(iii)⇒(ii). 只须证明 (i)+(3.9)⇒(ii). 首先注意 (3.9) 意味着对任何正则鞅 $h=(h_n)$,

$$\lambda^p\hat{P}(h^*>\lambda)\leqslant c\|h\|_p^{\wedge p}. \tag{3.13}$$

现在取 $f\in\hat{L}_p$ 为标量函数, $x\in X, \|x\|=1, B\in B_n$, 令 $h=f\chi_B x$, $f_n=E(f|B_n)$, $h_n=E(h|B_n)$, 则 $h_n=f_n\chi_B x$, 由 (3.13)

$$\lambda^p\int_{\{|f_n|>\lambda\}\cap B}\mathrm{d}\hat{P}\leqslant c\hat{E}\|h\|^p=c\int_B|f|^p\mathrm{d}\hat{P}. \tag{3.14}$$

对每个自然数 k, 记 $A_k=\{2^k<|f_n|\leqslant 2^{k+1}\}\subset\{2^k<|f_n|\}$, $A_k\in B_n$, 由 (3.14),

$$\begin{aligned}\int_\Omega|f_n|^p\mathrm{d}\hat{P}&\leqslant\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{A_k}2^{(k+1)p}\mathrm{d}\hat{P}=2^p\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{A_k}|f|^p\mathrm{d}\hat{P}\\&=2^p\int_\Omega|f|^p\mathrm{d}\hat{P}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

将 (3.15) 应用于函数 $f=Z^{-\frac{1}{p-1}}\chi_B$, 则

$$\begin{aligned}&\int_B E(Z^{-\frac{1}{p-1}}|B_n)^pE(Z|B_n)\mathrm{d}P=\int_B E(Z^{-\frac{1}{p-1}}|B_n)^pZ\mathrm{d}P\\&=\int_B E(Z^{-\frac{1}{p-1}}|B_n)^p\mathrm{d}\hat{P}\leqslant c\int_B Z^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}\hat{P}\\&=c\int_B Z^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}P=c\int_B E(Z^{-\frac{1}{p-1}}|B_n)\mathrm{d}P,\end{aligned}$$

$B\in B_n$ 是任意的, 由此得出

$$E(Z|B_n)E(Z^{-\frac{1}{p-1}}|B_n)^{p-1}\leqslant c,\quad \text{a.e.},\quad \forall n\geqslant 1,$$

即 $Z\in(A_p,B_n)$.

(ii)+(iii)⇒(i). 同样只须证明 (ii)+(3.9)⇒(i). 设 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}(B_n), \|f\|_\infty<\infty$, 由 $Z\in A_p$,

$$\|f\|_p^{\wedge p}=\int_\Omega\|f\|^p Z\mathrm{d}P\leqslant\|f\|_\infty^p EZ<\infty,$$

由 (3.9),

$$\lambda^p\hat{P}(g^*>\lambda)\leqslant c\|f\|_p^{\wedge p}\leqslant c\|f\|_\infty^p,\quad\forall\lambda>0.$$

于是 $\hat{P}(g^*<\infty)=1$, 但 $\hat{P}$ 与 P 有相同 0 测集, 故 $P(g^*<\infty)=1, X\in$UMD.

当 $p=1$ 时, 上面定理中的弱型不等式仍成立, 这就是

定理 5 设 X 是 Banach 空间, Z 是测度变换, 则下面条件有关系 (i)+(ii)⇒(iii), (i)+(iii)⇒(ii). 若允许 (B_n) 变动, 则 (ii)+(iii)⇒(i).

(i) $X\in$UMD;

(ii) $Z\in(A_1,B_n)$;

(iii) 存在 $c>0$, 使得每个 X 值 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}(B_n)$ 满足

$$\lambda\hat{P}(g^*>\lambda)\leqslant c\|f\|_1^\wedge,\quad\forall\lambda>0.\tag{3.16}$$

证明 (i)+(ii)⇒(iii). 先设 $\tilde{f}\in L_1(P,X), f_n=E(\tilde{f}|B_n), (|\tilde{f}|_n, n\geqslant1)$ 是实鞅, 类似于 (3.10), 我们有

$$|\tilde{f}|_n=E(\|\tilde{f}\||B_n)\leqslant K\hat{E}(\|\tilde{f}\||B_n),\quad n\geqslant1,\tag{3.17}$$

于是

$$|\tilde{f}|^*=\sup_n|\tilde{f}|_n\leqslant K\sup_n\hat{E}(\|\tilde{f}\||B_n)\triangleq K|\tilde{f}|^{**},$$

由极大不等式

$$\hat{P}(|\tilde{f}|^*>\lambda)\leqslant\hat{P}\left(|\tilde{f}|^{**}>\frac{\lambda}{K}\right)\leqslant\frac{K}{\lambda}\hat{E}\|\tilde{f}\|,\quad\forall\lambda>0.\tag{3.18}$$

定义 $\tau=\inf\{n:(|\tilde{f}|_n>\lambda)\}$, 则

$$\lambda\hat{P}(|\tilde{f}|^*\leqslant\lambda,g^*>\lambda)=\lambda\hat{P}(\tau=\infty,g^*>\lambda)\leqslant\lambda\hat{P}(g_\tau^*>\lambda).\tag{3.19}$$

由 Chebyshev 不等式

$$\lambda^2\hat{P}(g_\tau^*>\lambda)\leqslant c\hat{E}(g_\tau^*)^2,$$

由于 $Z\in(A_1,B_n)$, 则 $Z\in(A_2,B_n)$, 由定理 4 的结果知道

$$\hat{E}g_\tau^{*2}\leqslant c\hat{E}\|f_\tau\|^2\leqslant c\hat{E}|\tilde{f}|_\tau^2.$$

根据 (B_n) 的正规性,

$$|\tilde{f}|_n = E(\|\tilde{f}\||B_n) \leqslant dE(\|\tilde{f}\||B_{n-1}) = d|\tilde{f}|_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 1,$$

这里 d 为某个常数, 故 $|\tilde{f}|_\tau \leqslant d|\tilde{f}|_{\tau-1}$, 于是由 (3.19) 得出

$$\hat{E}|\tilde{f}|_\tau^2 \leqslant d^2\hat{E}|\tilde{f}|_{\tau-1}^2 \leqslant \lambda d^2\hat{E}|\tilde{f}|_{\tau-1} \leqslant \lambda K d^2\hat{E}\|\tilde{f}\|,$$

(3.19) 变为

$$\lambda\hat{P}(|\tilde{f}|^* \leqslant \lambda, g^* > \lambda) \leqslant Kd^2\hat{E}\|\tilde{f}\|.$$

从而 (3.18) 变为

$$\begin{aligned}\lambda\hat{P}(g^* > \lambda) &\leqslant \lambda\hat{P}(|\tilde{f}|^* \leqslant \lambda, g^* > \lambda) + \lambda\hat{P}(|\tilde{f}|^* > \lambda)\\ &\leqslant Kd^2\hat{E}\|\tilde{f}\| + \lambda\hat{E}|\tilde{f}|^*\\ &\leqslant Kd^2\hat{E}\|\tilde{f}\| + \hat{E}\|\tilde{f}\| = C\hat{E}\|\tilde{f}\|.\end{aligned}$$

对于一般情况 ($f = (f_n)$ 不必正则), 先考虑停止于 n 的鞅得到

$$\lambda\hat{P}(g_n^* > \lambda) \leqslant c\hat{E}\|f_n\|, \quad \forall n \geqslant 1,$$

然后得到相应的不等式.

(i)+(iii)⇒(ii). 这里可仿照定理 4 相应部分的证明. 实际上由 (iii), 对任何实函数 $\tilde{f} \in \hat{L}_1, f_n = E(\tilde{f}|B_n)$,

$$\int_\Omega \|f_n\|\mathrm{d}\hat{P} \leqslant c\int_\Omega \|\tilde{f}\|\mathrm{d}\hat{P}, \quad n \geqslant 1.$$

若 $\tilde{f}$ 非负, 则

$$\int_\Omega \tilde{f}E(Z|B_n)\mathrm{d}P = \int_\Omega \tilde{f}_n Z\mathrm{d}P \leqslant c\int_\Omega \tilde{f}Z\mathrm{d}P.$$

$\tilde{f}$ 是任意的, 故 $E(Z|B_n) \leqslant CZ$ a.e.,$\forall n \geqslant 1$. 所以 $Z \in (A_1, B_n)$.

(ii)+(iii)⇒(i) 的证明与定理 4 相应部分的证明完全类似.

定理 6 设 X 是 Banach 空间, 以下等价:

(i) $X \in$UMD;

(ii) $\forall (f, v, g) \in \mathfrak{M}$, $\sup\limits_n \left\|\sum\limits_{i=1}^n i^{-1}\mathrm{d}f_i\right\|_1 < \infty$, g_n 满足强大数定律;

(iii) (ii) 换为弱大数定律成立.

证明 (i)⇒(ii). 设 $\mathrm{d}\tilde{f}_i = i^{-1}\mathrm{d}f_i$, 则 $\sup\limits_n \|\tilde{f}_n\|_1 < \infty$. 若 $\tilde{g}$ 是 $\tilde{f} = (\tilde{f}_n)$ 经过 v 的变换, 由于 $X \in$UMD, $\tilde{g}_n$ a.e. 收敛, 由 Kronecker 引理, $g_n/n \to 0$.

(ii)⇒(iii), 现证 (iii)⇒(i). 由 (iii) 中条件, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当 $\sup_n\left\|\sum_{i=1}^n i^{-1}\mathrm{d}f_i\right\|_1<\delta$ 时, $\sup_n P(\|g_n\|>n\varepsilon)<\varepsilon$. 现在设 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}$, 并且 $\sup_n\|f_n\|_1<\delta$, 对于任何固定的 $j,k>0$, 考虑由差序列

$$(0,\cdots,0,(j+1)\mathrm{d}f_1,\cdots,(j+k)\mathrm{d}f_k,0,\cdots)$$

确定的鞅 $\tilde{f},\tilde{f}$ 满足

$$\sup_n\left\|\sum_{i=1}^n\frac{\mathrm{d}\tilde{f}_i}{i}\right\|_1=\sup_n\|f_n\|_1<\delta.$$

若 $\tilde{g}$ 是 $\tilde{f}$ 经过 v 的变换, 依定理条件

$$P\left(\frac{\|\tilde{g}_{j+k}\|}{j+k}>\varepsilon\right)=P\left(\frac{1}{j+k}\left\|\sum_{i=1}^k v_i(j+i)\mathrm{d}f_i\right\|>\varepsilon\right)<\varepsilon,$$

令 $j\to\infty$, 得到

$$P(\|g_k\|>\varepsilon)=\lim_{j\to\infty}P\left(\frac{1}{j+k}\left\|\sum_{i=1}^k v_i(j+i)\mathrm{d}f_i\right\|>\varepsilon\right)\leqslant\varepsilon.$$

适当定义停时还可得到 $P(g^*>\varepsilon)\leqslant\varepsilon$. 这说明 $g^*<\infty$ a.e., 于是 $X\in$UMD.

Neveu-Woyczynski 型收敛定理.

对于 X 值鞅 $f=(f_n)$ 和 $r\geqslant1$, 设下鞅 $(\|f_n\|^r,n\geqslant0)$ 的 Doob 分解是 $\|f_n\|^r=M_n^{(r)}+A_n^{(r)}$, 这里前者是鞅 $(M_0^{(r)}=0)$, 后者是单调增加可料序列. 记 $A_\infty^{(r)}=\lim_{n\to\infty}A_n^{(r)}$a.e., 容易知道

$$\begin{aligned}&E\|f_n\|^r=EM_n^{(r)}+EA_n^{(r)}=EA_n^{(r)},\\&\sup_n E\|f_n\|^r=\lim_{n\to\infty}EA_n^{(r)}=EA_\infty^{(r)}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

定理 7 设 $X\in$UMD, 则

(i) $\forall(f,v,g)\in\mathfrak{M},EA_\infty^{(1)}<\infty$ 时 g_n a.e. 收敛;

(ii) 若 $r>1,0<p\leqslant r$, 使得 $EA_\infty^{(r)p/r}<\infty$, 则存在 $c=c_{rp}>0$, 使得

$$Eg^{*p}\leqslant cEA_\infty^{(r)p/r},\quad\forall(f,v,g)\in\mathfrak{M},\tag{3.21}$$

此时 g_n a.e. 收敛.

以上每一条成立对于 $X\in$UMD 还是充分的.

证明 (i) 是由于 $\|f\|_1=EA_\infty^{(1)}<\infty$. 由 7.1 节定理 2 立即得出.

对于 (ii), 若 $p=r>1$, 则 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}$ 时,

$$\|g^*\|_p\leqslant c_p\|f^*\|_p,$$

利用 Doob 不等式即得出 (3.21)

$$\begin{aligned}Eg^{*p}&\leqslant c_p^pEf^{*p}\leqslant c_p^p\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\sup_n E\|f_n\|^p\\&=c_p^p\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^pEA_\infty^{(p)}<\infty.\end{aligned}$$

若 $p<r$, 定义 $\tau=\inf\{n:A_{n+1}^{(r)}>\lambda^r\}(\lambda>0)$, 则

$$\begin{aligned}P(f^*>\lambda)&\leqslant P(\tau<\infty)+P(f^*>\lambda,\tau=\infty)\\&\leqslant P(A_\infty^{(r)}>\lambda^r)+P(f_\tau^*>\lambda).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}Ef^{*p}&\leqslant\int_0^\infty P(A_\infty^{(r)}>\lambda^r)\mathrm{d}\lambda^p+\int_0^\infty P(f_\tau^*>\lambda)\mathrm{d}\lambda^p\\&=EA_\infty^{(r)p/r}+\int_0^\infty\lambda^{-r}E\|f_\tau\|^r\mathrm{d}\lambda^p\\&=EA_\infty^{(r)p/r}+\int_0^\infty\lambda^{-r}EA_\tau^{(r)}\mathrm{d}\lambda^p\\&=EA_\infty^{(r)p/r}+\int_0^\infty\lambda^{-r}\int_{\{A_\infty^{(r)}>\lambda^r\}}A_\tau^{(r)}\mathrm{d}P\mathrm{d}\lambda^p\\&\leqslant EA_\infty^{(r)p/r}+p\int_\Omega A_\infty^{(r)}\mathrm{d}P\int_0^{A_\infty^{(r)}}\lambda^{p-r-1}\mathrm{d}\lambda\\&\leqslant\Big(2+\frac{p}{p-r}\Big)EA_\infty^{(r)p/r},\end{aligned}$$

由鞅变换不等式,

$$Eg^{*p}\leqslant c_p^pEf^{*p}\leqslant c_p^p\Big(2+\frac{p}{p-r}\Big)EA_\infty^{(r)p/r}.$$

至于定理最后的断言可利用一致有界 WP 鞅满足 $g^*<\infty$ a.e. 得到.

Marcinkiewicz-Zygmund 型大数定律.

定理 8 设 $X\in$UMD, $(f,v,g)\in\mathfrak{M}$, $(\mathrm{d}f_n)\succ Y_0$, 则

(i) $Y_0\in L\log^+L$ 时, $g_n/n\to0$, a.e.;

(ii) $Y_0\in L_p(p>1)$ 时, $g_n/n^{1-\varepsilon}\to0$, a.e.,

其中 $0<\varepsilon<1$ 是某个正数.

这一定理的证明与 6.3 节定理 3 类似, 这里略去.

7.4 奇异积分算子的有界性

本章开头已经定义了 Hilbert 变换H, 像实值情况一样, 积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t-s)}{s}\mathrm{d}s.$$

一般来说只有在主值意义下才有意义, 所以用截断 Hilbert 变换$H_\varepsilon f(t)$, 而后令

$$Hf(t)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}H_\varepsilon f(t),\quad f\in L_p(R,X), \tag{4.1}$$

只要此极限 a.e. 存在. 另一方面, Hilbert 变换的周期形式, 即共轭函数是指

$$\tilde{H}f(t)=\lim_{\delta\to 0^+}\tilde{H}_\delta f(t), \tag{4.2}$$

其中

$$\tilde{H}_\delta f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|s|\leqslant\pi}f(t-s)\cot\frac{2}{s}\mathrm{d}s,\quad f\in L_p(T,X),$$

$T=[0,2\pi]$, 假若此极限 a.e. 存在. 若空间 X 能保证 H 在 $L_p(R,X)(1<p<\infty)$ 上有界, 则记为 $X\in HT$.

首先我们给出一些基本的结论, 其证明与实值情况类似.

引理 1 设 $1<p,q<\infty,p^{-1}+q^{-1}=1$, 则

(i) H 在 $L_p(R,X)$ 上有界当且仅当 $\tilde{H}$ 在 $L_p(T,X)$ 上有界;

(ii) 对于每个 $f\in L_p(R,X)$, $Hf(t)$ a.e. 存在当且仅当对于每个 $f\in L_p(T,X)$, $\tilde{H}f(t)$ a.e. 存在;

(iii) $\tilde{H}f(t)$ 对于每个 $f\in L_p(T,X)$ a.e. 存在, 当且仅当它对于每个 $f\in L_q(T,X)$ a.e. 存在;

(iv) 对于每个 $\delta>0,\tilde{H}_\delta$ 在 $L_2(T,X)$ 上有界;

(v) H 在 $L_p(R,X)$ 上有界, 当且仅当它在 $L_q(R,X^*)$ 上有界. 这里 X^* 是 X 的共轭.

证明 (i), (ii), (iv) 可以像实值情况一样通过计算来证明. (iii) 通过函数空间的 Calderon-Zygmund 分解得到. 至于 (v), 利用 $L_p(R,X)^*=L_q(R,X^*)$ 以及公式

$$||f||_p=\sup_{||g||\leqslant 1}\left|\int g(\omega)f(\omega)\mathrm{d}\mu\right|,\quad f\in L_p(R,X),\quad g\in L_q(R,X^*)$$

得到.

应用上面结论还可证明

引理 2 设 X,Y,Z 是 Banach 空间, 则下面每一条都能保证从 $X\in HT$ 推出 $Y\in HT$:

(i) Y 与 X 同构;

(ii) $Y \subset X$;

(iii) $Z \subset X$, $Y = X/Z$;

(iv) $Y = Z \oplus Z$, 其中 $Z \in HT$;

(v) $Y = X^*$. 实际上有 $X \in HT$ 当且仅当 $X^* \in HT$.

本节的主要结论是

定理 1 $X \in$HT 当且仅当 $X \in$UMD.

让我们通过一些引理和定理来阐述.

引理 3 设 $X \in$ UMD, $1 < p < \infty$, $d_k = \psi_k(v_0, \cdots, v_{k-1}), \psi_k$: $R^k \to X$ 是一列函数, $r_0, \cdots, r_k$ 是 R 函数序列, $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k r_k$, 则存在 $c_p > 0$, 使得

$$c_p^{-1}||f_n||_p^p \leqslant \int_0^1 \int_0^1 \left|\left|\sum_{k=1}^{n} d_k(t) r_k(s)\right|\right|^p \mathrm{d}t\mathrm{d}s \leqslant c_p||f_n||_p^p. \tag{4.3}$$

证明 考虑乘积空间 $[0,1]\times[0,1]$, 不妨视 $(d_1, d_2, \cdots)$ 对应的 σ 代数与 $(r_0, r_1, \cdots)$ 对应的 σ 代数独立. 此时 $(d_1 r_1, d_2 r_2, \cdots)$ 是鞅差. 令 $\varepsilon = (r_1(t)r_1(s), r_2(t)r_2(s), \cdots)$, 则 ε 是取 ± 1 值的 R.V. 序列. 此时若

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} d_k(t) r_k(s) = \sum_{k=1}^{n} d_k(t) r_k(s) \cdot r_k(t) r_k(s),$$

则 $g_n = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k(t) r_k(s)$ 是 $f = (f_n)$ 经过 ε 的变换, 反过来 f 也是 g 经过 ε 的变换. 由 Burkholder 不等式得到 (4.3).

定理 2 设 $X \in$UMD, $1 < p < \infty$, 则存在 $c_p > 0$, 使得对于任何自然数 n 和 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in X$, 若

$$u(re^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) r^k, \tag{4.4}$$

$$v(re^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin k\theta - b_k \cos k\theta) r^k, \tag{4.5}$$

则

$$\int_0^{2\pi} ||v(re^{\mathrm{i}\theta})||^p \mathrm{d}\theta \leqslant c_p \int_0^{2\pi} ||u(re^{\mathrm{i}\theta})||^p \mathrm{d}\theta, \quad \forall r \geqslant 0. \tag{4.6}$$

证明 仍考虑 R 函数序列 $\{r_k\}$, 令 $0 < \delta < 1/2$, $d_k = \delta r_{2k-1}, e_k = \delta r_{2k}$, $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k, Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k, Z_n = X_n + Y_n \mathrm{i}, (\mathrm{i}^2 = -1)$. 不妨设 $Z_0 = 0$, 记 $W_k = \prod_{j=0}^{k-1} \chi_{\{Z_j<1\}}$,

定义 $\tau(t) = \inf\{n : |z_n(t)| \geqslant 1\}$, 实际上 W_k 即是 $\{t : \tau(t) \geqslant k\}$ 的特征函数. 特别地, $W_1 = 1$, 若 $k \geqslant 2, W_k$ 是 $r_1, \cdots, r_{2k-2}$ 的可测函数, 于是 $(W_1 d_1, W_2 d_2, \cdots)$ 是鞅差. 记对应的鞅为 f, 则

$$S^{(2)}(f) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |W_k d_k|^2\Big)^{1/2} = \delta\Big(\sum_{k=1}^{\infty} W_k\Big)^{1/2} = \delta\tau^{1/2}$$

(因为 $W_k^2 = W_k, |d_k| = \delta$). 由于

$$|f_n(t)| = \begin{cases} |X_n(t)| \leqslant |Z_n(t)| < 1, & n < \tau(t), \\ |X_\tau(t)| \leqslant 1 + \delta < 2, & n \geqslant \tau(t). \end{cases}$$

总之 $||f||_p \leqslant ||f||_\infty \leqslant 2$. 根据实值鞅的 Burkholder-Gundy 不等式,

$$\delta||\tau^{1/2}||_p = ||S^{(2)}(f)||_p \leqslant c_p||f||_p \leqslant 2c_p. \tag{4.7}$$

所以 $\tau = \sum_{k=1}^{\infty} W_k < \infty$ a.e.. 由此得出 $\lim_{n\to\infty} Z_{\tau\wedge n} = Z_\tau$ a.e.,

$$|Z_{\tau\wedge n}| \leqslant 1 + 2\delta < 2, \quad 1 \leqslant Z_\tau \leqslant 1 + 2\delta \text{ a.e..} \tag{4.8}$$

另一方面, 作为 $(x + \mathrm{i}y)^k$ 的实部和虚部, $r^k \cos k\theta$ 和 $r^k \sin k\theta$ 关于 x, y 的三阶导数的绝对值小于等于 $k^3 2^{k-3}, |z| < 2$. 记

$$\gamma = n^3 2^n \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|).$$

由 Taylor 公式和 Laplace 方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$, 函数 u 必满足

$$||u(x+h, y+k) - u(x,y) - u_x(x,y)h - u_y(x,y)k - u_{xy}(x,y)hk))|| \leqslant \gamma\delta^3,$$

此处 $|x + \mathrm{i}y| < 1, |h| = |k| = \delta$. 若 $W_k(t) = 1$, 则 $|Z_{k-1}(t)| < 1$, $|Z_k(t)| < 2$, 从而

$$W_k||u(Z_k) - u(Z_{k-1}) - u_x(Z_{k-1})d_k - u_y(Z_{k-1})e_k - u_{xy}(Z_{k-1})d_k e_k||$$

$$\leqslant \gamma\delta^3 W_k. \tag{4.9}$$

固定 n, 令

$$U = \sum_{k=1}^{n} W_k[u_x(Z_{k-1})d_k + u_y(Z_{k-1})e_k], \tag{4.10}$$

$$W = \sum_{k=1}^{n} W_k u_{xy}(Z_{k-1})d_k e_k, \tag{4.11}$$

注意 $\tau\wedge n=\sum_{k=1}^{n}W_k$, 所以 (4.9), (4.10), (4.11) 意味着

$$|u(Z_{\tau\wedge n})-U-W|\leqslant\gamma\delta^3(\tau\wedge n),$$

或者

$$||u(Z_{\tau\wedge n})-U||_p\leqslant||W||_p+\gamma\delta^3||\tau\wedge n||_p. \tag{4.12}$$

由 (4.7) 知道

$$||\tau\wedge n||_p\leqslant||\tau||_{2p}\leqslant c_p\delta^{-2}. \tag{4.13}$$

为了估计 W, 记

$$W=\sum_{j=1}^{n}(a_jW^{2j-1}+b_jW^{2j}), \tag{4.14}$$

这里 W^j 关于 W 像 u^j 关于 u 一样, 特别地, $u^{2j-1}(re^{i\theta})=r^j\cos j\theta, u^{2j}(re^{i\theta})=r^j\sin j\theta$. 注意

$$(W_1u^j_{xy}(Z_0)d_1e_1,\cdots,W_nu^j_{xy}(Z_{n-1})d_ne_n,0,\cdots)$$

是鞅差序列, 第 k 项以 $k^2\delta^2$ 为界, 由实值鞅的 Burkholder-Gundy 不等式,

$$||W^j||_p\leqslant c_pn^2\delta^2\Big|\Big|\Big(\sum_{k=1}^{n}W_k^2\Big)^{1/2}\Big|\Big|_p=c_pn^2\delta^2||(\tau\wedge n)^{1/2}||_p.$$

由 (4.7) 和 (4.14) 得到 $||W||_p\leqslant c_p\gamma\delta$, 由 (4.12) 和 (4.13) 得出

$$||u(Z_{\tau\wedge n})-U||_p\leqslant c_p\gamma\delta,\quad ||v(Z_{\tau\wedge n})-V||_p\leqslant c_p\gamma\delta, \tag{4.15}$$

其中

$$V=\sum_{k=1}^{n}W_k[v_x(Z_{k-1})d_k+v_y(Z_{k-1})e_k]. \tag{4.16}$$

下面证明

$$||V||_p=c_p||U||_p, \tag{4.17}$$

显然 V 可表示为 $\sum_{k=1}^{2n}D_kr_k$ 的形式, 其结构如同引理 3, 于是由该引理结论

$$||V||_p\sim\int_0^1\int_0^1\left|\left|\sum_{k=1}^{n}\delta W_k(t)[v_x(Z_{k-1}(t))r_{2k-1}(s)+v_y(Z_{k-1}(t))r_{2k}(s)]\right|\right|^p\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

类似地,

$$||U||_p\sim\int_0^1\int_0^1\left|\left|\sum_{k=1}^{n}\delta W_k(t)[u_x(Z_{k-1}(t))r_{2k-1}(s)+u_y(Z_{k-1}(t))r_{2k}(s)]\right|\right|^p\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

注意两个二重积分中关于 s 的积分是相等的,

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

并且映射 $s \to (-r_1(s), r_2(s), -r_3(s), r_4(s), \cdots)$ 与 $s \to (r_2(s), r_1(s), r_4(s), r_3(s), \cdots)$ 是同分布的, 于是两个二重积分相等, 所以 (4.17) 成立.

由 (4.15), (4.16), (4.17), 我们有

$$||v(Z_{\tau\wedge n})||_p \leqslant c_p||u(Z_{\tau\wedge n})||_p + c_p\gamma\delta.$$

由 (4.8) 和 u, v 在 $|z| < 2$ 中的有界性和连续性,

$$||v(Z_\tau)||_p \leqslant c_p||u(Z_\tau)||_p + c_p\gamma\delta.$$

若 $u^\alpha(re^{i\theta}) = u(re^{i(\theta+\alpha)}), v^\alpha(re^{i\theta}) = u(re^{i(\theta+\alpha)})$, 则同样的不等式对于 u^α, v^α 成立. 于是关于 α 积分得到

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} ||v(|Z_\tau|e^{i\alpha})||^p d\alpha dt \leqslant c_p \int_0^1\int_0^{2\pi} ||u(|Z_\tau|e^{i\theta})||^p d\alpha dt + c_p\gamma^p\delta^p.$$

令 $\delta \to 0$, 由 (4.8) 最后一式和控制收敛定理得出 $r = 1$ 时的 (4.6), 并从而得出 $r \geqslant 0$ 的一般情况. 定理得证.

定理 3　设 $X \in$UMD,$1 < p < \infty$. 若 $f \in L_p(T, X)$,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} f(t)dt, \tag{4.18}$$

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2r\sin(\theta - t)}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} f(t)dt, \tag{4.19}$$

则

$$\int_{-\pi}^{\pi} ||v(re^{i\theta})||^p d\theta \leqslant c_p \int_{-\pi}^{\pi} ||u(re^{i\theta})||^p d\theta, \quad 0 \leqslant r < 1. \tag{4.20}$$

证明　像实值情况一样, $u - u(0)$ 和 v 分别是 (4.4) 和 (4.5) 在圆 $|z| = r$ 上的一致极限, 其中 a_k, b_k 是 f 的 Fourier 系数. 于是定理 2 保证了 (4.20) 对于 $u - u(0)$ 和 v 成立, 从而对于 u, v 成立.

定理 1 充分性的证明.　对于

$$\tilde{H}_\varepsilon f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{0<\varepsilon<|s|\leqslant\pi} f(t - s)\cot\frac{s}{2}ds,$$

其中 $f \in L_p(T, X), T = [-\pi, \pi]$. 不妨设 f 是周期延拓到 R 上的. 设 $v(re^{i\theta})$ 如同 (4.19), 其中 $r = 1 - \varepsilon$. 将 $\cot \frac{s}{2}$ 展开, 则有

$$||\tilde{H}_\varepsilon f(t) - v(re^{it})|| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ||f(t-s)|| K_r(s) ds, \tag{4.21}$$

这里 K_r 是非负函数, 并且 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_r(s) ds < 1$. (4.21) 右端是一个卷积, 故有不等式

$$||f(t-s) K_r(s)||_p \leqslant ||f||_p ||K_r||_1.$$

另一方面, 由 (4.20),

$$\int_{-\pi}^{\pi} ||v(re^{it})||^p dt \leqslant c_p ||f||_p^p,$$

于是

$$||\tilde{H}_\varepsilon f||_p \leqslant c_p ||f||_p. \tag{4.22}$$

由此即得出所要的结论.

由引理 1 的结论又可得出.

推论 1 设 $X \in$UMD,$1 < p < \infty$, 则存在 $c_p > 0$, 使得

$$||Hf||_p \leqslant c_p ||f||_p, \quad f \in L_p(R, X). \tag{4.23}$$

为了证明定理 1 的必要性, 我们记

$$L^2(T) \otimes X = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t) x_j : \varphi_j \in L^2(T), x_j \in X, n \geqslant 1 \right\}.$$

引理 4 设 $g(\theta) = \sum_{|k| \leqslant n/2} b_k e^{ik\theta}$ 是任一 X 值三角多项式, $\varphi \in L^2(T)$ 是标量函数, Fourier 系数 $\hat{\varphi}(0) = 0, H$ 是 $L^2(T) \otimes X$ 上的 Hilbert 变换, 则

$$H(\varphi(n\theta) g(\theta)) = H\varphi(n\theta) \cdot g(\theta). \tag{4.24}$$

证明 注意 $\varphi(n\theta) g(\theta)$ 的 Fourier 级数是

$$\varphi(n\theta) g(\theta) \sim \sum_{|k| < [n/2]} \sum_{0 \neq l \in z} \hat{\varphi}(ln) b_k e^{i(k+ln)\theta}.$$

注意当 $(k, l) \neq (k', l')$ 时, $k + l\,n \neq k' + l'\,n$, 又 $\text{sign}(k + l\,n) = \text{sign}\, l$, 由此即得到 (4.24).

引理 5　设 $X \in$HT, 则对于任意 $\varphi_k \in L^2(T), \hat{\varphi}(0)=0$ 和 $g_k = g_k(\theta_1, \cdots, \theta_k) \in L^2(T^k, X)$,

$$\int_{T^{n+1}} \left\|\sum_{k=1}^{n} g_k H\varphi_k(\theta_{k+1})\right\|_X^2 \mathrm{d}\theta \leqslant c^2 \int_{T^{n+1}} \left\|\sum_{k=1}^{n} g_k \varphi_k(\theta_{k+1})\right\|_X^2 \mathrm{d}\theta. \tag{4.25}$$

证明　不失一般性, 可设 g_k 是三角多项式, 于是可取 $n_k > m_k + 2, m_k$ 是 g_k 的阶. 由引理 4 和 HT 的条件,

$$\begin{aligned}&\int_T \left\|\sum_{k=1}^{n} g_k(\theta_1+\alpha, \cdots, \theta_k+\alpha) H\varphi_k(\theta_{k+1}+n_k\alpha)\right\|_X^2 \mathrm{d}\alpha \\ \leqslant\ & c^2 \int_T \left\|\sum_{k=1}^{n} g_k(\theta_1+\alpha, \cdots, \theta_k+\alpha) \varphi_k(\theta_{k+1}+n_k\alpha)\right\|_X^2 \mathrm{d}\alpha,\end{aligned}$$

这里 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_{n+1}) \in T^{n+1}$. 现在若关于 $\mathrm{d}\theta$ 在 T^{n+1} 上积分并应用 Fubini 定理, 则变量 α 不再出现并且与 $\mathrm{d}\alpha$ 无关. 由此引理得证.

定理 1 必要性的证明.　由 $\varphi(0) = 0$, 故 $H(H\varphi_k) = -\varphi_k$. 实际上在引理 6 中相反的不等号也是成立的. 为证明必要性, 只须就 WP 鞅予以证明即可. 此时我们有

$$d_k = D_k(r_1(t), \cdots, r_k(t)) r_{k+1}(t).$$

这里 (r_k) 是 R 序列, D_k 是 X 值函数. 我们证明对于任何 $n \geqslant 1$ 和 $\varepsilon_k = \pm 1$,

$$\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k d_k(t)\right\|_X^2 \mathrm{d}t \leqslant c^2 \int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^{n} d_k(t)\right\|_X^2 \mathrm{d}t. \tag{4.26}$$

为此, 令 $s(\theta) = \operatorname{sign}\cos\theta$, 于是由引理 5,

$$\begin{aligned}&\int_{T^{n+1}} \left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k D_k(s(\theta_1), \cdots, s(\theta_k)) s(\theta_{k+1})\right\|^2 \mathrm{d}\theta \\ \leqslant\ & c_2^2 \int_{T^{n+1}} \left\|\sum_{k=1}^{n} D_k(s(\theta_1), \cdots, s(\theta_k)) \varepsilon_k H s(\theta_{k+1})\right\|_X^2 \mathrm{d}\theta \\ =\ & c_2^2 \int_{T^{n+1}} \left\|\sum_{k=1}^{n} D_k(s(\theta_1), \cdots, s(\theta_k)) H s(\theta_{k+1})\right\|_X^2 \mathrm{d}\theta \\ \leqslant\ & c_2^4 \int_{T^{n+1}} \left\|\sum_{k=1}^{n} D_k(s(\theta_1), \cdots, s(\theta_k)) s(\theta_{k+1})\right\|_X^2 \mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

中间等号成立是因为 $\varepsilon_k H s(\theta_{k+1}) = H(\varepsilon_k \theta_{k+1})$ (s 是偶函数, Hs 是奇函数), 然后在 T^{n+1} 上作代换

$$(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n+1}) \to (\theta_1, \varepsilon_1\theta_2, \cdots, \varepsilon_n\theta_{n+1})$$

得到, 注意 (r_n) 和 $(s(\theta_n), n \geqslant 1)$ 是同分布的, 第一式即 (2.26) 左端, 最后的式子即 (2.26) 的右端. 证毕.

称函数

$$H^* f(t) = \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\pi} \left\| \int_{|s|>\varepsilon} \frac{f(t-s)}{s} \mathrm{d}s \right\|$$

为 f 的极大 Hilbert 变换, 应用和实值情况一样的方法可以证明

推论 2 $X \in$UMD, 当且仅当对于任何 (某个)$1 < p < \infty$, 存在 $c_p > 0$, 使得

$$\|H^* f\|_p \leqslant c_p \|f\|_p, \quad f \in L^p(R, X). \tag{4.27}$$

Hilbert 变换是最简单类型的奇异积分算子. 上述定理 1,2 的结论引发了对于向量值 (算子值) 奇异积分算子与乘子理论的系统的研究. 首先, Burkholder[50] 与 Bourgain[29] 证明了对取值于 UMD 空间的函数卷积型奇异积分算子有界. 当 X 是具有 UMD 性质的 Banach 格时, Rubio de Francia[192] 系统地证明了 Riese 算子、Hardy-Littlewood 极大算子、Littlewood- Paley 算子以及 Cauchy 积分算子在各种 X 值函数空间上有界. McConnell[166] 研究了向量值 Fourier 分析中 Mihlin-Hormander 乘子的有界性. Zimmermann[222] 将经典的 Littlewood-Paley, Marcinkiewicz, Mikhlin 乘子定理推广到在 d 维空间上定义的向量值函数空间上去. 关于算子值 (取值为 $B(X,Y)$ 中的元素) 的 Fourier 乘子, Weis 引入了算子族的 R 有界性, 对于刻画乘子的有界性起到关键作用, 接下来诸多研究者得到了系统深入的结果, 并由此开发了在向量值发展方程与边值问题上的应用 (见文献 [42]). 值得注意的是其中的主要结果都与 UMD 性质有关. 这说明 UMD 空间与向量值调和分析理论具有密不可分的联系. 今日这一学科领域已被人们称为 "向量值调和分析" .

最后我们叙述一个反例. 在前面 7.3 节中已经知道, 若 $X \in$UMD, 则 X 必是超自反空间. 下面例子 (属于 Pisier, 其证明方法属于 Gutierrez 和 Lacey) 说明对于一个超自反空间 X, H 在 $L_2(R, X)$ 上是无界的, 从而 X 不是 UMD 空间.

例 对于实数组 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 记

$$\|\alpha\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|, \quad \|\alpha\|_s = \max_{1\leqslant m\leqslant n} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \right|. \tag{4.28}$$

我们首先证明, 存在 $c > 0$, 使得对于每个 n, 若 $H: L^2(R, l_1^n) \to L^2(R, l_s^n)$, 这里 l_1^n, l_s^n 即是分别以上述范数作成的 n 维空间, 则 $\|H\| > c \log n$.

为此设 $A_j = \left(\dfrac{j-1}{n}, \dfrac{j}{n}\right), f_j = \chi_{A_j}, j = 1, \cdots, n$, 则对于 $f = (f_1, \cdots, f_n)$, $\|f\|_{L^2(R, l_1^n)} = 1$. 此外

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \left| \sum_{j=1}^k H f_j(t) \right| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \left| \log \left| t\left(t - \frac{k}{n}\right)^{-1} \right| \right|.$$

若 $t \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$, 则 $0 < t - \frac{k-1}{n} \leqslant \frac{1}{n}$, 所以 $n \leqslant \left(t - \frac{k-1}{n}\right)^{-1}$,

$$\log(k+1) \leqslant \log\left|1 + \frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{-1}\right| \leqslant \max_{1 \leqslant m \leqslant n}\left|\log\left|1 + \frac{m}{n}\left(t - \frac{m}{n}\right)^{-1}\right|\right|.$$

于是

$$\int_R \left[\max_{1 \leqslant m \leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{m} Hf_j(t)\right|\right]^2 \mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \left[\max_{1 \leqslant m \leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{m} Hf_j(t)\right|\right]^2 \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[\max_{1 \leqslant m \leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{m} Hf_j(t)\right|\right]^2 \mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{(\log k)^2}{n}.$$

但

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n \log^2 n} \sum_{k=1}^{n} \log^2 k = c > 0,$$

故有 $||H|| \geqslant c \log n$.

现在让 $0 < \theta < 1$ 固定, 用内插方法容易得出在 R^n 的 l_1^n 范数和 l_2^n 范数之间可定义新范数 $||\cdot||_{\theta,n}$, 记在新范数下的空间为 $E_{\theta,n}$, 使得

$$||\alpha||_s \leqslant ||\alpha||_{\theta,n} \leqslant (b \log n)^{\theta} ||\alpha||_1, \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

这里 $n \geqslant 1$ 是任意的, b 为固定常数. 对于固定的 m, 取 n 使得 $c \log^{1-\theta} n \geqslant b \log m$, 这里 c 即是上面讨论中的常数. 再取 $f \in L^2(R, l_1^n)$, 使得 $||f||_2 = 1$, 并且 $||Hf||_2 > c \log n$, 令 $F = f / b^{\theta} \log^{\theta} n$, 则

$$||F||_2 = \frac{||f||_{2(\theta,n)}}{b^{\theta} \log^{\theta} n} \leqslant \frac{b^{\theta} \log^{\theta} n}{b^{\theta} \log^{\theta} n} = 1.$$

但

$$\begin{aligned} ||Hf||_2 &\geqslant ||Hf||_{2(\theta,n)} \geqslant ||Hf||_{2(s)} \\ &= \frac{||Hf||_{2(s)}}{b^{\theta} \log^{\theta} n} > \frac{c \log n}{b^{\theta} \log^{\theta} n} = \frac{c}{b^{\theta}} \log^{1-\theta} n, \end{aligned} \tag{4.29}$$

所以 H 在 $X = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_{\theta,n}\right)_2$ 上不是有界的.

7.5 经典分析与鞅论中不等式的最优系数

在此之前我们建立的鞅论或分析中的不等式都是确定有某个常数 C 存在, 使之对于一类鞅或函数都能成立, 至于 C 的大小并不关心. 事实上 C 的最优值在理

论上和应用上都是有意义的. 自 20 世纪 80 年代末以来, Burkholder 等发展了一套技巧用以确定这些数值, 其中包括鞅变换不等式, 微分从属不等式, 均方函数不等式 (即 Burkholder-Gundy-Davis 不等式), 随机积分不等式中的常数, 以及 Haar 系在 $L_p[0,1]$ $(p>1)$ 中的无条件常数, 收缩投影不等式, 指数不等式中常数的最优值, 这里将分别加以介绍.

假定 $(d_k, k\geqslant 0)$ 是 X 值鞅差, $v=(\varepsilon_n), \varepsilon_n=\pm 1$, 若 $X\in$UMD, 则有不等式

$$\left\|\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i d_i\right\|_p \leqslant \beta_p(X)\left\|\sum_{i=0}^{n} d_i\right\|_p, \quad n\geqslant 1. \tag{5.1}$$

称 (5.1) 是精确的, 若对于任何 $\beta<\beta_p(X)$, 存在概率空间和鞅 f,g, 其中 g 是 f 经过某个 v 的变换使得 $\|g\|_p>\beta\|f\|_p$. 同样地, 若 $L_p[0,1]$ 中的序列 $e=(e_n, n\geqslant 0)$ 是无条件基, 即对任何实数序列 $(\alpha_n, n\geqslant 0)$ 和 $\varepsilon_n=\pm 1$, 当 $\left\|\sum_{k=0}^{n}\alpha_k e_k\right\|=1$ 时,

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k\alpha_k e_k\right\| \leqslant \beta<\infty. \tag{5.2}$$

称 $\beta_p(e)=\beta$ 是最优的, 若它是满足此不等式的最小 β 值. 特别地, 对于 Haar 函数系 $h=(h_n, n\geqslant 0)$, 其中

$$\begin{aligned}
&h_0=\chi_{[0,1)}, h_1=\chi_{[0,\frac{1}{2})}-\chi_{[\frac{1}{2},1)},\\
&h_2=\chi_{[0,\frac{1}{4})}-\chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})}, h_3=\chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4})}-\chi_{[\frac{3}{4},1)},\\
&h_4=\chi_{[0,\frac{1}{8})}-\chi_{[\frac{1}{8},\frac{1}{4})},\ h_5=\chi_{[\frac{1}{4},\frac{3}{8})}-\chi_{[\frac{3}{8},\frac{1}{2})},\cdots.
\end{aligned}$$

早在 1937 年 Marcinkiewicz 就证明了 $(h_n, n\geqslant 0)$ 是 $L^p[0,1]$ 的无条件基, 但最优系数 $\beta_p(h)$ 的值一直未能确定.

让我们先来考察鞅变换不等式.

定理 1 设 $\beta\in[1,\infty)$, 则不等式 (5.1) 中的

$$\beta_p(X)\leqslant\beta \tag{5.3}$$

当且仅当存在双凹函数 $u: X\times X\to R$, 使得任何 $(x,y)\in X\times X$,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p-\beta^p\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^p\leqslant u(x,y). \tag{5.4}$$

证明 充分性. 假定 (5.4) 成立, 记左端的函数为 $F(x,y)$, 即

$$F(x,y)=\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p-\beta^p\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^p. \tag{5.5}$$

我们证明对于任何 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}_0(X)$,

$$\|g\|_p\leqslant\beta\|f\|_p. \tag{5.6}$$

正像 7.1 节定理 3 证明的 2° 所作的那样, 可以假定 f 是简单鞅, 从而 g 也是简单鞅. 现在考虑 $X\times X$ 值鞅 $Z=(Z_n,n\geqslant 0)$, 其中 $Z_n=(X_n,Y_n)$,

$$\begin{aligned} X_n&=g_n+f_n=\sum_{k=0}^{n}(\varepsilon_k+1)\,\mathrm{d}f_k,\\ Y_n&=g_n-f_n=\sum_{k=0}^{n}(\varepsilon_k-1)\,\mathrm{d}f_k. \end{aligned} \tag{5.7}$$

由定义可知, 对于 $n\geqslant 1$, 不是 $X_n-X_{n-1}\equiv 0$ 就是 $Y_n-Y_{n-1}\equiv 0$, 所以称 Z 是 "之字" 鞅.

若 u 是 $X\times X$ 上的双凹函数, 即 $\forall x,y\in X, u(\cdot,y),u(x,\cdot)$ 是凹函数. 注意对于凹函数, 通常的 Jensen 不等式中相反的不等号成立. 由于 $Z_n=(X_n,Y_{n-1})$ 或者 $Z_n=(X_{n-1},Y_n)$, 所以

$$\begin{aligned} E(u(X_n,Y_{n-1})|B_{n-1})&\leqslant u(E(X_n|B_{n-1}),Y_{n-1})=u(X_{n-1},Y_{n-1}),\\ E(u(X_{n-1},Y_n)|B_{n-1})&\leqslant u(X_{n-1},E(Y_n|B_{n-1}))=u(X_{n-1},Y_{n-1}). \end{aligned}$$

总之有

$$Eu(Z_n)\leqslant Eu(Z_{n-1})\leqslant\cdots\leqslant Eu(Z_0). \tag{5.8}$$

假若如 (5.4) 所设, u 是 F 的强函数, 则两边积分, 由 (5.7),

$$\|g_n\|_p^p-\beta^p\|f_n\|_p^p=EF(Z_n)\leqslant Eu(Z_n)\leqslant Eu(Z_0). \tag{5.9}$$

此外设 u 满足齐性条件

$$u(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|^p u(x,y),\quad\forall\alpha\in R. \tag{5.10}$$

否则以 $\inf\limits_{\lambda\neq 0}u(\lambda x,\lambda y)/|\lambda|^p$ 代替 u, 既具有所说的齐性又满足 (5.4). 若 $Z_0=(X_0,0)$, 则

$$u(Z_0)=[u(X_0,0)+u(-X_0,0)]/2\leqslant u(0,0)=0,$$

对于 $Z_0=(0,Y_0)$ 情况也一样. 总之此时有 $u(Z_0)\leqslant 0$, 由此得到 $\|g_n\|_p^p-\beta^p\|f_n\|_p^p\leqslant 0$, 即 (5.3) 成立.

必要性.　设 (5.3) 成立, 定义 [0,1] 上简单 "之字" 鞅的集合

$$\tilde{Z}(x,y)=\{Z=(Z_n):Z_0=(x,y)\},$$

并且令 $U(x,y)=\sup\{EF(Z_\infty):Z\in\tilde{Z}(x,y)\}$. 这里 F 仍如开头所定义并且由于是简单鞅, $Z_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}Z_n$ a.e. 存在. 取 $Z_n\equiv(x,y)$ 知道 $F(x,y)\leqslant U(x,y)$.

为证明 U 是双凹的, 由对称性只须证明 $U(\cdot,y)$ 是凹函数. 假定 $x_1,x_2\in X$, m_1, $m_2\in R, U(x,y)>m_i$, $x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2, 0<\alpha<1$. 取 $Z^i\in\tilde{Z}(x_i,y)$ 使得 $EF(Z^i_\infty)>m_i$. 不妨设 $Y^i_{2n+1}-Y^i_{2n}\equiv 0$ 并且 $X^i_{2n+2}-X^i_{2n+1}\equiv 0$, 定义 Z 如下:

$$\begin{aligned}&Z_0=(x,y),\\&Z_{n+1}(\omega)=Z^1_n(\omega/\alpha)\chi_{[0,\alpha)}+Z^2_n((\omega-\alpha)/(1-\alpha))\chi_{[\alpha,1)},\end{aligned}$$

则 $Z\in\tilde{Z}(x,y)$, 并且

$$U(x,y)\geqslant EF(Z_\infty)=\alpha EF(Z^1_\infty)+(1-\alpha)EF(Z^2_\infty)\geqslant\alpha m_1+(1-\alpha)m_2.$$

于是由 m_1,m_2 的任意性得到

$$U(x,y)\leqslant\alpha U(x_1,y)+(1-\alpha)U(x_2,y).$$

最后验证 $U(x,y)$ 有有限值. 由于 $U(x,y)\geqslant F(x,y)$, 于是 U 是下方局部有界的. 又 (5.3) 说明 $U(0,0)\leqslant 0$, 即任何 $Z\in\tilde{Z}(0,0)$ 对应有一对 f,g 满足 (5.3)(以 β 为系数), 由 (5.9) 式知道 $EF(Z_\infty)\leqslant 0$, 这说明 $U(x,0)$ 有限, 从而

$$U(x,0)+U(-x,0)\leqslant 2U(0,0)\leqslant 0.$$

类似地, $U(x,y)$ 也有限. U 即是所要的函数 u.

下面引理是定理 1 在 $X=R$ 时的特殊形式.

引理 1 设 $1\leqslant\beta<\infty$, 则 $\beta_p(R)\leqslant\beta$ 当且仅当存在凹函数W,

$$W(t)=|t|^pW(t^{-1}),\quad t\neq 0\tag{5.11}$$

是 $F(\cdot,1)$ 的强函数.

证明 若 $\beta_p(R)\leqslant\beta$, 由定理 1, 存在 $u(x,y)\geqslant F(x,y), u$ 双凹且满足 (5.10). 令 $W(t)=u(t,1)$, 则 $W(t)$ 满足 (5.11), 并且是 $F(t,1)$ 的强函数.

反过来, 若 W 存在, 定义 $u:R\times R\to R$,

$$u(t,s)=\begin{cases}|s|^pW(ts^{-1}), & s\neq 0;\\|t|^pW(0), & s=0.\end{cases}\tag{5.12}$$

则 u 满足定理 1 的条件, 由此得出 $\beta_p(R)\leqslant\beta$. 为验证 u 的性质, 首先由 W 的凹性知道 W 连续, 又必有 $W(0)\leqslant 0$, 否则 $t\to\pm\infty, W(t)\to+\infty$, W 不可能是凹的. u 对称并且是 $F(t,s)$ 的强函数, 由 $W(0)\leqslant 0$ 和 W 的凹性知道, u 双凹. 引理得证.

引理 2　设 $1 \leqslant \beta < \infty$, 存在 $F(\cdot, 1)$ 的强函数 W, W 是凹函数并且满足 (5.11) 的充要条件是 $p^* - 1 \leqslant \beta$, 这里 $p^* = p \vee q, p^{-1} + q^{-1} = 1$.

证明　先设 W 存在, 令 $t_0 = (\beta - 1)/(\beta + 1)$, 则 $0 \leqslant t_0 < 1$.

$$W(t_0) \geqslant F(t_0, 1) = \left|\frac{t_0 + 1}{2}\right|^p - \beta^p \left|\frac{t_0 - 1}{2}\right|^p = 0, \quad W(1) \geqslant F(1, 1) = 1.$$

由于 W 是凹的, 极限

$$\lim_{t \to 1 \pm 0} \frac{W(t) - W(1)}{t - 1} \tag{5.13}$$

存在, 记为 R 和 L. 同时, 若 $0 < t < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{W(1) - W(t)}{1 - t} &= \frac{W(1) - t^p W(t^{-1})}{1 - t} \\ &= \frac{1 - t^p}{1 - t} W(1) - t^{p-1} \cdot \frac{W(t^{-1}) - W(1)}{t^{-1} - 1},\end{aligned}$$

令 $t \to 1 - 0$, 则知 $L = pW(1) - R$. 利用 $W(t_0)$ 的非负性和 W 的凹性得到

$$pW(1) = L + R \leqslant 2L \leqslant \frac{2(W(1) - W(t_0))}{1 - t_0} \leqslant (\beta + 1)W(1). \tag{5.14}$$

于是 $\beta \geqslant p - 1$, 若 $-1 < t < 0$, 记

$$\frac{W(t) - W(-1)}{t - (-1)} = -W(-1)\frac{1 - |t|^p}{1 - |t|} - |t|^{p-1}\frac{W(t^{-1}) - W(-1)}{t^{-1} - 1},$$

则有

$$-pW(-1) \geqslant \frac{2(W(t_0) - W(-1))}{t_0 - (-1)} \geqslant -W(-1)\frac{\beta + 1}{\beta}.$$

由 $W(-1) + W(1) \leqslant 2W(0), W(-1)$ 是负的, 由此得出 $\beta \geqslant (p-1)^{-1} = q - 1$, 总之 $p^* - 1 = p \vee q - 1 \leqslant \beta$.

反之, 不妨设 $\beta = p^* - 1$. 若 $p = 2$, 取 $W(t) = t$, 容易验证 $W(t) = F(t, 1)$ 并且满足 (5.11). 若 $2 < p < \infty$, 则 $F(t, 1)$ 在 $(-\infty, t_0)$ 和 (t_0^{-1}, ∞) 上都是凹的. 此时 $\beta = p - 1$, 所以对于 W, (5.14) 中全部为等号, $L = R = W(1)(1 - t_0)^{-1}, W(t_0) = 0$, 故在 $[t_0, 1]$ 上 $W(t) = at - b$. 又在 $[1, t_0^{-1}]$ 上 $W(t) = at^{p-1} - bt^p$ 并且由 $L = R$ 知道 $b = a(1 - 2p^{-1})$. 因为 $W(t_0) = F(t_0, 1)$, 为使 W 是凹的并且强于 $F(\cdot, 1)$ 必有 $W'(t_0 + 0) = F_t(t_0, 1)$, 此式给出 $a = p^2(1 - p^{-1})^{p-1}/2$. 和上面关于 a, b 的方程一起, 这在 $[t_0, t_0^{-1}]$ 上唯一确定了 $W(t)$. 在此区间之外, $W(t) = F(t, 1)$, 但不具有唯一性. 事实上可令

$$W(t) = \alpha_p \left(\left|\frac{t+1}{2}\right| - (p^* - 1)\left|\frac{t-1}{2}\right|\right)\left(\left|\frac{t+1}{2}\right| + \left|\frac{t-1}{2}\right|\right)^{p-1}, \quad t \in R, \tag{5.15}$$

其中 $\alpha_p = p(1-1/p^*)^{p-1}$, 此函数是凹的, 在 R 上强于 $F(t,1)$, 满足 (5.11) 并且在 $[t_0, t_0^{-1}]$ 上与上面所说函数一致. W 即所求.

对于 $1<p<2$, 类似的论证也得出如同 (5.15) 的 W.

推论 1 设 $1<p<\infty, p^*=p\vee q, q=p/(p-1)$, 若 $(f,v,g)\in\mathfrak{M}(R)$, 其中 $v^*\leqslant 1$, 则

$$||g||_p \leqslant (p^*-1)||f||_p, \tag{5.16}$$

常数 p^*-1 是最优的. 若 $0<||f||_p<\infty$, 则等号成立当且仅当 $p=2$ 并且成立

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k^2(\mathrm{d}f_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{d}f_k)^2 \text{ a.e..}$$

证明 第一个结论由引理 1, 2 直接得出, 第二个结论的充分性是由于 $||f_n||_2^2 = E\sum_{k=1}^{n}|\mathrm{d}f_k|^2$. 剩下要证明必要性, 为此只须说明 $p\neq 2$ 时, 严格不等式成立. 不妨设 n 是第一个使 $||f_n||_p>0$ 的指标, 即 $f_n=\mathrm{d}f_n$, 同时 $g_n=\mathrm{d}g_n=\varepsilon_n\mathrm{d}f_n=\varepsilon_n f_n$, 考虑通过 (5.15), (5.12) 定义的函数 $u(x,y)$, 则

$$u(Z_n)=u(X_n,Y_n)=\alpha_p(|g_n|-(p^*-1)|f_n|)(|f_n|+|g_n|)^p<0,$$

从 $F(x,y)\leqslant u(x,y)$ 得出

$$\begin{aligned}&||g_n||_p^p-(p^*-1)||f_n||_p^p\leqslant u(X_n,Y_n)\\ =&\alpha_p E(|g_n|-(p^*-1)|f_n|)\,(\,|f_n|+|g_n|)^p<0.\end{aligned}$$

故严格不等式成立.

推论 2 若 $1<p<\infty$, 则 $\beta_p(l_p)=p^*-1$.

这是由于在 7.1 节中我们已经得到过 $c_p(l^p)=c_p(R)$.

推论 3 (Maurey) $\beta_p^0(X)=\beta_p(X)$, 其中 $\beta_p^0(X)$ 是当 (5.1) 中的鞅是二进鞅时的最优系数.

证明 用证明定理 1 的方法可以证明 $\beta_p^0(X)\leqslant\beta(1\leqslant\beta<\infty)$ 的充要条件是存在中点双凹函数 u 满足 (5.4), 只须注意在证明 U 的双凹性时, $\alpha=1/2, \tilde{Z}(x,y)$ 中的元素是 WP 鞅. 但是一个中点凹函数当下方有界时也是凹函数, 所以当 $\beta_p^0(X)\leqslant\beta$ 时, 必有 $\beta_p(X)\leqslant\beta$, 这说明 $\beta_p(X)\leqslant\beta_p^0(X)$. 反过来的不等式是显然的. 故等号成立.

定理 2 设 $1<p<\infty, H$ 是 Hilbert 空间, f,g 是 H 值鞅, 并且 g 是 f 的微分从属, 则

$$||g||_p\leqslant(p^*-1)||f||_p, \tag{5.17}$$

常数 p^*-1 是最优的. 若 $0<||f||_p<\infty$, 则等号成立当且仅当 $p=2$ 并且 $||\mathrm{d}g_n||=||\mathrm{d}f_n||$a.e., $\forall n\geqslant 1$.

证明　在 $H\times H$ 上定义

$$U(x,y)=\alpha_p(||y||-(p^*-1)||x||)(||x||+||y||)^{p-1},\tag{5.18}$$

$$V(x,y)=||y||^p-(p^*-1)^p||x||^p,\tag{5.19}$$

其中 $\alpha_p=p(1-1/p^*)^{p-1}$. 注意若采用 (5.15) 定义的 W, 再由 (5.12) 定义 u, 则

$$U(x,y)=u(||y||+||x||,||y||-||x||).$$

另一方面, 若采用 (5.15) 定义的 $F(x,y)$, 并且令 $\beta=p^*-1$, 则

$$V(x,y)=F(||y||+||x||,||y||-||x||).$$

由前面已有的结论知道 $V(x,y)\leqslant U(x,y)$. 若 $||f||_p<\infty$, 则对 U,V 积分得到

$$||g_n||_p^p-(p^*-1)^p||f_n||_p^p=EV(f_n,g_n)\leqslant EU(f_n,g_n).$$

现在证明

$$EU(f_n,g_n)\leqslant\cdots\leqslant EU(f_0,g_0)\leqslant 0.\tag{5.20}$$

若如此, 则定理的第一个结论得证.

对于 $x,y,h,k\in H,||k||\leqslant||h||$, 考察函数 $G:R\to R$,

$$G(t)=U(x+th,y+tk).$$

令 $M(t)=||x+th||,N(t)=||y+tk||$. 首先可以假定 $M(t),N(t)$ 恒不为 0. 否则考虑乘积空间 $H\times R=((x,\alpha),\forall x\in H,\alpha\in R)$, 并且以

$$((x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2))=x_1\bar{x}_2+\alpha_1\alpha_2$$

为内积. 此时 $H=R^{\perp}$, 对于任何 $\alpha\neq 0,||(x,\alpha)||\neq 0$, 从而相应的 $M(t),N(t)\neq 0$. 当相应的结果得出以后再令 $\alpha\to 0$ 即为所求. 其次, 由于是内积空间, 故

$$2M(t)M'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||x+th||^2=2(x+th,h),\tag{5.21}$$

或者 $M'(t) = \dfrac{(x+th,h)}{||x+th||}$. 同样地, $N'(t) = \dfrac{(y+tk,k)}{||y+tk||}$. 先设 $p \geqslant 2$, 则

$$\begin{aligned}G(t) =& \alpha_p[(M+N)^p - pM(M+N)^{p-1}],\\ G'(t) =& \alpha_p[p(M+N)^{p-1}N'\\ &-p(p-1)M(M+N)^{p-2}(M'+N')],\\ G''(t) =& \alpha_p[p(M+N)^{p-1}N''\\ &+p(p-1)(M+N)^{p-2}(M'+N')N'\\ &-p(p-1)M'(M+N)^{p-2}(M'+N')\\ &-p(p-1)(p-2)(M+N)^{p-3}(M'+N')^2\\ &-p(p-1)M(M+N)^{p-2}(M''+N'')]\\ =& \sum_{i=1}^{5} I_i.\end{aligned}$$

显然 $I_4 \leqslant 0$, 又

$$\begin{aligned}I_1+I_2+I_3+I_5 =& -\alpha_p p(p-1)(M+N)^{p-2}(M'^2-N'^2\\ &+MM''+MN''-(p-1)^{-1}(M+N)N'')\\ \leqslant& -\alpha_p p(p-1)(M+N)^{p-2}[(MM''+M'^2)\\ &-(NN''+N'^2)].\end{aligned}$$

对于 (5.21) 两端关于 t 求导, 则

$$M'^2 + MM'' = ||h||^2, \quad N'^2 + NN'' = ||k||^2.$$

由于 $||k|| \leqslant ||h||$, 故知上式小于等于 0. 于是 G 是凹的. 对于 $p \leqslant 2$ 可作类似分析, 仍得到 G 是凹的. 于是

$$G(1) \leqslant G(0) + G'(0). \tag{5.22}$$

记 $G'(0) = (\varphi(x,y),h) + (\psi(x,y),k)$, 其中

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) =& -\alpha_p p(p-1)(||x||+||y||)^{p-2}x,\\ \psi(x,y) =& \alpha_p[p(||x||+||y||)^{p-1} - p(p-1)||x||(||x||+||y||)^{p-2}]\frac{y}{||y||}.\end{aligned}$$

以 $x = f_{n-1}, y = g_{n-1}, h = \mathrm{d}f_n, k = \mathrm{d}g_n$, 则由以上诸式得到

$$U(f_n,g_n) = U(f_{n-1},g_{n-1}) + (\varphi(f_{n-1},g_{n-1}),\mathrm{d}f_n) + (\psi(f_{n-1},g_{n-1}),\mathrm{d}g_n), \tag{5.23}$$

两端关于 B_{n-1} 求条件期望然后求期望得到 (5.20). 由于

$$EU(f_0,g_0) \leqslant \alpha_p(2-p^*)2^{p-1}||f_0||_p^p \leqslant 0,$$

所以 (5.17) 成立.

由于在实值鞅变换的情况 p^*-1 是最优的, 所以这里也是最优的. 此外若 $p\neq 2$, 并且 $0<\|f\|_p<\infty$, 不妨设 n 是第一个范数不为 0 的 f_n 的下标, 则 $m\geqslant n$ 时,

$$EU(f_m,g_m)\leqslant EU(f_n,g_n)\leqslant \alpha_p(2-p^*)2^{p-1}\|f_n\|_p^p<0,$$

故严格不等式成立. 定理得证.

推论 4　设 $1<p<\infty$, H 是 (实或复)Hilbert 空间, 对于任何 H 值鞅 $f,v=(\varepsilon_n),\varepsilon_n$ 可以是实或复数, $|\varepsilon_n|=1$, 若 g 是 f 经过 v 的变换, 则

$$\|g\|_p\leqslant (p^*-1)\|f\|_p, \tag{5.24}$$

并且 p^*-1 是最优的. 等号成立当且仅当 $p=2$.

回忆, $L^p[0,1]$ 的基底 $e=(e_k,k\geqslant 0)$ 称为单调基, 若对于任何实数列 $(\alpha_k,k\geqslant 0)$,

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\alpha_k e_k\right\|_p\leqslant\left\|\sum_{k=0}^{n+1}\alpha_k e_k\right\|_p,\quad n\geqslant 1.$$

另外, 考虑正测度空间 L^p 上的收缩投影的非降序列 $(P_k,k\geqslant 0)$, 其中 $P_0=0,\|P_k\|\leqslant 1, P_jP_k=P_kP_j=P_k(0\leqslant k\leqslant j)$. 若 $|a_k|\leqslant 1, f\in L^p$, 满足

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_k(P_k-P_{k-1})f\right\|_p\leqslant\beta\|f\|_p \tag{5.25}$$

的最小常数 β 是多少呢? 对此我们有

定理 3　设 $1<p<\infty$, 则 Haar 系 $h=(h_n)$ 在 $L^p[0,1]$ 中的无条件常数是 p^*-1. 即对任何实数序列 $(\alpha_k,k\geqslant 0)$ 和 $\varepsilon_k=\pm 1$.

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k\alpha_k h_k\right\|_p\leqslant (p^*-1)\left\|\sum_{k=0}^{n}\alpha_k h_k\right\|_p,\quad n\geqslant 1, \tag{5.26}$$

p^*-1 是最优的. 等号成立当且仅当 $p=2$ 或者 $\alpha_k=0,k\geqslant 0$.

当 $(\alpha_k,k\geqslant 0)$ 取为复数, $\varepsilon_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k},\theta_k\in R$ 时, 结论仍成立, 最优常数不变.

证明　注意 $(a_1h_1,\cdots,a_nh_n,0,\cdots)$ 实际上是鞅差序列, 记相应的鞅是 f, 若 g 是 f 经过 $v=(\varepsilon_n)$ 的变换, 由定理 1 或 2 得到 (5.26). 将 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kh_k$ 作适当组合即得到二进鞅, 由定理 1 、推论 3 得到, p^*-1 是最优的.

推论 5　$L^p[0,1](1<p<\infty)$ 中的单调基的无条件常数是 p^*-1.

Olevskii 证明了 $L^p[0,1]$ 的任何基的无条件常数都不会比 Haar 系的无条件系数小, 所以若 e 是单调基, 则 $\beta_p(e) \geqslant \beta_p(h)$. 关于相反的不等式可从下面定理得到, 因为一个单调基可以看成由一列收缩投影得到的.

推论 6 (5.25) 中的最优常数是 p^*-1. 若 $p \neq 2$, $\|f\|_p > 0$, 则严格不等式成立.

证明 Ando 证明了 L^p 中的每个非 0 收缩投影等距地等价于一个条件期望. 因此由定理 2,

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k(P_k - P_{k-1})f\right\|_p^p + \alpha_p(p^*-2)\|P_1 f\|_p^p \leqslant (p^*-1)^p\|f\|_p^p.$$

其余的证明与定理 2 相应部分一样.

引理 3 设 $1 < p < \infty, H$ 是 Hilbert 空间, f, g 是 H 值鞅, g 是 f 的微分从属. u_{jk}, v_{jk} 是标量值可料 R.V. 序列, 使得

$$\sum_{j=0}^{\infty}|v_{jk}(\omega)|^2 \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}|u_{jk}(\omega)|^2, \text{a.e.}, \quad \forall k \geqslant 0, \tag{5.27}$$

则

$$\left\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big\|\sum_{k=0}^{n} v_{jk}\mathrm{d}g_k\Big\|^2\Big)^{1/2}\right\|_p \leqslant (p^*-1)\left\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big\|\sum_{k=0}^{n} u_{jk}\mathrm{d}f_k\Big\|^2\Big)^{1/2}\right\|_p, \quad n \geqslant 0, \tag{5.28}$$

这里 p^*-1 是最优常数. 若右端有限且大于 0, 则等号成立当且仅当 $p=2$ 并且

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|v_{jk}\mathrm{d}g_k\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\|u_{jk}\mathrm{d}f_k\|^2, \text{ a.e.}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

证明 取 $K = l_H^2$, 不妨设 (5.28) 右端有限, 设

$$\mathrm{d}F_k = (u_{jk}\mathrm{d}f_k)_{j\geqslant 0}, \quad \mathrm{d}G_k = (v_{jk}\mathrm{d}g_k)_{j\geqslant 0},$$

由 (5.27), $\|\mathrm{d}G_k\|_K \leqslant \|\mathrm{d}F_k\|_K, \mathrm{d}F_k, \mathrm{d}G_k$ 分别对应于 K 值鞅 F, G, 将定理 2 应用于 F, G, 则得到 (5.28).

定理 4 设 $1 < p < \infty$, H 是 Hilbert 空间, f 是 H 值鞅, 则

$$(p^*-1)^{-1}\|S^{(2)}(f)\|_p \leqslant \|f\|_p \leqslant (p^*-1)\|S^{(2)}(f)\|_p. \tag{5.29}$$

特别地, 若 $1 < p \leqslant 2$, 则

$$\|f\|_p \geqslant (p-1)\|S^{(2)}(f)\|_p. \tag{5.30}$$

若 $2 \leqslant p < \infty$, 则

$$\|f\|_p \leqslant (p-1)\|S^{(2)}(f)\|_p. \tag{5.31}$$

此两式中的 $p-1$ 是最优常数, 若 $0 < \|f\|_p < \infty$, 则等号成立当且仅当 $p=2$.

证明 为证左端, 在引理 3 的 (5.28) 中令 $\mathrm{d}f_k = \mathrm{d}g_k$ 并且 $j=k$ 时, $v_{jk} \equiv 1; j \neq k$ 时, $v_{jk} \equiv 0$. 若 $j=0, u_{jk} \equiv 1, j \geqslant 1$ 时, $u_{jk} \equiv 0$. 然后令 (5.28) 中的 $n \to \infty$, 即得之. 右端可用类似方法证明. (5.30), (5.31) 可立即得出.

现在让我们看下面的例子.

设 $\omega > p$ 是代数方程

$$x^p + p\omega^{p-1} - \omega^p = 0 \tag{5.32}$$

唯一的正解, 令 $1-\theta = \dfrac{1}{\omega}, \delta > 0, \pi_n = \left[\dfrac{x}{x+(n-1)\delta}\right]^\omega$. 在 $[0,1]$ 上定义

$$f_n(s) = (x+(n-1)\delta)\chi_{[0,\pi_n)} + \theta x s^{\theta-1}\chi_{[\pi_n,1]}.$$

直接计算可得出 $Ef_n = x$, 并且 $f=(f_1, f_2, \cdots)$ 关于 σ 代数序列 $B_n = \sigma(f_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$ 是鞅. 另外

$$\mathrm{d}f_{n+1} = \delta\chi_{[0,\pi_{n+1})} + (x+(n-1)\delta - \theta x s^{\theta-1})\chi_{[\pi_{n+1},\pi_n)}.$$

现在用 $(1,-1,1,-1,\cdots)$ 作 f 的鞅变换 $g=(g_n)$, 则

$$g_{n+1} = x + (-1)^n\delta\chi_{[0,\pi_{n+1})} + \sum_{i=1}^n (-1)^i[x+(i-1)\delta - \theta x s^{\theta-1} - \delta)\chi_{[\pi_{i+1},\pi_i)},$$

$$g_\infty = x + \sum_{i=1}^\infty (-1)^i[x+(i-1)\delta - \theta x s^{\theta-1} - \delta]\chi_{[\pi_{i+1},\pi_i)}.$$

注意在 $\pi_{n+1} \leqslant s < \pi_n$ 时,

$$x(1-\theta)s^{\theta-1} - \delta \leqslant x + (n-1)\delta - \theta x s^{\theta-1} < x(1-\theta)s^{\theta-1},$$

从而

$$x(1-\theta)s^{\theta-1} - 2\delta \leqslant |g_\infty - x| \leqslant x(1-\theta)s^{\theta-1} + \delta,$$

$$\|x(1-\theta)s^{\theta-1}\|_p - 2\delta \leqslant \|g_\infty - x\|_p \leqslant \|x(1-\theta)s^{\theta-1}\|_p + \delta. \tag{5.33}$$

但由 (5.32),

$$\int_0^1 (x\theta s^{\theta-1})^p \mathrm{d}s = (\omega-1)^p, \tag{5.34}$$

$$\|x(1-\theta)s^{\theta-1}\|_p = \frac{1-\theta}{\theta}(\omega-1) = 1.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\lim_{\delta\to 0}||g_\infty||_p = 1.$$

另一方面,

$$||f_n||_p^p = [x+(n-1)\delta]^p\pi_n + \int_{\pi_n}^1 (\theta x s^{\theta-1})^p \mathrm{d}s.$$

第一项当 $n\to\infty$ 时趋于 0, 第二项等于 $(\omega-1)^p$, 所以

$$||f||_p = \sup_n ||f_n||_p = \omega - 1, \quad \lim_{x\to 0}\lim_{\delta\to 0}||f||_p = p-1. \tag{5.35}$$

此例也说明鞅变换不等式 (5.16) 中系数的最优性.

最后让我们计算 $||f^*||_p$. 实际上,

$$f^*(s) = \sum_1^\infty [x+(n-1)\theta]\chi_{[\pi_{n+1},\pi_n]},$$

所以

$$\begin{aligned}
||f^*||_p^p &= \sum_{n=1}^\infty \int_{\pi_{n+1}}^{\pi_n} [x+(n-1)\theta]^p \mathrm{d}s \\
&\leqslant \sum_{n=1}^\infty \int_{\pi_{n+1}}^{\pi_n} (xs^{\theta-1})^p \mathrm{d}s = \int_0^1 (xs^{\theta-1})^p \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\theta^p}\int_0^1 (\theta x s^{\theta-1})^p \mathrm{d}s = \frac{1}{\theta^p}(\omega-1)^p. \\
||f^*||_p &= \frac{\omega-1}{\theta} = \omega, \quad \lim_{x\to 0}\lim_{\delta\to 0}||f^*||_p = p.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\lim_{\delta\to 0}||f^*||_p = \frac{p}{p-1}\lim_{x\to 0}\lim_{\delta\to 0}||f||_p.$$

由此得出

推论 7 设 f 是实值下鞅, f^* 是 f 的极大函数, 则当 $1<p<\infty$ 时,

$$||f^*||_p \leqslant q||f||_p, \tag{5.37}$$

系数 $q = p(p-1)^{-1}$ 是最优的.

推论 8 设 $2\leqslant p<\infty$, H 是 Hilbert 空间, f 是 H 值鞅, 则

$$||f^*||_p \leqslant p||S^{(2)}(f)||_p, \tag{5.38}$$

系数 p 是最优的. 严格不等号当 $0 < ||f||_p < \infty$ 时成立.

推论 8 由 (5.31) 和 (5.37) 合并得到.

定理 5 设 H 是 Hilbert 空间, f, g 是 H 值鞅, 并且 g 是 f 的微分从属, 则

$$P\Big(\sup_{n\geqslant 0}\{\|f_n\|+\|g_n\|\}\geqslant\lambda\Big)\leqslant\frac{2}{\lambda}\|f\|_1, \tag{5.39}$$

这里系数 2 是最优的.

证明 在 6.5 节定理 5 我们已证明了 (5.39). 关于 2 的最优性是因为在下面推论中它已是最优的.

推论 9 设 H 是 Hilbert 空间, g 是 f 的微分从属, 则

$$\lambda P(g^*\geqslant\lambda)\leqslant 2\|f\|_1, \tag{5.40}$$

常数 2 是最优的.

证明 只须说明最优性. 这里是一个简单例子. 设

$$\Omega=\Big\{-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\Big\},\quad P\Big(-\frac{1}{2}\Big)=\frac{3}{4},\quad P\Big(\frac{3}{2}\Big)=\frac{1}{4},$$

P 是概率. 若

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}g_0=\mathrm{d}f_0\equiv 1/2,\quad \mathrm{d}g_1(\omega)=-\mathrm{d}f_1(\omega)=-\omega,\quad \omega\in\Omega,\\&\mathrm{d}g_n=\mathrm{d}f_n\equiv 0,\quad n\geqslant 2,\end{aligned}$$

由于当 $n\geqslant 1$ 时, $\|g_n\|\equiv 1$, 所以 $P(\|g_n\|\geqslant 1)=1$. 又 $\|f\|_1=\|f_1\|_1=1/2$, 所以等号成立.

不仅如此, (5.40) 中的常数 2 只有在 Hilbert 空间情况成为最优的.

推论 10 实或复 Banach 空间 X 是 Hilbert 空间当且仅当 (5.40) 对任何 X 值鞅 f,g 成立, 这里 g 是 f 的微分从属, 或者 g 是 f 关于 $v(v^*\leqslant 1)$ 的鞅变换.

证明 必要性不须再证. 现在设 (5.40) 对全体鞅变换成立, 则当 $g^*>1$ a.e. 时, $\|f\|_1\geqslant 1/2$. 考虑 7.2 节定理 1 证明中定义的函数 $\psi(x,y)$ 和 $\xi(x,y)$, 在现在的情况必定有

$$\psi(0,0)\geqslant 1/2,\quad \xi(0,0)=2\psi(0,0)\geqslant 1.$$

实际上只能有 $\xi(0,0)=1$, 由 7.2 节定理 3 , X 是 Hilbert 空间.

现在让我们证明一个指数型不等式. 设 $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是增加凸函数, $\Phi(0)=0$, Φ 是二次可微的又具有一阶严格凸的导函数, $\Phi'(0+)=0$.

定理 6 设 Φ 如上, H 是 Hilbert 空间, 对于任何 H 值鞅 f,g, g 是 f 的微分从属, $\|f\|_\infty\leqslant 1$, 则

$$\sup_n E\Phi(\|g_n\|)<\frac{1}{2}\int_0^\infty\Phi(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \tag{5.41}$$

这里常数 1/2 是最优的.

证明 设 $S=\{(x,y)\in H\times H:\|x\|\leqslant 1\}$, 由假设 $\|f\|_\infty\leqslant 1$, 所以不妨假定 $(f_n(\omega),g_n(\omega))\in S,\forall\omega\in\Omega,n\geqslant 0$. 我们将给出一个函数 $u:S\to R$, 使得:

1° $E\Phi(\|g_n\|)\leqslant Eu(f_n,g_n)$;

2° $Eu(f_n,g_n)\leqslant Eu(f_{n-1},g_{n-1}),n\geqslant 1$;

3° $Eu(f_0,g_0)\leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty \Phi(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

从 1°, 2°, 3° 即得到 (5.41). 为定义 u, 令

$$B(t)=\Phi(t-1),\quad t\geqslant 1.$$
$$A(t)=\mathrm{e}^t\int_t^\infty B(s)\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s=\mathrm{e}^{t-1}\int_{t-1}^\infty \Phi(s)\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s.$$

然后令

$$u(x,y)=\begin{cases}(1+\|y\|^2-\|x\|^2)A(1)/2, & \|x\|+\|y\|\leqslant 1,\\ (1-\|x\|)A(\|x\|+\|y\|)+\|x\|B(\|x\|+\|y\|), & \|x\|+\|y\|>1.\end{cases}\tag{5.42}$$

此函数连续并且在 $\|x\|+\|y\|=1$ 时, 两部分的值都等于 $\|y\|A(1)$. 现在设

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}-A(1)x, & \|x\|+\|y\|\leqslant 1,\\ [-A(\|x\|+\|y\|)+B(\|x\|+\|y\|)+B'(\|x\|+\|y\|)]x, & \|x\|+\|y\|>1.\end{cases}$$

$$\psi(x,y)=\begin{cases}A(1)y, & \|x\|+\|y\|\leqslant 1,\\ [(1-\|x\|)A(\|x\|+\|y\|)+(2\|x\|-1)\cdot B(\|x\|+\|y\|)]y/\|y\|, & \|x\|+\|y\|>1.\end{cases}\tag{5.43}$$

在 S 上, φ, ψ 是连续函数.

若 $(x,y)\in S,(x+h,y+k)\in S,\|k\|\leqslant\|h\|$. 我们验证必有

$$u(x+h,y+k)\leqslant u(x,y)+(\varphi(x,y),h)+(\psi(x,y),k)\tag{5.44}$$

并且当

$$\|x\|+\|y\|\leqslant 1<\|x+h\|+\|y+k\|\tag{5.45}$$

时, 严格不等式成立. 注意此时 $h\neq 0$, 我们在验证时将作此假设.

若 $t\in[0,1]$, 则 $\|x+th\|\leqslant 1$, 所以在 $[0,1]$ 上, $G(t)=u(x+th,y+tk)$ 连续, 不等式 (5.44) 等价于

$$G(1)\leqslant G(0)+G'(0_+).\tag{5.46}$$

当然, 若 G' 在 $(0,1)$ 上非增, 则由均值定理得出 (5.45). 设

$$M(t)=\|x+th\|,\quad N(t)=\|y+tk\|,\quad F=A-B.$$

由 Φ' 严格凸, 当 $s>1$ 时, $F(s)>0, F'(s)>0, F''(s)>0$ 并且 $sF'(s)-F(s)>0$. 若令

$$I=\{t\in(0,1):M(t)+N(t)<1\},$$
$$J=\{t\in(0,1):M(t)>0, M(t)+N(t)>1\}.$$

由 M 的严格凸性和 N 的凸性, $(0,1)\backslash(I\cup J)$ 是有限集. M, N 在 J 上都是严格正的, 所以 G 在 $I\cup J$ 上无穷可微. 另外 G' 在 $(0,1)$ 上连续. 为证明 G' 在 $(0,1)$ 上非增, 只须证明在 $I\cup J$ 上, $G''\leqslant 0$. 若 $I\neq\varnothing$, 则 $G''=-(\|h\|^2-\|k\|^2)A(1)\leqslant 0, t\in I$. 若 $J\neq\varnothing$, 在条件 (5.45) 之下,

$$\begin{aligned}G''=&-(\|h\|^2-\|k\|^2)F'(M+N)\\&-N''[(M+N)F'(M+N)-F(M+N)]\\&-M(M'+N')^2F''(M+N)\\\leqslant&0,\qquad t\in J.\end{aligned}$$

这证明了 (5.44). 关于严格不等式的论断是因为 $M(M'+N')^2$ 在 J 中只有有限多个 0 点, 所以 G' 在 J 上严格下降.

由 (5.44) 和 $\|\mathrm{d}g_n\|\leqslant\|\mathrm{d}f_n\|$ 得到

$$\begin{aligned}u(f_n,g_n)\leqslant&u(f_{n-1},g_{n-1})+(\varphi(f_{n-1},g_{n-1}),\mathrm{d}f_n)\\&+(\psi(f_{n-1},g_{n-1}),\mathrm{d}g_n).\end{aligned}\tag{5.47}$$

若对于某个 $n\geqslant 1$,

$$P(\|f_{n-1}\|+\|g_{n-1}\|\leqslant 1<\|f_n\|+\|g_n\|)>0,\tag{5.48}$$

则 (5.47) 以正概率成立. 取期望即得出 2°. 若 (5.48) 成立, 则严格不等式成立.

由 (5.44), $u(f_0,g_0)\leqslant u(0,0)$, 故 4° 成立. 若

$$P(\|f_0\|+\|g_0\|>1)>0,\tag{5.49}$$

则严格不等式成立.

最后若 $\|g\|_\infty\leqslant 1$, 则 $\sup\limits_n E\Phi(\|g_n\|)\leqslant\Phi(1)$. Φ' 严格凸,

$$\Phi(1)=\int_0^1\Phi'(t)\mathrm{d}t\leqslant\Phi'(1)/2.$$

由 Jensen 不等式,

$$\Phi'(1)<\int_0^\infty\Phi'(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^\infty\Phi(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,$$

此时 (5.43) 成立. 若 $||g||_\infty > 1$, 则 (5.48) 或 (5.49) 成立, 所以也有 (5.43) 成立.

关于系数的最优性, 我们在下面推论的证明中验证.

推论 11 若 $2 < p < \infty, \Phi(t) = t^p$, 其他条件如定理 6, 则

$$||g||_p^p < \Gamma(p+1)/2, \tag{5.50}$$

其中的常数是最优的.

现在给出另一个例子.

设 $0 < \delta < 2, \gamma = 1/(2+\delta), \beta = (2-\delta)/(2+\delta)$, 又

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{2}\chi_{[0,1]}, \mathrm{d}_2 = \frac{1}{2}(1+\delta)\chi_{[0,\gamma)} - \frac{1}{2}\chi_{[\gamma,1)},\\
d_3 &= \delta\chi_{[0,\beta\gamma]} - (1-\delta/2)\chi_{[\beta\gamma,\gamma]},\\
d_4 &= \delta\chi_{[0,\beta^2\gamma]} - (1-\delta/2)\chi_{[\beta^2\gamma,\beta\gamma]},\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

这是一个鞅差序列. 记相应的鞅是 f, 若 $v = (1,-1,1,-1,\cdots)$, f 经过 v 的变换是 g, 则 $||g||_\infty = 1$. 注意若 $n \geqslant 1$, 则

$$f_{n+2} = (1+(2n+1)\delta/2)\chi_{[0,\beta^n\gamma)} + \sum_{k=1}^{n} k\delta\chi_{[\beta^k\gamma,\beta^{k-1}\gamma)},$$

于是取 $\alpha = -\delta^{-1}\log\beta$, 则

$$\begin{aligned}
||f||_p^p &\geqslant \gamma(1-\beta)\sum_{k=1}^{\infty}(k\delta)^p\beta^{k-1}\\
&\geqslant \gamma(1-\beta)\sum_{k=1}^{\infty}(k\delta)^p\mathrm{e}^{-\alpha(k-1)\delta}\\
&\geqslant \gamma(1-\beta)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\delta}^{k\delta}\delta^{-1}t^p\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{(2+\delta)^2}\int_0^\infty t^p\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由于 $\beta^{-1} = 1 + \delta(1-2^{-1}\delta)^{-1}$, 当 $\delta \to 0$ 时, $\alpha \to 1$, 由 Fatou 引理,

$$\liminf_{\delta\to 0}||f||_p^p \geqslant \int_0^\infty t^p\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t/2 = \Gamma(p+1)/2.$$

再由 (5.50), 实际上等号成立.

更细致的计算表明, 对于这个 f, (5.43) 中的等号 (经过取极限) 也成立.

最后我们考察随机积分不等式的最优系数. 关于这里的随机积分, 实际上可以看成离散鞅在某种意义下的极限, 相关的一些概念可参见有关基础文献.

设 (Ω, B, P) 是完备概率空间, $(B_t, t \geqslant 0)$ 是 B 的非降右连续子 σ 代数族, 其中 B_0 包含 B 的任何 0 测集. H 是可分 Hilbert 空间. $M = (M_t)_{t\geqslant 0}$ 是适应于 $(B_t, t \geqslant 0)$ 的 H 值鞅, 在 $[0,\infty)$ 上有右连续轨道, 在 $(0,\infty)$ 上有左极限. 设 $V = (V_t)_{t\geqslant 0}$ 为实值可料过程, $|V_t(\omega)| \leqslant 1$. 考虑随机过程 $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$:

$$N_t = \int_0^t V\mathrm{d}M.$$

定理 7 设 $1 < p < \infty$, H 是 Hilbert 空间, 则

$$||N||_p \leqslant (p^* - 1)||M||_p. \tag{5.51}$$

若 $||M||_\infty \leqslant 1$ 并且 $2 \leqslant p < \infty$, 则

$$||N||_p^p \leqslant \Gamma(p+1)/2, \tag{5.52}$$

其中的常数都是最优的.

证明 由于在离散情况这些常数是最优的, 所以这里也是最优的. 同样地, 在 Ito 积分的情况它们也是最优的. 此外这些不等式在 $p = 2$ 时等号可以成立, 这一点可直接证明. 在 $p \neq 2$ 时, 严格不等号成立.

为证明这些不等式, 不妨设 $M_0 \equiv 0$. 设 $\tilde{Z}$ 是如下形式的过程 $Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$ 的全体:

$$Y_t = \sum_{k=1}^n a_k[M(\tau_k \wedge t) - M(\tau_{k-1} \wedge t)],$$

其中 $|a_k| \leqslant 1, 0 \equiv \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \cdots \leqslant \tau_n$ 都是有界停时. 由于 $(M_{\tau_k}, 0 \leqslant k \leqslant n)$ 是鞅, Y_t 可看成它关于 $(a_k, 1 \leqslant k \leqslant n)$ 的变换, 由以前得到的结果, 注意 $||\tau_n||_\infty \leqslant t$,

$$||Y_t||_p \leqslant (p^* - 1)||M(\tau_n)||_p \leqslant (p^* - 1)||M(t)||_p,$$

从而

$$||Y||_p = \sup_{t>0} ||Y_t||_p \leqslant (p^* - 1)||M||_p.$$

类似地, 若 $||M||_\infty \leqslant 1, 2 \leqslant p < \infty$, 则

$$||Y||_p^p \leqslant \Gamma(p+1)/2.$$

要把 Y 换成 N, 只须注意一个基本的事实, 即当 $1 < p < \infty$, $||M||_p < \infty$ 时, 存在 $Y^{(j)} \in \tilde{Z}$, 使得 $\lim\limits_{j\to\infty} ||Y^{(j)} - N||_p = 0$.

定理证毕.

第 7 章评注:

正像本章开头所谈到的, UMD 空间理论实际上是向量值调和分析的重要内容, 包括 Fourier 分析、奇异积分算子乃至乘子定理. 相对于调和分析, 它们犹如音乐中的黄钟大吕. 自 20 世纪 80 年代初 Burkholder 发现了该空间以来, 理论的研究连续不断, 成果层出不穷, 新的研究课题不断被开发出来, 它们极大地丰富了经典理论的内容. 本章的目的就是阐述与之有关的一些基本结论.

7.1 节中, 早在 1966 年 Burkholder[46] 就曾建立了标量值鞅变换的一套理论. 20 世纪 70 年代中期 Maurey[164] 发现把它搬到向量值鞅情况是不成立的, Maurey 和 Pisier 还发现要使鞅变换的结论在 B 值情况成立, 甚至于超自反的条件都是不够的. Burkholder[49] 第一次明确地给出了等价条件, 它是通过双凸函数表述的. 然后与 Bourgain 等一起证明了本章开头所说的三类空间的等价性. 这解决了 20 世纪初理论研究中留下的悬案. 注意定理 1 是针对标量值鞅的, 它比 Doob 收敛定理还要强. 定理 2, 3 和后面的例子都来自文献 [49].

7.2 节中 UMD 性质的双凸函数特征至今仍然是一个谜, 除了 Hilbert 空间之外, 其他 UMD 空间的双凸函数如何构造出来? 与双凸函数特征对应的几何结构是怎样的? 这些目前都还是不甚清楚的. 引理 1 的奇特证明方式以及定理 2, 3 都来自文献 [51]、[52]. 定理 4 来自 [146], 它把刻画 UMD 性质的条件局部化了.

7.3 节定理 1 见文献 [5], 其余定理分别见文献 [146]、[147]、[156].

7.4 节中, 先是 Burkholder 和 McConnell[49] 证明了对于 UMD 空间值函数, Hilbert 变换有界, 不久 Bourgain [28, 29] 证明了它的逆成立. Bourgain[30] 还讨论了向量值 H^1 空间与 BMO 的共轭性. 关于另外一些奇异积分算子的有界性, 以及进一步地关于乘子的有界性只得见正文中的概述, 它的内容足够写一本专著. 最后的例子见文献 [177].

7.5 节所有定理见文献 [48]、[53]、[56]. 定理 7 的证明还见文献 [97].

第 8 章　复空间的几何性质

20 世纪 80 年代初, 前苏联数学家 Bukhvalov 与 Danilevich 在研究向量值解析函数与调和函数的边值问题时, 发现了复空间在几何性质上与实空间的差异, 使得人们对于复空间的几何性质有了新的认识, 由此引发了对于复空间几何学的研究热潮. 大体说来, 复空间的几何性质比相应的实空间的类似性质都来得弱, 因此具有这些性质的空间也更加广泛.

本章将围绕复空间的解析 RN 性质、复凸性以及解析 UMD 性质开展讨论, 建立它们各自的等价条件, 它们与实空间的相应条件都能形成对照.

8.1　解析 RN 性质的分析特征

设 X 是复 Banach 空间, D 是复平面中的单位圆盘, ∂D 是其边界, $\mathrm{d}P=\mathrm{d}\theta/2\pi$ 是 ∂D 上的规范 Lebesgue 测度. 称 $f: D\to X$ 在 D 中解析, 若 f 有表示

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x_nz^n,\quad \forall z\in D,$$

其中 $x_n\in X, \limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x_n\|}\leqslant 1$. 函数空间 $\tilde{H}^p(X), 0<p\leqslant\infty$ 可以像经典情况 (即 X 等于复数域 C 的情况) 一样定义, 它们是满足下面条件的 X 值解析函数全体:

$$\|f\|_{\tilde{H}^p(X)}=\sup_{0\leqslant<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f(re^{i\theta})\|^p)\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}<\infty,\quad 0<p<\infty,$$

$$\|f\|_{\tilde{H}^\infty(X)}=\sup_{z\in D}\|f(z)\|.$$

当 $X=C$ 时, 记 $\tilde{H}^p(X)$ 为 H^p.

经典情况的一个著名结论是: 径向极限 $\lim\limits_{r\to1^-}f(re^{i\theta})$ 对于每个 $f\in H^p$ a.e. 存在. 现在我们给出例子, 对于 c_0 值解析函数结论不成立.

例 1　设 e_n 是 c_0 的第 n 个基向量 (第 n 个坐标为 1, 其余为 0),

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}e_nz^n,\quad z\in D.$$

容易知道 $\|f\|_{\tilde{H}^\infty(c_0)}=\sup|z^n|\leqslant 1$, 令 $z=re^{i\theta}$, 若 $\lim\limits_{r\to1^-}f(re^{i\theta})$ 存在, 则极限必是 $g(\theta)=(e^\theta,e^{2\theta},\cdots)$. 但除去一个 0 测度集之外, $g(\theta)\notin c_0$. 这说明径向极限不是在 c_0 中 a.e. 收敛的.

经典情况著名的 Riesz 定理是说, 若 $\mu: B[0,2\pi] \to C$ 是有界变差测度并且是解析的, 即 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}\mu(t) = 0, n \geqslant 1$, 这里 $B[0,2\pi]$ 是 $[0,2\pi]$ 上的 Borel σ 代数, 则 μ 是绝对连续的, 从而 $\mathrm{d}\mu = \varphi(t)\mathrm{d}t, \varphi \in L^1$. 但当把复值测度换为一般 Banach 空间值测度时这一结论也不能成立.

例 2 考虑测度 $\mu: B[0,2\pi] \to c_0$,

$$\mu(A) = \left(\int_A \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t, \int_A \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\mathrm{d}t, \cdots\right), \quad \forall A \in B[0,2\pi],$$

易知 $\|\mu(A)\|_{c_0} \leqslant P(A)$, 所以 μ 是有界变差的. 但若 $\mathrm{d}\mu = \varphi(t)\mathrm{d}t$, 则必有 $\varphi(\theta) = (\mathrm{e}^{\theta}, \mathrm{e}^{2\theta}, \cdots)$, 我们已经知道 φ 不是 c_0 值函数.

下面引理可从标量值情况的相应结论得来.

引理 1 设 $f \in \tilde{H}^p(X), 0 < p \leqslant \infty, f^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sup\limits_{0 \leqslant r < 1} \|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\|$ 是 f 的径向极大函数, 则

$$\|f^*\|_p \leqslant C\|f\|_{\tilde{H}^p(X)}. \tag{1.1}$$

定理 1 设 X 是复 Banach 空间, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in \tilde{H}^p(X)$, $P_r(t)$ 是 Poisson 核, 则以下条件等价:

(i) 存在 $\varphi \in L^p(\partial D, X)$ 使得

$$f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)P_r(\theta - t)\mathrm{d}t, \quad \forall z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in D; \tag{1.2}$$

(ii) 径向极限 $\lim\limits_{r \to 1^-} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 在 ∂D 上 a.e. 存在;

(iii) 若 $p < \infty$, 极限 $\lim\limits_{r \to 1^-} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 以 L^p 范数存在.

以上条件在经典情况的等价性是已知的. 由经典情况的结论, 如果 (ii), (iii) 中的极限存在, 它们都与 φ a.e. 相等.

证明 (i)⇒(ii). 由经典情况的结论, 当 (1.1) 成立时,

$$\lim_{r \to 1^-} x^* f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = x^*\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}), \text{a.e.}, \quad \forall x^* \in X^*,$$

我们证明这种收敛还是按范数成立的. 对于从 0 点出发的 Brown 运动 $(W_t)_{t \geqslant 0}$ 和序列 $0 \leqslant r_n \uparrow 1$, 定义停时 $\tau_n = \inf\{t > 0 : |W_t| = r_n\}$, $f(W_{\tau_n})$ 是鞅. 由于 W_{τ_n} 在圆 $|z| = r_n$ 上是一致分布的 (这里对于 $z = r_k$, 记 $z = r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}, \forall k \geqslant 1$, 记相应的 σ 代数为 B_{τ_n}), 从 $|z| = r_k$ 到 $W_{\tau_{n+1}}$ 的转移函数是 $P_{r_{n+1}/r_n}(\theta_{n+1} - \theta_n)$, 因此 $\forall A \in B_{\tau_n}$,

$$P(\theta_{n+1} \in A | B_{\tau_n}) = \int_A P_{r_{n+1}/r_n}(\theta_{n+1} - \theta_n)\frac{\mathrm{d}\theta_{n+1}}{2\pi},$$

由此得到 $E(f(W_{\tau_{n+1}})|B_{\tau_n}) = f(W_{\tau_n}), n \geqslant 0$. 由 (1.2), 此鞅弱收敛, 于是

$$x^*f(W_{\tau_n}) = E(x^*f(W_{\tau_\infty})|B_{\tau_n}), \text{a.e.}.$$

这里 $f(W_{\tau_\infty})$ 是定义在 ∂D 上的函数, 故 $f(W_{\tau_n}) = E(f(W_{\tau_\infty})|B_{\tau_n})$. 由 Levy 定理, $f(W_{\tau_n})$ a.e. 收敛. 这意味着径向极限 a.e. 存在.

(ii)⇒(iii). 令 $f_r(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$, f^* 是极大函数, 由引理 1 以及

$$\|f_r(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - f_s(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\| \leqslant 2f^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}), \quad 0 \leqslant r, s < 1, \tag{1.3}$$

控制收敛定理说明 (iii) 成立.

(iii)⇒(i). 不妨设 (iii) 中的极限为 φ, 则 $\varphi \in L^p(\partial D, X)$. 此时 $\forall x^* \in X^*$, 以 L^p 范数 $x^*f_r \to x^*\varphi$, 于是由标量情况的结论,

$$x^*f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^*\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})P_r(\theta - t)\mathrm{d}t, \quad \forall z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in D,$$

x^* 是任意的, 所以 (1.1) 成立. 定理证毕.

像标量值情况一样, 定理 1 中的极限可以换为非切向极限. 即对于几乎每个 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \partial D, \exists\delta = \delta(\theta) > 0$, 使得 $\left|\mathrm{Arg}(\xi - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right| < (\pi/2) - \delta, \xi \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 时, 极限 $\lim\limits_{\xi \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} f(\xi)$ 存在. $\tilde{H}^p(X)$ 中满足上述条件之一的元素全体记为 $H^p(X)$.

定理 2　设 X 是复 Banach 空间, 若对于某个 $1 \leqslant p \leqslant \infty, \tilde{H}^p(X) = H^p(X)$, 则对于每个 $1 \leqslant p \leqslant \infty, \tilde{H}^p(X) = H^p(X)$.

证明　考虑上面定理中的条件 (ii), 容易知道, 当对于 $\tilde{H}^1(X)$ 中的每个 f 径向极限 a.e. 收敛时, 对于 $\tilde{H}^\infty(X)$ 中的 f 也如此.

反之, 设此事对于每个 $\tilde{H}^\infty(X)$ 中 f 成立, 若 $g \in \tilde{H}^1(X)$, 则 $\log^+\|g(z)\|$ 是 (重) 次调和函数. 不妨设 $u(z) \geqslant 0$ 是其调和控制并且 $v(z)$ 是 $u(z)$ 的共轭函数, 则 $h(z) = \mathrm{e}^{-(u(z)+\mathrm{i}v(z))}$ 解析, $\|h(z)\| = \mathrm{e}^{-u(z)} \leqslant 1$, $h(z) = 0$ 时, $u(z) = \infty$, 这种点的全体测度为 0. 另一方面, $f = hg \in \tilde{H}^\infty(X)$. 由假设 $\lim\limits_{r\to 1^-} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ a.e. 存在, h 是标量值函数, $\lim\limits_{r\to 1^-} h(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ a.e. 存在且不为 0, 所以 $\lim\limits_{r\to 1^-} g(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ a.e. 存在. 这说明对于 $p = 1$, 条件 (ii) 也成立. 定理证毕.

定义 1　称复 Banach 空间 X 具有解析 RN 性质 (ARN 性质), 若 $\tilde{H}^1(X) = H^1(X)$.

由定理 1, 定义中的 $\tilde{H}^1(X) = H^1(X)$ 换为任一个 $\tilde{H}^p(X) = H^p(X), 1 \leqslant p \leqslant \infty$ 也一样. 此外例 1 说明 c_0 不具有 ARN 性质.

定理 3　若复空间 X 具有 RN 性质, 则 X 具有 ARN 性质.

证明 $\forall f \in \tilde{H}^\infty(X)$ 和 $0 \leqslant r_n \to 1$, 设 $(W_t)_{t\geqslant 0}$ 是从 0 出发的 Brown 运动, 仍定义停时如上, 考虑鞅 $f(W_{\tau_n})$. 由于 X 具有 RN 性质, $\lim\limits_{n\to\infty} f(W_{\tau_n})$a.e. 存在, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$a.e. 收敛. 由定理 1,2 知道, X 具有 ARN 性质.

定理 4 设 X 是复空间, $1\leqslant p \leqslant \infty, (\Omega, \Sigma, \mu)$ 是有限测度空间, 则 $L^p(\mu, X)$ 具有 ARN 性质当且仅当 X 具有 ARN 性质.

证明 必要性是明显的, 现证充分性. 设 $f \in \tilde{H}^p(L^p(\mu, X))$,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in L^p(\mu, X), \quad \forall n \geqslant 0.$$

由幂级数的属性知道, 对于任何 $0 < r < 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_{L^p(\mu,X)} r^n < \infty$, 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega \|a_n(\omega)\|^p \mathrm{d}\mu(\omega) r^n < \infty.$$

由 Fubini 定理,

$$\int_\Omega \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n(\omega)\|^p r^n \mathrm{d}\mu(\omega) < \infty,$$

于是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n(\omega)\|^p r^n < \infty$, μ-a.e.. 根据幂级数收敛半径公式, 同样有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n(\omega)\| r^n < \infty, \quad \mu\text{-a.e.},$$

记其极限为 $f(\cdot)(\omega)$, 则对于几乎所有 $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\|_{L^p(\mu,X)}^p \mathrm{d}\theta \\
&= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_\Omega \|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(\omega)\|^p \mathrm{d}\mu(\omega)\mathrm{d}\theta \\
&= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_\Omega \int_0^{2\pi} \|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(\omega)\|^p \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\mu(\omega) \\
&= \int_\Omega \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(\omega)\|^p \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\mu(\omega) \\
&= \int_\Omega \|f(\cdot)(\omega)\|_p^p \mathrm{d}\mu(\omega) < \infty.
\end{aligned}$$

即对于几乎所有 $\omega \in \Omega, \|f(\cdot)(\omega)\|_p < \infty$, 或 $f(\cdot)(\omega) \in \tilde{H}^p(X)$. 由于 X 具有 ARN 性质, 由定理 1, 对于几乎所有 $\omega \in \Omega$, $\lim\limits_{r\to 1^-} f_r(\cdot)(\omega)$ 以 L^p 范数存在. 所以

$$\|f_r(\cdot)(\omega) - f_s(\cdot)(\omega)\|_{L^p(\partial D, X)} \to 0, \quad s, t \uparrow 1.$$

但是

$$\begin{aligned}\|f_r - f_s\|^p_{L^p(\partial D, L^p(\mu,X))} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_\Omega \|f(re^{i\theta})(\omega) - f(se^{i\theta})(\omega)\|^p d\mu(\omega)d\theta \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})(\omega) - f(se^{i\theta})(\omega)\|^p d\theta d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega \|f_r(\cdot)(\omega) - f_s(\cdot)(\omega)\|^p_{L^p(\partial D, X)} d\mu(\omega),\end{aligned}$$

并且

$$\|f_r(\cdot)(\omega) - f_s(\cdot)(\omega)\|_{L^p(\partial D,X)} \leqslant 2\|f(\cdot)(\omega)\|_{L^p(\partial D,X)}.$$

由控制收敛定理,

$$\|f_r - f_s\|^p_{L^p(\partial D, L^p(\mu,X))} \to 0, \quad r, s \uparrow 1.$$

于是 $\lim\limits_{r\to 1^-} f_r$ 以 $L^p(\partial D, L^p(\mu, X))$ 范数收敛. 由定理 1, $L^p(\mu, X)$ 具有 ARN 性质.

推论 1　复空间 $L^1[0,1]$ 具有 ARN 性质.

由 2.1 节定理 4 知道 $L^1[0,1]$ 不具有 RN 性质, 于是 ARN 性质不与 RN 性质等价.

对于调和函数, Bukhvalov 与 Danilevich 证明了定理 1 的三个条件也是等价的, 但是一个显著的不同是, 径向极限对于 $\tilde{h}^\infty(X)$ 中每个函数 a.e. 存在是 X 具有 RN 性质的充要条件. 另外对于 Banach 格, X 中不含有子空间与 c_0 同构是 X 具有 ARN 性质的充要条件 (见文献 [45]).

让我们考察由向量测度做成的积分. 设 $G: B[0,2\pi] \to X$ 是有界变差正则测度, φ 是标量值连续函数, 则积分

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)dG(t) = \lim \sum_{k=1}^n \varphi(s_k)G([t_{i-1}, t_i]) \tag{1.4}$$

有意义. 这里 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 2\pi, t_{k-1} < s_k \leqslant t_k$, 极限是关于区间最大长度趋于 0 而取的. 并且由于

$$\left\|\int_0^{2\pi} \varphi(t)dG(t)\right\| \leqslant \|\varphi\|\ \|G\|_1, \tag{1.5}$$

这里 $\|\varphi\|$ 是上确界范数, $\|G\|_1$ 是 G 的全变差, 所以积分定义了 $C[0,2\pi]$ 上的一个有界线性算子. 另一方面, 若 $1 < p < \infty$, 考虑 G 的 p 变差

$$\|G\|_p = \sup\left(\sum_{E\in\pi}(\|G(E)\|^p/|E|^{p-1})\right)^{1/p}, \quad 0/0 = 0, \tag{1.6}$$

其中 π 是 $[0,2\pi]$ 的有限分划, $|E|$ 是 E 的测度. 对于 $p=\infty$, 定义

$$\|G\|_\infty=\inf\{C>0:\|G(E)\|\leqslant C|E|,\quad \forall E\in B[0,2\pi]\}.$$

若 $G\in V_X^p$, $\varphi\in L^{p'}$, 积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(t)\mathrm{d}G(t)$ 也有意义. 例如, 先对于简单函数 φ,

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^n a_k\chi_{E_k}\mathrm{d}G\right\|&=\left\|\sum_{k=1}^n a_kG(E_k)\right\|\\&=\left\|\sum_{k=1}^n a_k\,|E_k|^{\frac{1}{p'}}\,|E_k|^{-\frac{1}{p'}}\,G(E_k)\right\|\\&\leqslant\Big(\sum_{k=1}^n|a_k|^{p'}|E_k|\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^n(\|G(E_k)\|^p\,/\,|E_k|^{p-1})\Big)^{1/p}\leqslant\|\varphi\|_{p'}\|G\|_p,\end{aligned}$$

然后扩展到整个 $L^{p'}$ 上. 所以积分 $\int_0^{2\pi}\varphi(t)\mathrm{d}G(t)$ 也定义了 $L^{p'}$ 上的有界线性算子. 回到 V_X^p, 可知其中每个元实际上是可数可加 P 绝对连续的有界变差测度.

记 $\mathfrak{M}_X$ 是 X 值有界变差正则测度的全体, V_X^p 如上. 若 $G\in\mathfrak{M}_X$(或 V_X^p), 称

$$\hat{G}(n)=\int_{\partial D}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}G(t),\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

是 G 的 Fourier 系数. 由第 1 章的知识, $\|G\|:B[0,2\pi]\to R$ 是可数可加实值测度, 设 $g=\mathrm{d}\|G\|/\mathrm{d}P$ 是 $\|G\|$ 的 RN 导数, 由关于测度的知识容易知道下面引理成立.

引理 2 设 $G\in V_X^p(1<p\leqslant\infty)$, 则存在非负函数 $g\in L^p$, 使得 $\|g\|_p=\|G\|_p$ 并且

$$\left\|\int_{\partial D}\varphi(t)\mathrm{d}G(t)\right\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|\varphi(t)|\,g(t)\mathrm{d}t.\tag{1.7}$$

定理 5 设 X 是 Banach 空间, 则 Poisson 积分使下面等式在等距同构意义下成立:

$$\begin{aligned}\tilde{H}^1(X)&=\{G\in M_X:\hat{G}(n)=0,\forall n<0\},\\\tilde{H}^p(X)&=\{G\in V_X^p\ :\hat{G}(n)=0,\forall n<0\}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

证明 设 $G\in M_X$(或 V_X^p) 并且 $\hat{G}(n)=0,\forall n<0$, 定义解析函数

$$f(z)=\sum_{k=0}^\infty\hat{G}(n)z^n,\quad\forall z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\in D.\tag{1.9}$$

由于

$$P_r(\theta-t)=\sum_{k=-\infty}^\infty r^{|k|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\theta-t)},\quad 0<r<1,$$

并且级数以 $C[0,2\pi]$(或 $L^{p'}[0,2\pi]$) 范数收敛, 因此 $\forall z=re^{i\theta}\in D$,

$$\begin{aligned}P[G](z) &= \int_{\partial D} P_r(\theta-t)\mathrm{d}G(t)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik\theta}\int_{\partial D} e^{-ikt}\mathrm{d}G(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\hat{G}(k)r^k e^{ik\theta} = f(z),\end{aligned} \tag{1.10}$$

当 $p=1$ 时, 计算可知

$$\|f(re^{i\theta})\| \leqslant \int_{\partial D} P_r(\theta-t)\mathrm{d}\|G\|(t) = P_r * \|G\|(\theta).$$

于是 $\|f\|_{\tilde{H}^1(X)} \leqslant \|G\|_1$. 当 $p>1$ 时, 由引理 2 并且关于其中的 g 有不等式 $\|f(re^{i\theta})\| \leqslant P_r * g(\theta)$, 故 $\|f\|_{\tilde{H}^p(X)} \leqslant \|G\|_p$.

反过来, 设 $f\in\tilde{H}^1(X)$, $\forall x^*\in X^*$, $x^*f(z)\in H^1$, 由经典情况的结论, $\exists f_{x^*}\in L^1$ 使得

$$x^*f(re^{i\theta}) = \int_{\partial D} P_r(\theta-t)f_{x^*}(t)\mathrm{d}t, \tag{1.11}$$

固定 $E\in B[0,2\pi]$, 定义 $G(E): X^*\to C$,

$$G(E)(x^*) = \frac{1}{2\pi}\int_E f_{x^*}(t)\mathrm{d}t, \quad x^*\in X^*. \tag{1.12}$$

因为 $f_{x^*}(t) = \lim\limits_{r\to 1} x^*f(re^{it})$ a.e., Fatou 引理说明

$$|G(E)(x^*)| \leqslant \|x^*\| \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_E \|f(re^{it})\|\mathrm{d}t, \quad x^*\in X^*,$$

所以

$$\|G(E)\|_{X^{**}} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_E f^*(e^{it})\mathrm{d}t. \tag{1.13}$$

我们要证明 $G(E)\in X$. 为此要证明 $\forall\varphi\in C[0,2\pi]$, $\int_{\partial D}\varphi\mathrm{d}G\in X$. 注意当 $r\to 1$ 时, 一致地 $\varphi^*P_r\to\varphi$, 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}\varphi(t)\mathrm{d}G(t) &= \lim_{r\to 1}\int_{\partial D}\varphi^*P_r(t)\mathrm{d}G(t)\\ &= \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int\left(\int P_r(\theta-t)\mathrm{d}G(t)\right)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{1.14}$$

由 (1.11)、(1.12),

$$x^*f(re^{i\theta}) = \int_{\partial D} P_r(\theta-t)f_{x^*}(t)\mathrm{d}t = x^*\int_{\partial D} P_r(\theta-t)\mathrm{d}G(t),$$

所以

$$f(re^{i\theta}) = \int_{\partial D} P_r(\theta - t)\mathrm{d}G(t) \in X,$$

故 (1.14) 说明 $\int_{\partial D} \varphi(t)\mathrm{d}G(t) \in X$. 从 (1.13) 得知

$$\|G\|_1 = \sup_{\pi} \sum_{E\in\pi} \|G(E)\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(t)\mathrm{d}t = \|f\|_{\tilde{H}^1(X)}.$$

类似的证明可知 $\hat{G}(n) = 0, \forall n < 0$.

对于 $1 < p \leqslant \infty$, 类似的证明给出 $G \in V_X^p, \hat{G}(n) = 0, \forall n < 0$. 证毕.

推论 2 若 $G \in \mathfrak{M}_X$ 满足 $\hat{G}(n) = 0, \forall n < 0$, 则 $G \ll P$.

推论 3 设 $1 < p \leqslant \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, 则在等距同构意义下,

(i) $\tilde{H}^p(D, X^*) = (L^q(\partial D, X)/H_0^q(\partial D, X))^*$;

(ii) $\tilde{H}^1(D, X^*) = (C(\partial D, X)/A_0(\partial D, X))^*$, 这里

$$A_0(\partial D, X) = \{f \in C(\partial D, X), \tilde{f}(n) = 0, \forall n \leqslant 0\}.$$

实际上, Bochner 和 Taylor[25] 很早就证明了在等距同构意义下,

$$V_{X^*}^p = L^q(\partial D, X)^*, \quad 1 < p \leqslant \infty, \quad V_{X^*}^1 = C(\partial D, X)^*.$$

注意到 $H_0^q(\partial D, X)^\perp = \{G \in V_{X^*}^p : G(n) = 0, \forall n < 0\}$, 所以结论成立.

根据定理 1, 2 和 ARN 性质的定义又得到

定理 6 设 X^* 是 X 的共轭空间, $1 < p \leqslant \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$, 则

(i) X^* 具有 ARN 性质当且仅当自然包含映射 I 是满射:

$$I : H^p(\partial D, X^*) \to (L^q(\partial D, X)/H_0^q(\partial D, X))^*;$$

(ii) X^* 具有 ARN 性质当且仅当自然包含映射 I 是满射:

$$I : H^1(\partial D, X^*) \to (C(\partial D, X)/A_0(\partial D, X))^*.$$

定义 2 称向量测度 G 是可表现的, 若 G 关于 Lebesgue 测度 P 具有 RN 导数. 称 G 是解析的, 若 $\hat{G}(n) = 0, \forall n < 0$.

定理 7 设 X 是复 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) X 具有 ARN 性质;

(ii) 每个解析测度 $G \in \mathfrak{M}_X$ 是可表现的;

(iii) 对于任何 (或某个)$1 < p \leqslant \infty$, 每个解析测度 $G \in V_X^p$ 可表现.

证明　由于 $M_X \subset V_X^p \subset V_X^\infty (1 < p < \infty)$, 故只需证明 (i)⇒(ii) 和 (iii)⇒(i). 为了 (i)⇒(ii), 设 $G \in \mathfrak{M}_X, \hat{G}(n) = 0, \forall n < 0$, 定义

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\mathrm{d}G(t),$$

则 f 是在 D 中调和的. 若 $g(t) = \lim\limits_{r\to 1^-} f(re^{it})$ a.e., 根据引理 1, 由控制收敛定理和 Fubini 定理, $\forall x^* \in X^*, \xi \in C[0, 2\pi]$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(t)x^*g(t)\mathrm{d}t &= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(t)x^*f(re^{it})\mathrm{d}t \\ &= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} \xi(t)\int_0^{2\pi} P_r(t-s)\mathrm{d}x^*G(s)\mathrm{d}t \\ &= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(t)P_r(t-s)\mathrm{d}t\mathrm{d}(x^*G(s)) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(s)\mathrm{d}(x^*G(s)).\end{aligned} \tag{1.15}$$

若 $E \in B[0, 2\pi]$, 可以取连续函数充分接近于 χ_E, 从而得到 $x^*G(E) = \frac{1}{2\pi}\int_E x^*g(t)\mathrm{d}t$, 这说明 $G(E) = \frac{1}{2\pi}\int_E g(t)\mathrm{d}t$, 所以 X 具有 ARN 性质.

对于 (iii)⇒(i), 只需证明每个 $G \in V_X^\infty$ 可表现时, X 具有 ARN 性质. 设 $f \in \tilde{H}^\infty(X)$, 考虑 (1.12) 定义的 G, 则

$$\|G(E)\| \leqslant C|E|, \quad \forall E \in B[0, 2\pi],$$

于是 $G \in V_X^\infty$. G 是可表现的, $\mathrm{d}G(t) = g(e^{it})\mathrm{d}t$, 故

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)g(e^{it})\mathrm{d}t = \int_{\partial D} P_r(\theta - t)\mathrm{d}G(t) = f(re^{i\theta}),$$

由定理 1 知 $f(re^{i\theta}) \to g(e^{i\theta})$a.e., 所以 X 具有 ARN 性质. 证毕.

对于算子也有相应的结论. 为此记

$$H_0^p(\partial D, X) = \{\varphi \in L^p(\partial D, X) : \hat{\varphi}(n) = 0, \forall n \leqslant 0\}.$$

定义 3　称有界线性算子 $T : L^1 \to X$ 是解析的, 若 $T|_{H_0^1} = 0$. 称 $T : L^1 \to X$ 是可表现的, 若存在 $g \in L^\infty(X)$ 使得

$$T(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)g(t)\mathrm{d}t, \quad \forall \varphi \in L^1. \tag{1.16}$$

定理 8 设 X 是复 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) X 具有 ARN 性质;

(ii) 每个解析算子 $T: L^1 \to X$ 可表现;

(iii) 对于每个有界线性算子 $T: L^1/H_0^1 \to X$, 算子 $T \circ q$: $L^1 \to X$ 可表现. 这里 $q: L^1 \to L^1/H_0^1$ 是商映射.

证明 (i)⇒(ii). 设 $T: L^1 \to X$ 是有界解析算子, 定义

$$G: B[0, 2\pi] \to X, \quad G(E) = T(\chi_E),$$

容易知道 $G \in \mathfrak{M}_X$. 注意由 T 的解析性,

$$\hat{G}(n) = \int_{\partial D} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \mathrm{d}G(t) = T(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}) = 0, \quad \forall n < 0, \tag{1.17}$$

所以 G 是可表现的, 存在 $g \in L^1(\partial D, X)$, 使得 $\mathrm{d}G(t) = g(t)\mathrm{d}t$. 由 G 的定义, 对于简单函数 φ,

$$T(\varphi) = \sum a_i T(\chi_{A_i}) = \sum a_i G(A_i) = \int_{\partial D} \varphi \mathrm{d}G.$$

由稠密性, 此式对于任何 $\varphi \in L^1$ 成立, 即 (1.16) 成立. 最后 (1.16) 还说明 $\forall x^* \in X^*$, $x^* g \in L^\infty$. g 可测从而有几乎可分值, 因此 $g \in L^\infty(\partial D, X)$.

(ii)⇒(i). 上述过程可以返回, 所以结论成立.

(ii)⇔(iii). 由商映射的定义得到.

最后让我们用一些特殊形式的鞅的收敛性刻画 ARN 性质.

设 $\Omega = [0, 2\pi]^N$, Σ 是 $[0, 2\pi]$ 上 Borel σ 代数的乘积, P 是 $[0, 2\pi]$ 上规范 Lebesgue 测度的乘积. 此时每个 $\theta \in \Omega, \theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots)$. 以 Σ_n 记前 n 个 σ 代数的乘积, $\Sigma_0 = \{\varnothing, [0, 2\pi]\}$. 仍以 E 代表关于 P 的期望.

设 X 是复 Banach 空间, 称与 $(\Sigma_n, n \geqslant 0)$ 适应的 X 值 R.V. 序列 $F = (F_n, n \geqslant 0)$ 是解析鞅, 若

$$F_0 = x_0, \quad F_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k(\theta_1, \cdots, \theta_{k-1}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}, \quad n \geqslant 1. \tag{1.18}$$

这里 $x_0, \beta_1 \in X$, β_k 是关于 $\theta_1, \cdots, \theta_{k-1}$ 可测的 X 值函数 $(k \geqslant 2)$. 称 $F = (F_n, n \geqslant 0)$ 是 Hardy 鞅, 若

$$F_0 = x_0, \quad F_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{kj}(\theta_1, \cdots, \theta_{k-1}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta_k}, \quad n \geqslant 1, \tag{1.19}$$

这里 $x_0, \beta_{1j} \in X$, $\varphi_{kj}(\theta_1, \cdots, \theta_{k-1})$ 是关于 $\theta_1, \cdots, \theta_{k-1}$ 可测的 X 值函数 $(k \geqslant 2)$. 容易知道解析鞅是 Hardy 鞅的特例.

下面要用到重次调和函数的一个属性. 设 U 是 X 中的开集, 映射 $\psi : U \to [-\infty, \infty)$ 称为是重次调和的, 若 ψ 上半连续, 在有界集上有上界并且

$$\psi(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x + y\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t, \quad \forall x, y, x + y\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in U, t \in [0, 2\pi]. \tag{1.20}$$

引理 3 设 $\varphi : U \to [-\infty, \infty)$ 是上半连续, 在有界集上有上界的函数, 定义 $\psi_0 = \varphi$,

$$\psi_{n+1}(x) = \inf\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_n(x + y\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t;\ y \in X\right\}, \quad n \geqslant 0, \tag{1.21}$$

则 ψ_n 点态地单调下降趋于一个重次调和函数 $\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi} \leqslant \varphi$, 并且就具有重次调和性而言 $\hat{\varphi}$ 是最大的 (称 $\hat{\varphi}$ 是 φ 的重次调和包络).

证明 取 $y = 0$, 知道 $\psi_{n+1}(x) \leqslant \psi_n(x)$, 记

$$\hat{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x), \quad \forall x \in X.$$

由 φ 的上半连续性和 Fatou 引理以及归纳法可证每个 ψ_n 上半连续, 从而 $\hat{\varphi}$ 上半连续. 有界性是显然的. 固定 $x, y \in X$, 由单调收敛性,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{\varphi}(x + y\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_n(x + y\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t \\ &\geqslant \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \hat{\varphi}(x),\end{aligned}$$

所以 $\hat{\varphi}$ 是重次调和的. 为证最大性, 设 $\psi' \leqslant \varphi$ 是重次调和的, 即 $\psi' \leqslant \psi_0$. 用归纳法可知 $\forall n \geqslant 1, \psi' \leqslant \psi_n$, 取极限得到 $\psi' \leqslant \hat{\varphi}$.

引理 3 中的 ψ_n 实际上还可以用解析鞅得到, 即

$$\psi_n(x) = \inf E\varphi(F_n), \tag{1.22}$$

这里 $F = (F_n, n \geqslant 0)$ 是解析鞅, $F_0 = x$. 为证此, 仍用归纳法. 对于 $n = 0$, $\psi_0(x) = \varphi(x) = E\varphi(F_0)$. 设 (1.26) 对于 $n - 1$ 成立, 固定 $x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0$, 取 y_0 使得

$$\psi_n(x_0) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_{n-1}(x_0 + y_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t + \varepsilon/2.$$

对于每个 $x_0 + y_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, 由归纳假设, 存在解析鞅 $F = (F_n)$, 其中 $F_1 = x_0 + y_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, 使得

$$\psi_{n-1}(x_0 + y_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \geqslant E\varphi(F_n) + \varepsilon/2,$$

将这些鞅 “粘贴” 在一起构成新的鞅 $F = (F_n, n \geqslant 0)$ (用 von Neumann 选择原理得到可测性, 见文献 [202]), 其中 $F_0 = x_0$, 使得

$$E\varphi(F_n) + \varepsilon \leqslant \psi_n(x_0).$$

反过来的不等式是明显的.

引理 4 设 f 在 $\overline{D}$ 的某个邻域解析, $z_0 \in D, \varepsilon > 0$, 则存在解析鞅 $F = (F_n, n \geqslant 0)$ 和 R.V. H, 使得 $F_0 = f(z_0)$, H 在 ∂D 上的分布密度为 $P_{r_0}(t - \theta_0)$ $(z_0 = r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})$, 并且 $E\|F_n - f(H)\|^2 < \varepsilon$.

证明 f 在 $\overline{D}$ 上连续可微, 从而 $\exists M > 0$, 使得

$$\|f(z_1) - f(z_2)\| \leqslant M\|z_1 - z_2\|, \quad \forall z_1, z_2 \in \overline{D}, \tag{1.23}$$

定义直和空间 $X \oplus C = \{(x, z) : x \in X, z \in C\}$, $\|(x, z)\| = \max\{\|x\|, |z|\}$.

$$A = \{(x, z) \in X \oplus C : |z| < 1\},$$
$$B = \{(f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}), \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) : t \in [0, 2\pi]\}$$

是它的两个子集. 令 $u_0(x, z) = \mathrm{dist}((x, z), B), u_0 : A \to [0, \infty)$ 是连续函数. 递推地, 定义

$$u_{n+1}(x, z) = \inf \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(x + x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, z + z'\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t,$$

这里下确界是关于所有 x', z' 而取的, 它们满足 $(x + x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, z + z'\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \in A$.

由引理 3, u_n 单调下降点态趋近于一个重次调和函数 u 并且

$$u_n(x, z) = \inf Eu_0(\tilde{F}_n),$$

这里 $\tilde{F} = (\tilde{F}_n, n \geqslant 0)$ 是 $X \oplus C$ 值解析鞅, $\tilde{F}_0 = (x, z)$.

现在考虑 $u(f(z_0), z_0)$. 由于 u 重次调和, f 解析, $z \to u(f(z), z)$ 是次调和函数, 于是

$$\begin{aligned} u(f(z_0), z_0) &\leqslant \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}), r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) P_{r/r_0}(t - \theta_0)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}), \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) P_{1/r_0}(t - \theta_0)\mathrm{d}t = 0. \end{aligned}$$

故存在 n 使得 $u_n(f(z_0), z_0) < \varepsilon' < 8^{-1}(1 + M^2)\varepsilon$, 或者存在解析鞅 $\tilde{F}$ 使得 $\tilde{F}_0 = (f(z_0), z_0), Eu_0(\tilde{F}_n) < \varepsilon'$.

设 $\tilde{F}_n = F_n + Z_n$, $F_n \in X, Z_n \in C$, 则 F_n, Z_n 都是解析鞅并且 $Z_0 = z_0$, $F_0 = f(z_0)$,

$$E[\mathrm{dist}(F_n, f(\partial D))] < \varepsilon', \quad E[\mathrm{dist}(Z_n, \partial D)] < \varepsilon'.$$

假如一个 Brown 运动从 Z_n 开始, 停止于 ∂D, 得到的 R.V. 记为 H, 让我们估计 $E|H - Z_n|^2$.

对于给定的 $Z_n = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, H$ 的条件分布密度是 $P_r(\theta - t)$, 于是

$$
\begin{aligned}
E(\left|H - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|^2 |Z_n = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|^2 P_r(\theta - t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1 - r^2)\mathrm{d}t = 1 - r^2,
\end{aligned}
$$

积分得到

$$
E\left|H - Z_n\right|^2 = E(1 - |Z_n|^2) \leqslant 2E(1 - |Z_n|) \leqslant 2\varepsilon'.
$$

由 (1.23) 又得到

$$
E\left\|f(H) - f(Z_n)\right\|^2 \leqslant M^2 E\left|H - Z_n\right|^2 \leqslant 2M^2\varepsilon' < \varepsilon/4,
$$

此时 $E(\mathrm{dist}(\tilde{F}_n, B)) < \varepsilon'$.

若 $\mathrm{dist}((x,z),B) < \delta$, 则存在 t 使得 $\left\|(x,z) - (f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}), \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right\| < \delta$, 故 $\left\|x - f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right\| < \delta, \left|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| < \delta$, 从而

$$
\|x - f(z)\| \leqslant \|x - f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\| + \|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - f(z)\| \leqslant (1 + M)\delta,
$$

于是

$$
E\left\|F_n - f(Z_n)\right\|^2 \leqslant (1 + M^2)E(\mathrm{dist}(Z_n, B)) \leqslant (1 + M^2)\varepsilon' < \varepsilon/4,
$$

最后 $E\|F_n - f(H)\|^2 < \varepsilon$.

定理 9 对于复 Banach 空间 X, 下面条件等价:

(i) X 具有 ARN 性质;

(ii) 每个 L^1 有界解析鞅 a.e. 收敛;

(iii) 每个 L^1 有界 Hardy 鞅 a.e. 收敛.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii). 设 $x_n \in X$ 是有界序列, 使 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n z^n \in \tilde{H}^1(X)$. X 具有 ARN 性质, 从而 $f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ a.e. 存在径向极限. 若有一列不相交区间 $I_k = [u_k, v_k]$, 当 $n \notin I_k$ 时, $x_n = 0$ 并且 u_k, v_k 快速增加, 以至于取 $0 < r_k < 1$ 使得 $(1 - r_k^{u_k})v_k < 2^{-k}$, 而 u_{k+1} 使得 $r_k^{u_{k+1}}(1 - r_k)^{-1} < 2^{-k}$. 此时

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=0}^{v_k} x_n \mathrm{e}^{in\theta} - \sum_{n=0}^{\infty} x_n r_k^n \mathrm{e}^{in\theta}\right\| &\leqslant \max_n \|x_n\| \left[\sum_{n=0}^{v_k}(1 - r_k^n) + \sum_{n=u_k+1}^{\infty} r_k^n\right] \\
&\leqslant \max_n \|x_n\| [(1 - r_k^{v_k})v_k + r_k^{u_{k+1}}(1 - r_k)^{-1}] \\
&\leqslant \max_n \|x_n\| 2^{-k+1} \to 0, \quad k \to \infty,
\end{aligned}
$$

由此知 $\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{v_k} x_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ 收敛.

现在若 $F=(F_n,n\geqslant 1)$ 是 X 值 L^1 有界解析鞅,

$$F_n=\sum_{k=1}^{n}\beta_k(\theta_1,\cdots,\theta_{k-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}.$$

先假定每个 $\beta_k(\theta_1,\cdots,\theta_{k-1})$ 是三角多项式, 即形如 $\mathrm{e}^{i(j_1\theta_1+\cdots+j_{k-1}\theta_{k-1})}$ 的函数的线性组合, 其中 $-M_k\leqslant j_1,\cdots,j_{k-1}\leqslant M_k$. 取整数序列 q_n, 其快速增加使得当 $v_n=M_n(q_1+\cdots+q_{n-1}), u_{n+1}=q_n-M_n(q_1+\cdots+q_{n-1})$ 时, u_n,v_n 符合上述增加速度.

对于 $\theta\in\Omega=[0,2\pi]^N, t\in[0,2\pi]$, 考虑

$$G_n(\theta,t)=F_n(\theta_1+q_1t,\theta_2+q_2t,\cdots).$$

固定 t, 忽略 2π 周期不计, 映射 $(\theta_1,\theta_2,\cdots)\to(\theta_1+q_1t,\theta+q_2t,\cdots)$ 是保测变换. 所以 $(G_n(\theta,t),n\geqslant 1)$ 有同样的 θ 分布, $(G_n(\theta,0))=(F_n(\theta))$. 特别地, $(G_n(\theta,t),n\geqslant 1)$ 也是 L^1 有界的. 另一方面, 固定 $\theta, G_n(\theta,t)$ 是 t 的函数, 由 q_n 的取法, $G_n(\theta,t)$ 包含在某级数 $\sum x_n(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ 的部分和中, 此级数具有 u_n,v_n 那样大的缺口. 现在根据上面关于缺口的讨论,

$$\max_n\int\|G_n(\theta,t)\|\mathrm{d}t\geqslant\lim_{r\to1}\int\left\|\sum x_n(\theta)r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right\|\mathrm{d}t,$$

故此级数和属于 $\tilde{H}^1(X)$. 由 ARN 性质, $G_n(\theta,t)$ 关于 $t\in[0,2\pi]$ a.e. 收敛. 即集合

$$\{(\theta,t)\in\Omega\times[0,2\pi]:G_n(\theta,t)\ 收敛\},$$

测度是 1. 由 Fubini 定理 $G_n(\theta,t)$ 关于 $\theta\in\Omega$ a.e. 收敛. 总之 $G_n(\theta,t)$ a.e. 收敛.

对于一般解析鞅, 取三角多项式 $\tilde{\beta}_n$ 使得 $\|\beta_n-\tilde{\beta}_n\|_1<2^{-n}$. 由 Borel-Cantelli 引理, 两级数

$$F_n(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k(\theta_1,\cdots,\theta_{k-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k},\quad \tilde{F}_n(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{\beta}_k(\theta_1,\cdots,\theta_{k-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$$

的收敛集合 a.e. 相等. 由以上所证, $F_n(\theta)$ a.e. 收敛.

(ii)⇒(i). 若每个 L^1 有界解析鞅 a.e. 收敛, 考虑 $f\in\tilde{H}^\infty(X)$. $\forall\varepsilon>0$, 应用引理 4, 取解析鞅 $(F_n,1\leqslant n\leqslant n_1)$, 使得 $E\|F_{n_1}-f(W_{\tau_1})\|^2<\varepsilon/2$. 然后条件地关于 $f(W_{\tau_1})$, 取 $(F_n-F_{n_1},n_1+1\leqslant n\leqslant n_2)$, 使

$$E\|F_{n_2}-F_{n_1}-f(W_{\tau_2})+f(W_{\tau_1})\|^2<\varepsilon/4,$$

继续下去得到解析鞅 $(F_n, n \geqslant 0), F_0 = 0$, 使得 $E\|F_{n_k} - f(W_{\tau_k})\|^2 < \varepsilon$, 其中 $n_k \uparrow \infty$.

注意解析鞅$(F_n, n \geqslant 0)$ 是 L^1 有界的,

$$E\|F_{n_k}\| \leqslant \sup_k \|f(W_{\tau_k})\|^2 + \varepsilon^{1/2},$$

所以 F_{n_k} 收敛. 故当 k, k' 充分大时, $E\|f(W_{\tau_k}) - f(W_{\tau_{k'}})\| < 2\varepsilon$, 于是 $f(W_{\tau_k})$ a.e. 收敛, $f(re^{i\theta})$ a.e. 存在径向极限.

(iii)⇒(ii) 是显然的. 剩下只需证明 (ii)⇒(iii). 但是 Hardy 鞅的情况只比解析鞅稍微复杂一些. 实际上对于 Hardy 鞅 $F = (F_n, n \geqslant 0)$, 记

$$d_n = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{nj}(\theta_1, \cdots, \theta_{n_1}) e^{ij\theta_n}.$$

对于每个 n, 先取 k_n 使得

$$\left\| d_n - \sum_{j=1}^{k_n} \varphi_{kj}(\theta_1, \cdots, \theta_{k-1}) e^{ij\theta_k} \right\|_1 < 2^{-n}.$$

再取三角多项式 $g_{nj}(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$ 使得

$$\|\tilde{d}_n - d_n\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^{k_n} g_{nj}(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) e^{ij\theta_n} - d_n \right\|_1 < 2^{-n}.$$

像解析鞅的情况一样, 由 Borel-Cantelli 引理, 只需对于以 $\tilde{d}_n$ 为鞅差的 Hardy 鞅进行证明. 对于它, 通过选取一组快速增加的自然数, 应用类似的方法仍可得到所说的结果.

8.2　ARNP 的几何特征

像 RN 性质的情况一样, 几何方法与分析方法是研究 ARN 性质的两种不同的途径. 本节将叙述与此有关的结果. 采用更细致的论证还可以把主要结果扩展到拟赋范空间, 但这里将仅就 Banach 空间情况加以讨论.

记 X 上的重次调和函数全体为 PSH(X). 称实函数 $f: X \to R$ 在 X 上满足规范 Lipschitz 条件, 若

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X. \tag{2.1}$$

X 上既重次调和又满足规范 Lipschitz 条件的函数全体记为 PSH$_1(X)$. 共轭空间单位球中每个线性泛函的实部, 函数 $f(x) = \|x - x_0\|$ 以及 $d(x, A)$($A \subset X$ 是某个子

集) 都是满足这些条件的函数. 若 $f_n(x)$ 满足 (2.1) 并且在 X 上点态地收敛于 $f(x)$, 则 f 在 X 上满足 (2.1). 由此可知, 满足 (2.1) 的函数的重次调和包络 $\hat{\varphi} \in \mathrm{PSH}_1(X)$.

若 $A \subset X$ 是有界闭凸子集, $\mathrm{PSH}_1(A)$ 是 $\mathrm{PSH}_1(X)$ 中函数在 A 上的限制. 记 $C(A)$ 是 A 上有界连续函数全体, 以上确界为范数.

命题 1 $\mathrm{PSH}_1(A)$ 是 $C(A)$ 的闭子集.

证明 $\forall f \in \mathrm{PSH}_1(X)$, 定义

$$\tilde{f}(x) = \inf_{y \in A}\{\|x-y\| + f(y)\}, \quad \forall x \in X.$$

直接验证表明 $\tilde{f}|_A = f, \tilde{f}(x) \geqslant f(x), \forall x \in X$ 并且 $\tilde{f}$ 满足 (2.1). 此外 $\forall f, g \in \mathrm{PSH}_1(X)$, $|\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)| \leqslant \|f|_A - g|_A\|_{C(A)}$. 定义映射

$$\psi(f|_A) = \hat{\tilde{f}}, \quad \forall f \in \mathrm{PSH}_1(X),$$

这里 $\hat{\tilde{f}}$ 是 $\tilde{f}$ 的重次调和包络. 于是

$$|\psi(f)(x) - \psi(g)(x)| \leqslant \|f-g\|_{C(A)},$$

并且 $f(x) \leqslant \hat{\tilde{f}}(x) \leqslant \tilde{f}(x), \forall x \in X$. 特别地, 在 A 上, $f = \hat{\tilde{f}}$.

若 $g_n \in \mathrm{PSH}_1(A)$ 是 Cauchy 序列, 则 $\psi(g_n)$ 在 X 上点态收敛于一个函数 $g \in \mathrm{PSH}_1(X)$, 它在 A 上的限制即是 g_n 的极限. 证毕.

记 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{PSH}_1(A)$ 在 $C(A)$ 中的闭包为 $\mathrm{PSH}(A)$, 明显地其中的每个元定义在 A 上并且可以用 $\mathrm{PSH}_1(X)$ 中元在 A 上一致逼近.

设 $A \subset X$ 是有界集, $\hat{d}_A$ 是 $d_A(x) = d(x, A)$ 的重次调和包络, 定义

$$\hat{A} = \{x \in X : \hat{d}_A(x) = 0\}, \tag{2.2}$$

称 $\hat{A}$ 是 A 的重次调和壳. 称 A 是 PSH 凸的, 若 $A = \hat{A}$.

命题 2 (i) $A \subset \hat{A}$;

(ii) $\hat{A} = \hat{\bar{A}}$($\bar{A}$ 是 A 的闭包);

(iii) $\hat{A}$ 是在等价范数意义下不变的;

(iv) $\hat{A} = \{x \in X : f(x) \leqslant 0, \forall f \in \mathrm{PSH}_1(X), f|_A = 0\}$;

(v) $x \in \hat{A}$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, 存在解析鞅 $F = (F_k)_{k=0}^n$, 使得 $F_0 = x, Ed(F_n) < \varepsilon$.

证明 (i) 是显然的. (ii) 是由于 $d_A = d_{\bar{A}}$, 因此 $\hat{d}_A = \hat{d}_{\bar{A}}$. (iii) 是由于 $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ 时, $d_1(\cdot\,, A) \sim d_2(\cdot\,, A)$, 从而 $\hat{d}_1(\cdot\,, A) \sim \hat{d}_2(\cdot\,, A)$, $\hat{d}_1(x, A) = 0 \Leftrightarrow \hat{d}_2(x, A) = 0$. 为证 (iv), 只需注意 d_A 是 $\mathrm{PSH}_1(X)$ 中满足在 A 上为 0 的最大函数. 最后为证 (v) , 根据 8.1 节引理 3 即得到

$$\inf Ed_A(F_n) = \hat{d}(x) = 0.$$

设 μ 是 X 上的 Radon 概率测度, 由 Riesz 表现定理, 它是 X 上具有紧支撑的连续函数空间上的线性泛函, $x_0 \in X$, 称 μ 是 x_0 的 Jensen 测度表示, 若

$$f(x_0) \leqslant \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad \forall f \in \mathrm{PSH}_1(X). \tag{2.3}$$

当 (2.3) 成立时, $\forall f \in X^*$ 有 $f(x_0) = \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x)$, 所以 x_0 一定是 μ 的重心. 由命题 2 (iv) 又知道支撑在 A 上的 Jensen 测度的重心属于 $\hat{A}$. 此时称 A 是 J 凸的.

命题 3　若 A 是紧集, 则 $x \in \hat{A}$ 当且仅当 x 是支撑在 A 上的 Jensen 测度的重心. 即 A 是 J 凸的当且仅当 A 是 PSH 凸的.

证明　只需证明必要性. 设 $x_0 \in \hat{A}$, 考虑 $C(A)$ 中的凸锥 $\mathfrak{A}$:

$$\{g \in C(A) : \exists f \in \mathrm{PSH}_1(X),\ \lambda > 0, f(x_0) = 0, g(y) \geqslant \lambda f(y), \forall y \in A\}.$$

由命题 2(iv), $-1 \notin \mathfrak{A}$, 由隔离定理和 Riesz 表现定理, 存在 A 上的 Radon 概率测度 μ, 使得

$$f(x_0) \leqslant 0 \leqslant \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad \forall f \in \mathrm{PSH}_1(X).$$

所以 μ 是 x_0 的 Jensen 测度表示.

我们称 $x_0 \in X$ 是有界闭集 $A \subset X$ 的 Jensen 边界点, 如果 Dirac 测度 δ_{x_0} 是唯一的支撑在 A 上的 x_0 的 Jensen 测度表示.

命题 4　若 A 是紧集, x_0 是 A 的 Jensen 边界点, 则 $\forall g \in C(A)$,

$$g(x_0) = \sup\{\lambda f(x_0) : f \in \mathrm{PSH}_1(X), \lambda > 0, g(y) \geqslant \lambda f(y), \forall y \in A\}.$$

证明　不妨设 $g(x_0)$=0. 若上式不成立, 则 g 不在凸锥

$$\{h \in C(A) : \exists f \in \mathrm{PSH}_1(X), f(x_0) = 0, \exists \lambda > 0,\ h(y) \geqslant \lambda f(y), \forall y \in A\}$$

中. 由隔离定理, 存在 A 上的 Radon 概率测度 μ, 使得

$$\int_A g(x)\mathrm{d}\mu(x) < 0 \leqslant \int_A f(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad \forall f \in \mathrm{PSH}_1(X), f(x_0) = 0.$$

这说明 μ 是 x_0 的 Jensen 测度表示, 因此 $\mu = \delta_{x_0}$. 从而与 $g(x_0) = 0$ 矛盾.

定义 1　设 $A \subset X$ 是有界闭集.

(i) 称 x_0 是 A 的复端点, 若 $y \in X, \{x_0 + zy : z \in D\} \subset A$ 时, $y = 0$;

(ii) 称 x_0 是 A 的 PSH 凹点, 若 $\forall \varepsilon > 0, x_0 \notin \hat{A}_\varepsilon$, 这里

$$A_\varepsilon = A \backslash B(x_0, \varepsilon), \quad B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\};$$

(iii) 称 x_0 是 A 的障碍点(强障碍点), 若存在 $f \in \text{PSH}_1(X)$, 使得 f 在 x_0 暴露(强暴露)A. 即 $f(x_0) = \sup\limits_{x \in A} f(x)$, 但 $x \in A, x \neq x_0$ 时,

$$f(x) < f(x_0), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \sup_{x \in A_\varepsilon} f(x) < f(x_0).$$

这样的函数称为 A 的障碍 (强障碍) 函数.

集合 A 的 PSH 切片是形如 $A \cap \{x : f(x) > 0\}$ 的集合, 其中 $f \in \text{PSH}_1(X)$. x_0 是 A 的 PSH 凹点. 一个等价的说法是, 存在 A 的 PSH 切片包含 x_0 并且有任意小的直径.

定理 1 设 $A \subset X$ 是紧集, 则

(i) PSH(A) 中的每个函数在 A 的一个 Jensen 边界点达到它在 A 上的极大值;

(ii) A 的每个 Jensen 边界点被 PSH(A) 中的一个函数暴露;

(iii) A 包含在它的障碍点的重次调和凸壳中.

证明 (i) 的证明完全类似于著名的 Krein-Milman 定理的证明. A 的闭子集 F 称为 A 的一个 J- 面, 如果支撑在 A 上的每个 Jensen 测度 μ 表示 F 的一个点, 则 μ 必支撑在 F 上. 容易知道若 $f \in \text{PSH}_1(A)$, 则使 f 达到在 A 上极大值的点是 A 的 J- 面, A 的每个 J- 面包含一个最小 J- 面, 它由一个单点组成, 就是 A 的 Jensen 边界点.

(ii) 若 x_0 是 A 的 Jensen 边界点, 由命题 3, 对于 A 的每个闭子集 F, 若 $x_0 \notin F$, 则 $x_0 \notin \hat{F}$. 由此应用命题 4 的程序, 对于每个 $h \in C(A)$ 可以得到一个 $f \in \text{PSH}(A)$, 满足 $f(x_0) = h(x_0), f(x) \leqslant h(x), \forall x \in A$.(另见文献 [96]) 若 h 在 x_0 暴露 A, 则 f 也是.

现在证明 (iii). 因为 $\hat{d}_A \in \text{PSH}_1(A)$, 故只需证明障碍函数在 $\text{PSH}_1(A)$ 中稠密. 但由命题 1 , $\text{PSH}_1(A)$ 是完备度量空间, 由 Baire 纲定理只需证明 $\forall \varepsilon > 0$,

$$G_\varepsilon = \{g \in \text{PSH}_1(A) : \exists \delta > 0, \text{diam} S(A, g, \delta) \leqslant \varepsilon\}$$

是 $\text{PSH}_1(A)$ 中的稠密开集, 这里

$$S(A, g, \delta) = \{x \in A : g(x) > \sup_{y \in A} g(y) - \delta\}.$$

G_ε 是开集至为明显. 为证稠密性, 设 O 是 $\text{PSH}_1(A)$ 中非空开集. 用有限个直径为 $\varepsilon/4$ 的球覆盖 A, 至少有一个球 $B = B(x_1, \varepsilon/4)$ 使得 O 中如下函数 f 的集合具有非空内点: f 在 B 的某个点达到它在 A 上的极大值. 设 g_0 是一个这样的内点, 即对于某个 $\alpha > 0, \forall f \in \text{PSH}_1(A)$, 若 $\|f - g_0\|_{C(A)} < \alpha$, 则 $f \in O$ 并且 f 在 B 的某个点达到它在 A 上的极大值. 可以断定 $g_0 \in G_\varepsilon$. 例如, 设 $\delta > 0$, 考虑切片 $S(A, g_0, \delta)$.

若 $\mathrm{diam}S(A,g_0,\delta)>\varepsilon$, 则必 $\exists x_2\in A, \|x_2-x_1\|\geqslant\varepsilon/2$, 此时函数

$$h(x)=\max\{\|x-x_1\|-\varepsilon/4,0\}\in\mathrm{PSH}_1(X),\quad h|_B=0,$$

并且 $h(x_2)\geqslant\varepsilon/4$. 而函数

$$(1+8\delta/\varepsilon)^{-1}(g_0+(8\delta/\varepsilon)h)\in\mathrm{PSH}_1(X).$$

若 $\delta>0$ 足够小, 此函数按照 $C(A)$ 中的距离离 g_0 小于 α, 则它在 B 的某个点达到它在 A 上的极大值. 此外

$$\max_{y\in B\cap K}\{g_0(y)+(8\delta/\varepsilon)h(y)\}=\max_{y\in B\cap K}g_0(y)=\max_{y\in K}g_0(y),$$

同时

$$g_0(x_2)+(8\delta/\varepsilon)h(x_2)\geqslant\max_{y\in K}g_0(y)+\delta,$$

从而导致矛盾.

引理 1 设 X 具有 ARN 性质, $A\subset X$ 是有界闭集, f 是 A 上的有界函数. $\forall g\in\mathrm{PSH}_1(A)$ 和 $\delta>0$, 令

$$S(A,f+g,\delta)=\{x\in A:f(x)+g(x)\geqslant\sup_{y\in A}(f(y)+g(y))-\delta\}.\tag{2.4}$$

对于 $\eta>0$, 又令

$$\kappa_f(\eta)=\inf\{\mathrm{diam}S(A,f+g,\delta):\delta>0,g\in\mathrm{PSH}_1(A),\|g\|_{C(A)}\leqslant\eta\},\tag{2.5}$$

则 $\forall\eta>0,\kappa_f(\eta)=0$.

证明 不妨设 $A\subset B(0,1)$. 若结论不成立, 则存在 $0<\eta_0\leqslant1/2$, 使得

$$\kappa_f(\eta)\geqslant4r>0,\quad\forall0<\eta\leqslant\eta_0,$$

其中 r 是某个固定常数. 对于 $\delta>0,\eta>0,\lambda>0$, 令

$$D_f(\delta,\eta,\lambda)=\bigcup\{S(A,f+g,\delta):\|g\|_{C(A)}\leqslant\eta,g\in\lambda\mathrm{PSH}_1(A)\}.$$

我们断定, 若 $\delta,\eta,\lambda,\gamma,\alpha>0$ 并且 $\eta+2\alpha\leqslant\eta_0,\lambda+\alpha\leqslant1$, 则

$$\hat{d}_E(x)\leqslant(\delta+\gamma)/\alpha,\quad\forall x\in D_f(\delta,\eta,\lambda),\tag{2.6}$$

其中集合 $E=D_f(\gamma,\eta+2\alpha,\lambda+\alpha)\backslash B(x,r)$. 注意由 (2.5) 和 r 的取法, $D_f(\gamma,\eta+2\alpha,\lambda+\alpha)$ 中的每个被加项是直径大于等于 $4r$ 的集合, 故 $E\neq\varnothing$.

注意 $\hat{d}_E \in \mathrm{PSH}_1(X)$ 并且 $\hat{d}_E|_E = 0$. 由于 $A \subset B(0,1)$, $\|\hat{d}_E\|_{C(A)} \leqslant 2$. 若 $g \in \lambda\mathrm{PSH}_1(A)$, $\|g\|_{C(A)} \leqslant \eta$, $x \in S(A, f+g, \delta)$, 则 $g + \alpha\hat{d}_E \in (\lambda+\alpha)\mathrm{PSH}_1(A)$ 并且 $\|g + \alpha\hat{d}_E\|_{C(A)} \leqslant \eta + 2\alpha$. 由于 $E \neq \varnothing$, 故可找到 $y \in S(A, f+g+\alpha\hat{d}_E, \gamma)\backslash B(x,r)$, 从而

$$\begin{aligned}\alpha\hat{d}_E(x) + \sup_{u\in A}(f(u)+g(u)) - \delta &\leqslant \alpha\hat{d}_E(x) + f(x) + g(x)\\ &\leqslant \sup_{u\in A}(f(u)+g(u)+\alpha\hat{d}_E(u)) \leqslant f(y)+g(y)+\alpha\hat{d}_E(y)+\gamma\\ &= f(y)+g(y)+\gamma \leqslant \gamma + \sup_{u\in A}(f(u)+g(u)),\end{aligned}$$

这给出 (2.6).

现在设 ε_k 是一列单调下降正数, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k \leqslant \eta_0/2$. 考虑 A 的子集

$$D_n = D_f\left(\varepsilon_{n+1}^2, 2\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k, \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k\right), \quad n \geqslant 1.$$

由 (2.6),

$$\hat{d}_{D_{n+1}\backslash B(x,r)}(x) \leqslant 2\varepsilon_n, \quad x \in D_n, \quad n \geqslant 1. \tag{2.7}$$

现在我们构造一个不收敛的 L^1 有界 X 值解析鞅从而得出矛盾.

取 $x_0 \in D_1$, 由命题 2 (iv), 存在解析鞅 $(F_n)_{n=0}^{n_1}$, 使得 $F_0 = x_0$,

$$Ed_{D_2\backslash B(x_0,r)}(F_{n_1}) < 3\varepsilon_1. \tag{2.8}$$

不妨设这里鞅的系数 β_n 都由简单函数构成, 称其为简单解析鞅. (2.8) 意味着存在简单函数 $g_1 : [0,2\pi]^{n_1} \to D_2$, 使得 $\|g_1(\theta) - x_0\| \geqslant r$, 并且 $\|g_1(\theta) - F_{n_1}(\theta)\|_{L^1} \leqslant 3\varepsilon_1$. 接着往下, 存在简单解析鞅 $(F_n)_{n=n_1+1}^{n_2}$, 使得

$$Ed_{D_3\backslash B(g_1,r)}(F_{n_2}) < 3\varepsilon_2.$$

依次做下去得到解析鞅 $F = (F_n)_{n=0}^{\infty}$, 递增自然数序列 n_k 和 $\Omega = [0,2\pi]^N$ 上的 R.V. g_k 满足

$$\|g_k(\theta) - g_{k-1}(\theta)\| \geqslant r, \quad \forall k \geqslant 1, \quad \theta \in \Omega, \tag{2.9}$$

并且

$$\|g_{k+1} - g_k - (F_{n_{k+1}} - F_{n_k})\|_{L^1} \leqslant 3\varepsilon_k, \quad k \geqslant 1. \tag{2.10}$$

由此以及 $\|g_k(\theta)\|_{L^1} \leqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k < \infty$ 得出

$$\sup_n \|F_n\|_{L^1} \leqslant \sup_k \|F_{n_k}\|_{L^1} < \infty.$$

但 (2.9), (2.10) 说明 $F_n(\theta)$ 不是 a.e. 收敛的. 引理证毕.

定理 2 设 X 是复 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) X 具有 ARN 性质;

(ii) X 中的每个有界闭集包含在它的强障碍点的重次调和凸壳中;

(iii) 对于 X 的任何有界闭子集 A 和 A 上定义的上半连续实函数以及 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $g\in \mathrm{PSH}_1(X), \|g\|_{C(A)}<\varepsilon$ 使得 $f+g$ 强暴露 A;

(vi) X 中的每个有界闭集包含在它的 PSH 凹点的重次调和凸壳中.

证明 (ii)$\Rightarrow$(vi) 是明显的, 因为每个强障碍点是 PSH 凹点. 把 (iii) 用于 f, 其中 $f\in\lambda\mathrm{PSH}_1(A), \lambda>0$, 则知强障碍函数在 $\mathrm{PSH}_1(A)$ 中稠密, 于是 (iii)$\Rightarrow$(ii) 成立.

为证 (iv)$\Rightarrow$(i), 我们证明如下论断: $\forall\varepsilon>0$ 和有界子集 A, 若 A 不包含在球 $\bar{B}(0,\varepsilon/2)$ 中, 则存在 A 的 PSH 切片 S, 使得 $\mathrm{diam}S\leqslant\varepsilon, S\cap\bar{B}(0,\varepsilon/2)=\varnothing$.

实际上, 因为 $\bar{B}(0,\varepsilon/2)$ 是 PSH 凸的, 由 (iv) 和 $A\not\subset\bar{B}(0,\varepsilon/2)$, 故 $\bar{A}$ 必包含一个 PSH 凹点 x_0, $\|x_0\|>\varepsilon/2$. 若 $\eta<\min(\varepsilon,\|x_0\|-\varepsilon/2)$, 则 A 的任何非空 PSH 切片 S, 若 S 包含 x_0, 直径 $\leqslant\eta$, S 符合上述论断.

为证 (i) 成立, 设 $F:D\to X$ 是解析函数并且 $\|F(z)\|\leqslant 1, \forall z\in D$, 我们证明 F 的径向极限 a.e. 存在. 应用竭举引理, 只需证明 $\forall\varepsilon>0$ 和 ∂D 的正测度子集 Δ, 存在正测度子集 $\Delta'\subset\Delta$, 使得

$$\lim_{r,r'\to 1}\sup\|f(re^{i\theta})-F(r'e^{i\theta})\|\leqslant\varepsilon,\ \text{a.e. 于 }\Delta'. \tag{2.11}$$

取 $\bar{D}$ 上的复数值函数 $H(z)$, 使得在 Δ 上 $|H(e^{i\theta})|=1$ a.e., 在 $\partial D\backslash\Delta$ 上 $|H(e^{i\theta})|=\varepsilon/2$ a.e. (称此函数为外函数, 其存在性的证明见文献 [87]). 记

$$A=\{H(z)F(z):\forall z\in D\},$$

则 $A\subset X$. 若 $A\subset\bar{B}(0,\varepsilon/2)$, 则

$$\lim_{r\uparrow 1}\sup\|F(re^{i\theta})\|\leqslant\varepsilon/2,\quad \text{a.e.},\quad \theta\in\Delta,$$

此时 (2.11) 成立并且 $\Delta'=\Delta$. 若 $A\not\subset\bar{B}(0,\varepsilon/2)$, 则上述断言成立, 此时存在实函数 $g\in\mathrm{PSH}_1(X)$, 使得 $S=A\cap\{x;g(x)>0\}\neq\varnothing, \mathrm{diam}\,S\leqslant\varepsilon, S\cap\bar{B}(0,\varepsilon/2)=\varnothing$. 注意次调和函数 $g\circ(H\cdot F)$ 有径向极限 $\psi(\theta)=\lim\limits_{r\to 1^-}g(H\cdot F(re^{i\theta}))$a.e.. 由 $S\cap\bar{B}(0,\varepsilon/2)=\varnothing$ 以及在 $\partial D\backslash\Delta$ 上 $\lim\limits_{r\to 1^-}\sup\|H\cdot F(re^{i\theta})\|\leqslant\varepsilon/2$, 故在 $\partial D\backslash\Delta$ 上 $\psi(\theta)\leqslant 0$. 又由 S 非空, $g\circ(H\cdot F)$ 在 D 上取正值, 从次调和性与有界性得知 $\Delta'=\{\theta:\psi(\theta)>0\}$ 具有正测度. 最后由 $\mathrm{diam}\,S\leqslant\varepsilon$, (2.11) 对于每个 $\theta\in\Delta'$ 成立.

最后, 为证 (i)$\Rightarrow$(iii), 我们应用上面引理 1. 由命题 1, 对于 $\eta>0$, 集合

$$V_\eta=\{g\in\mathrm{PSH}_1(A):\|g\|_{C(A)}\leqslant\eta\}$$

是完备度量空间. 由引理 1, 集合

$$O_n = \{g \in V_\eta : \exists \delta > 0, \mathrm{diam} S(A, f + g, \delta) < n^{-1}\}$$

是非空的. O_n 显然是 V_η 的开子集. 它又是稠密的. 实际上, 若 $g_0 \in V_\eta$, $\varepsilon > 0$, 把引理用于函数 $\varepsilon^{-1}(f + (1-\varepsilon)g_0)$ 以找到函数 $g \in V_\eta$ 和 $\delta > 0$, 使得

$$\begin{aligned}&\mathrm{diam} S(A, \varepsilon^{-1}(f + (1-\varepsilon)g_0) + g, \delta) \\ =&\ \mathrm{diam} S(A, f + (1-\varepsilon)g_0 + \varepsilon g, \varepsilon\delta) < n^{-1}.\end{aligned}$$

函数 $(1-\varepsilon)g_0 + \varepsilon g \in O_n$, 这证明了稠密性. 由 Baire 纲定理, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} O_n$ 是 V_η 的稠密子集. 因为 f 上半连续, 故 $S(A, f+g, \delta)$ 都是闭集, 从而每个 $g \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} O_n$, $f+g$ 强暴露 A. 定理证毕.

8.3 复凸性及其刻划

在凸性方面复空间也有与实空间不同的特征. 本节介绍复严格凸、复一致凸等复空间的属性. 作为应用, 我们将讨论取值于复空间的解析函数满足强极大模原理所需要的几何条件. 本节的重点将集中在具有多方面应用的 PL 一致凸和 H 一致凸性及其特征.

定义 1 称复空间 X 是复严格凸或严格 c- 凸的, 若 $x, y \in X$, $\|x\| = 1$ 并且 $\|x + zy\| \leqslant 1$ $(\forall z \in D)$, 则 $y = 0$. 称 X 是复一致凸或一致 c- 凸的, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $x, y \in X, \|x\| = 1$, 并且 $\|x + zy\| \leqslant 1 (\forall z \in D)$, $\|y\| > \varepsilon$, 则 $\|x\| < 1 - \delta$.

由上节的定义知道复严格凸等价于单位球面上每一点都是复端点. 显然复一致凸意味着复严格凸并且在以上定义中 $\forall z \in D$ 可以换为 $z = \pm 1$, $\pm \mathrm{i}$. 如果把复空间视为实空间, 自然也可以定义通常已经知道的严格凸和一致凸. 容易明白, 严格凸意味着复严格凸, 一致凸意味着复一致凸.

定理 1 复空间 $L^1[0,1]$ 是复一致凸的.

证明 我们证明 $\forall \delta > 0$, 若 $x, y \in X, \|x\| = 1$ 并且 $\|x + zy\| \leqslant 1 + \delta, \forall z \in D$, 则 $\|y\| \leqslant C\delta^{1/2}$. 不妨设 $x(t)$ 处处取有限值, 定义 $b(t) = x(t)(y(t))^{-1}\chi_{\{y(t) \neq 0\}}$. $\forall c > 0$, 记

$$E_1 = \{y \neq 0\} \cap \{|b(t)| > c\}, \quad E_1 = \{y \neq 0\} \cap \{|b(t)| \leqslant c\},$$

因为 $\|x\| = 1$, 故有

$$\int_{E_1} |y(t)| \mathrm{d}t = \int_{E_1} \left| \frac{x(t)}{b(t)} \right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{c} \int_{E_1} |x(t)| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{c}. \tag{3.1}$$

另一方面, 由假设,

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{3} \left| x(t) + \mathrm{i}^k y(t) \right| - 4 \left| x(t) \right| \right) \mathrm{d}t \leqslant 4\delta, \tag{3.2}$$

注意被积函数非负, 记 $\sum\limits_{k=0}^{3} |x(t) + \mathrm{i}^k y(t)| - 4|x(t)| = F(t)|y(t)|$, 则 $F(t) \geqslant 0$ 并且由上式推出

$$\int_{E_2} F(t)|y(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 F(t)|y(t)|\mathrm{d}t \leqslant 4\delta. \tag{3.3}$$

若令 $f(r,\theta) = |r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{i}| + |r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{i}| - 2r$ $(r \geqslant 0, \theta \in R)$, 则 f 非负连续, 在 $[-\pi/2, 0]$ 递增, $[0, \pi/2]$ 递减, 关于 θ 对称, 以 π 为周期. 由此得出

$$f(r,\theta) + f(r,\theta+\pi/2) \geqslant f(r,\pi/4) \geqslant (4r^2+2)^{1/2} - 2r.$$

因为

$$\begin{aligned} F(t) &= \Big(\sum_{k=0}^{3} |x(t) + \mathrm{i}^k y(t)| - 4|x(t)| \Big) / |y(t)| \\ &= \sum_{k=0}^{3} |b(t) + \mathrm{i}^k| - 4|b(t)| \\ &= f(|b(t)|, \arg b(t)) + f(|b(t)|, \arg b(t) + \pi/2) \\ &\geqslant (4|b(t)|^2 + 2)^{1/2} - 2|b(t)| \\ &\geqslant (4c^2+2)^{1/2} - 2c, \end{aligned}$$

后者是由于在 E_2 上, $|b(t)| \leqslant c$. 于是

$$\int_{E_2} |y(t)|\mathrm{d}t \leqslant 2\delta((4c^2+2)^{1/2} + 2c), \tag{3.4}$$

取 $c = 1/(2\delta^{1/2})$, (3.1), (3.2) 一起给出所要的估计.

经典的解析函数的强极大模原理是说对于在区域 Ω 中解析的函数 f, 要么 $|f(z)|$ 在 Ω 中没有极大值, 要么 $f(z)$ 是常数. 但这一结论对于取值于一般 Banach 空间的解析函数不能成立. 例如, 对于空间

$$l_2^\infty = \{(z_1, z_2) : z_i \in C, i = 1, 2\}, \quad \|(z_1, z_2)\| = \max\{|z_1|, |z_2|\},$$

$f(z) = (1, z)$ 是 l_2^∞ 值解析函数, $\|f(z)\| \equiv 1$, 但 $f(z)$ 不是常数. 试问究竟怎样的空间能够使极大模原理成立?

引理 1 设 X 是复 Banach 空间, Ω 是复平面中的区域, $f:\Omega\to X$ 是解析函数, $|f(z)|=1,\forall z\in\Omega$, 则 $\forall y\in\overline{\mathrm{co}}\{f(z):z\in\Omega\}$, 必有 $\|y\|=1$.

证明 先设 $y\in\mathrm{co}\{f(z):z\in\Omega\}$, 不妨设

$$y=\sum a_i f(z_i),\quad a_i\geqslant 0,\quad \sum a_i=1,\quad z_i\in\Omega.$$

由 Hahn-Banach 定理, $\exists x^*\in X^*,\|x^*\|=1$ 使得 $x^*f(z_1)=1$. 因为

$$|x^*f(z)|\leqslant\|x^*\|\|f(z)\|=1,\quad \forall z\in\Omega,$$

故 $x^*f(z)$ 是复数值解析函数并且在 z_1 达到极大值. 于是由经典的极大模原理, $x^*f(z)=1$, $\forall z\in\Omega$. 这样一方面,

$$x^*(y)=\sum a_i x^*f(z_i)=1,$$

从而 $\|y\|\geqslant x^*(y)=1$. 另一方面 $\|y\|\leqslant\sum a_i\|f(z_i)\|=1$, 总之 $\|y\|=1$.

定理 2 设 X 是复 Banach 空间, 要使每个 X 值解析函数满足强极大模原理当且仅当 X 是复严格凸的.

证明 必要性. 若 X 不是复严格凸的, 则存在 $x_0,\|x_0\|=1$ 以及 $y_0\neq 0$, 使得 $\forall z\in D$, $\|x_0+zy_0\|\leqslant 1$. 如果有 $z\in D$ 使 $\|x_0+zy_0\|<1$, 则

$$\|x_0\|\leqslant(\|x_0+zy_0\|+\|x_0-zy_0\|)/2<1,$$

矛盾. 于是 $\forall z\in D$, $\|x_0+zy_0\|=1$. 定义 $f(z)=x_0+zy_0,\forall z\in D$, 则 f 是解析函数, $|f(z)|=1,\forall z\in\Omega$, 但 f 不是常数.

充分性. 设 X 复严格凸, 一个简单的变换可以把问题变为考虑 $f:D\to X$ 解析并且 $\|f(z)\|=1,\forall z\in D$ 的情况, 我们的任务是证明 $f(z)\equiv f(0),\forall z\in D$.

设 $f(z)=x_0+g(z),g(0)=0$. 则 $\overline{\mathrm{co}}f(D)=x_0+\overline{\mathrm{co}}\,g(D)$. 我们证明 $g=0$. g 解析, 故不妨设 $g(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_nz^n,|z|<1$. 若 $g\neq 0$, 不妨设 x_{n_0} 是第一个不为 0 的系数, 并且 $\omega_1,\cdots,\omega_{n_0}$ 是 1 的 n_0 次方根. 此时对于 $|z|<1$ 和一个确定的 $\sqrt[n_0]{z}$ 的分支,

$$n_0^{-1}\sum_{k=1}^{n_0}g(z^{1/n_0}\omega_k)=x_{n_0}z+x_{2n_0}z^2+\cdots=g_0(z).$$

为简单起见, 记 $g_0(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_nz^n,|z|<1$, g_0 解析并且 $\mathrm{co}\,g_0(D)\subset\mathrm{co}\,g(D)$.

现在我们应用文献 [43] 的一个结论: 存在 $M>0$, 使得 $\forall n$ 可以找到复数 $z_1,\cdots,z_n$, $|z_k|<M,1\leqslant k\leqslant n$ 并且

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n}z_k=1,\quad n^{-1}\sum_{k=1}^{n}z_k^p=0,\quad p=2,3,\cdots,n.$$

对于如此的 z_k, 若 $|z|<1/M$, 则

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n}g_0(zz_k)=y_1z+\sum_{m=n+1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k^m\right]y_mz^m,$$

其左端在 $\operatorname{co}g_0(D)$ 中, 离 y_1z 的距离小于或等于 $\sum\limits_{m=n+1}^{\infty}\|y_m\|(M|z|)^m$. 当 $|z|<1/M$ 时, 级数绝对收敛, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=n+1}^{\infty}\|y_m\|(M|z|)^m=0$, 所以 y_1z 属于 $\overline{\operatorname{co}}\,g_0(D)\subset\overline{\operatorname{co}}\,g(D)$. 由引理 1, $\forall z\in D,\|x_0+zM^{-1}y_0\|=1$, 这与 X 的复严格凸性 ($f(0)=x_0$ 是复端点) 矛盾. 证毕.

注意由于每个实端点是复端点, 因此 Klein-Milman 的著名定理对于复端点也成立. 另外定理 1 说明复空间 $L^1[0,1]$ 是复一致凸的. 但是我们在第 3 章已经知道 $L^1[0,1]$ 的单位球面上是没有实端点的, 这再一次表明复空间与实空间有着不同的几何属性.

现在将讨论扩展到拟赋范空间. 线性空间 X 上的映射 $x\to\|x\|$ 称为是拟范数, 若 $\forall x,y\in X$, $a\in C$,

(i) $x\neq 0$ 时, $\|x\|>0$; (ii) $\|ax\|=|a|\|x\|$; (iii) $\|x+y\|\leqslant K(\|x\|+\|y\|)$.

满足 (iii) 的最小常数 K 称为 X 的拟赋范常数. 注意一般来说拟赋范空间只是可度量化拓扑线性空间, 集族 $\{x\in X:\|x\|<\varepsilon\}(\varepsilon>0)$ 构成 X 的局部基, 但 $\|\cdot\|$ 关于此拓扑未必连续. 不过今后我们只考虑具备这种连续性的空间, 称之为连续拟赋范空间. 此时存在等价的拟范数 $|||\cdot|||$ 和仅与 K 有关的 p, $0<p\leqslant 1$, 使得

$$|||x+y|||^p\leqslant|||x|||^p+|||y|||^p,\quad \forall x,y\in X.$$

这一点用起来至为方便. 如果 $\|\cdot\|$ 还是完备的, 则称之为拟 Banach 空间. 调和分析中常用的空间 $L^p(\mu)$ 以及 l^p $(0<p<1)$ 就是这样的.

引理 2　若 X 是连续拟赋范空间, (Ω,Σ,μ) 是测度空间, 则 Bochner 可积函数空间 $L^p(\mu,X)$ $(0<p<\infty)$ 也是连续拟赋范空间.

证明　因为 $\|x\|^p$ 在 X 的单位球上连续, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得

$$|\|x\|^p-\|y\|^p|<\varepsilon^p,\quad \forall\|x\|\leqslant 1,\quad \|y\|\leqslant 1,\quad \|x-y\|\leqslant\delta.$$

设 K 为 X 的拟赋范常数, 取 $\eta>0$ 使得 $K(1+\delta^{-1})\eta<\varepsilon$, 则当

$$\|f\|_p\leqslant 1,\quad \|g\|_p\leqslant 1,\quad \|f-g\|_p\leqslant\eta$$

时, 记

$$A=\{\omega:\|f(\omega)-g(\omega)\|<\delta\|g(\omega)\|\leqslant\delta\|f(\omega)\|\},$$
$$B=\{\omega:\|f(\omega)-g(\omega)\|\geqslant\delta\|g(\omega)\|\}.$$

令 $f_1(\omega) = f(\omega)/\|f(\omega)\|, g_1(\omega) = g(\omega)/\|f(\omega)\|$, 则 $\|f_1(\omega)\| = 1, \|g_1(\omega)\| \leqslant 1, \|f_1(\omega)-g_1(\omega)\| \leqslant \delta$, 从而

$$\|f(\omega)\|^p - \|g(\omega)\|^p = \|f(\omega)\|^p(\|f_1(\omega)\|^p - \|g_1(\omega)\|^p) \leqslant \varepsilon^p\|f(\omega)\|^p.$$

若 $\omega \in B$, 则

$$\|f(\omega)\| \leqslant K(\|f(\omega) - g(\omega)\| + \|g(\omega)\|) \leqslant K(1 + \delta^{-1})\|f(\omega) - g(\omega)\|.$$

于是

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p - \|g\|_p^p &\leqslant \int_A \|f\|^p - \|g\|^p \mathrm{d}\mu + \int_A \|f\|^p \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \varepsilon^p \int_A \|f\|^p \mathrm{d}\mu + K^p(1+\delta^{-1})^p \int_B \|f-g\|^p \mathrm{d}\mu \leqslant 2\varepsilon^p.\end{aligned}$$

这说明 $\|\cdot\|_p$ 在 $L^p(\mu, X)$ 的单位球上是一致连续的.

称连续拟赋范空间 X 是局部 PL- 凸的, 若存在 $\delta = \delta(x,y) > 0$, 使得 $\forall r, 0 \leqslant r \leqslant \delta$,

$$\|x\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|x + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}y\|\mathrm{d}\theta, \quad \forall x, y \in X, \tag{3.5}$$

或者说拟范数 $\|\cdot\|$ 是重次调和的.

引理 3 设 X 是连续拟赋范空间, 则以下条件等价:

(i) X 是局部 PL- 凸的;

(ii) 存在 $0 < p < \infty$, 对于任何 $x, y \in X$, 有 $\delta = \delta(x,y) > 0$, 使得

$$\|x\| \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|x + ry\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\|^p \mathrm{d}\theta\right)^{1/p}, \quad \forall\, 0 < r < \delta; \tag{3.6}$$

(iii) $\log\|x\|$ 是 X 上的重次调和函数.

证明 (iii)⇒(i) 和 (i)⇒(ii) 是明显的. 一个基本的关于 (ii)⇒(iii) 的证明见文献 [6].

从定理中 (i) 与 (iii) 的等价性可以得出

推论 1 设 X 是连续拟赋范空间, $0 < p < \infty$, 则 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|^p$ 有相同的重次调和性.

对于连续拟赋范空间 X, 定义复凸模

$$H_p^X(\varepsilon) = \inf\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|x + y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\|^p \mathrm{d}\theta\right)^{1/p} - 1, \|x\| = 1, \|y\| = \varepsilon\right\}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$H_\infty^X(\varepsilon) = \inf\left\{\sup_{\theta\in[0,2\pi]} \|x + y\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\| - 1, \|x\| = 1, \|y\| = \varepsilon\right\}.$$

定义 2 称 X 是 PL 一致凸的, 若 $\forall\varepsilon>0,\ H_1^X(\varepsilon)>0$. 称 X 是 H_∞ 一致凸的, 若 $\forall\varepsilon>0,\ H_\infty^X(\varepsilon)>0$.

事实上, $H_p^X(\varepsilon)$ 对于不同的 p 是彼此等价的. Davis 等 [71,72] 证明了: 若 $0<p<\infty$, 则 $H_p^X(\varepsilon)\leqslant H_{2p}^X(\varepsilon)\leqslant H_p^X(\sqrt{e}\varepsilon)$. 明显地 H_∞ 一致凸等价于前面定义的复一致凸. 此外 Pavlovic 还证明了存在 $C>0$ 使得 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, $CH_\infty^X(C\varepsilon)\leqslant H_1^X(\varepsilon)\leqslant H_\infty^X(\varepsilon)$. 因此所有复凸模 $H_p^X(\varepsilon)(0<p\leqslant\infty)$ 在 0 点附近都是等价的 (见文献 [103]).

定义 3 设 $2\leqslant q<\infty$, 称 X 是 q-PL 一致凸的, 若存在 $C>0$ 使得 $H_p^X(\varepsilon)\geqslant C\varepsilon^q$, 或者等价地 $\forall x,y\in X$,

$$(\|x\|^q+C\|y\|^q)^{1/q}\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x+ye^{i\theta}\|^p d\theta\right)^{1/q}, \tag{3.7}$$

其中 C 的最大容许值称为 X 的 q-PL 一致凸常数, 记为 C_X.

定理 3 设 X 是 q-PL 一致凸的, $0<p\leqslant q$, 则 $L^p(\mu,X)$ 是 q-PL 一致凸的.

证明 设 $f,g\in L^p(\mu,X)$, 则应用 Jensen 不等式,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f+ge^{i\theta}\|_{L^p(\mu,X)}^p d\theta&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_\Omega\|f(\omega)+g(\omega)e^{i\theta}\|_X^p d\mu d\theta\\&\geqslant\int_\Omega(\|f(\omega)\|_X^q+C_X\|g(\omega)\|_X^q)^{p/q}d\mu\\&\geqslant\left[\left(\int_\Omega\|f(\omega)\|_X^p d\mu\right)^{q/p}+C_X\left(\int_\Omega\|g(w)_X^p\|d\mu\right)^{q/p}\right]^{p/q}\\&=[\|f\|_{L^p(\mu,X)}^q+C_X\|g\|_{L^p(\mu,X)}^q]^{p/q}.\end{aligned}$$

这说明 $C_{L^p(\mu,X)}\geqslant C_X$, 反过来容易知道 $C_{L^p(\mu,X)}\leqslant C_X$, 所以二者相等.

推论 2 若 $0<p\leqslant 2$, 则标量函数空间 $L^p(\mu)$ 是 2-PL 一致凸的. 若 $2\leqslant p<\infty$, 则 $L^p(\mu)$ 是 p-PL 一致凸的.

为了刻划 p-PL 一致凸性, 要用到解析鞅. 设 $F=(F_n)$ 是解析鞅, $F_0=x_0, F_n=x_0+\sum\limits_{k=1}^n\beta_k(\theta_1,\cdots,\theta_{k-1})e^{i\theta_k}$, 定义 F 的 q- 均方函数为

$$S^{(q)}(F)(\theta)=(\|x_0\|^q+\sum_{k=1}^\infty\|\beta_k(\theta_1,\cdots,\theta_{k-1})\|^q)^{1/q},\quad\theta\in\Omega.$$

由于要处理拟范数, 我们要审查一些原有的结果.

定理 4 设 X 是局部 PL- 凸连续拟 Banach 空间, $F=(F_n)$ 是 X 值解析鞅, $F^*(\theta)=\sup\limits_{n\geqslant 0}\|F_n(\theta)\|$ 是 F 的极大函数, $\|F\|_P=\sup\limits_{n\geqslant 0}\|F_n\|_p$, 则 $\forall\, 0<p<\infty, \exists\, c_p>0$ 使得

$$\|F^*\|_p\leqslant c_p\|F\|_p. \tag{3.8}$$

证明 由 PL- 凸性, $\forall\alpha>0, \|\cdot\|^\alpha$ 是重次调和的, 于是

$$\|F_{n-1}\|^\alpha\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|F_{n-1}+\beta_n(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}\|^\alpha\mathrm{d}\theta_n,\quad\forall n\geqslant 1,$$

因此 $(\|F_n\|^\alpha,n\geqslant 0)$ 是非负下鞅. 先取 $0<\alpha<p$, 再将 Doob 不等式用于指数 p/α 的情况即得到所要的结果.

定理 5 设 X 是局部 PL- 凸连续拟 Banach 空间, $2\leqslant q<\infty$, 则以下各条件当对于所有 X 值解析鞅 $F=(F_n)$ 成立时是等价的:

(i) $\{F^*<\infty\}\subset\{S^{(q)}(F)<\infty\}$ a.e.;

(ii) $\exists c>0$ 使得

$$\lambda^q P(S^{(q)}(F)>\lambda)\leqslant c\|F\|_q^q;\tag{3.9}$$

(iii) 对于任何 (或某个)$p, 0<p<\infty,\ \exists\, c_p>0$ 使得

$$\|S^{(q)}(F)\|_p\leqslant c_p\|F\|_p.\tag{3.10}$$

证明 (i)$\Rightarrow$(ii). 由定理 4 知道 $\|F\|_q<\infty$ 时 $F^*<\infty$ a.e., 从而由 (i), $S^{(q)}(F)<\infty$ a.e., 从而又说明 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ 使得任何解析鞅 F, 只要 $\|x\|_q<\delta, P(S^{(q)}(F)>\varepsilon)<\varepsilon$. 若不然, 设有 $\varepsilon_0>0$ 和 $F^{(j)}$, 使 $\|F_j\|_q^q<2^{-j}, P(S_{n_j}^{(q)}(F^{(j)})>\varepsilon_0)>\varepsilon_0$, 这里 $j=1,2,\cdots,\ n_j\uparrow\infty$. 不妨设 $x_0^{(j)}$ 都为 0, 即 $F_n^{(j)}=\sum\limits_{k=1}^n\beta_k^{(j)}(\theta_1,\cdots,\theta_{k-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$. 定义新的解析鞅 F,

$$\begin{aligned}F_{n_1+\cdots+n_j}(\theta)=&\sum_{k=1}^{n_1}\beta_k^{(1)}(\theta_1,\cdots,\theta_{k-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}\\&+\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2}\beta_{k-n_1}^{(2)}(\theta_{n_1+1},\cdots,\theta_{k-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}\\&+\cdots+\sum_{k=n_1+\cdots+n_{j-1}+1}^{n_1+\cdots+n_j}\beta_{k-n_1-\cdots-n_{j-1}}^{(j)}(\theta_{n_1+\cdots+n_{j-1}+1},\cdots,\theta_{k-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k},\end{aligned}$$

对于此鞅有

$$\|F\|_q^q=\sup_j\|F_{n_1+\cdots+n_j}\|_q^q\leqslant\sum_{j=1}^\infty\|F^{(j)}\|_q^q\leqslant\sum_{j=1}^\infty 2^{-j}=1.$$

令 $A_j=\left\{\theta:\sum\limits_{k=n_1+\cdots+n_{j-1}+1}^{n_1+\cdots+n_j}\|\beta_k\|^q>\varepsilon_0^q\right\}$. 由假设 $\sum\limits_{j=1}^\infty P(A_j)=\infty$, 根据 A_j 的独立性和 Borel-Cantelli 引理知道 $P(A_j;\text{i.o.})=1$, 从而 $S^{(q)}(F)=\infty$ a.e., 矛盾.

为得到 (3.9), 设 $\|F\|_q < \infty, k \geqslant 1, P(S_k^{(q)}(F) > 2) > 0$. 记其中的集合为 A, 记 $u = \chi_{A^c}$, 明显的 u 是 $\theta_1, \cdots, \theta_{k-1}$ 的函数. 定义 $\tilde{F} = (\tilde{F}_n)$:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{kn}(\theta) =& \sum_{j=1}^{k} \beta_j(\theta_1, \cdots, \theta_{j-1}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j} \\ &+ \sum_{j=k+1}^{2k} u(\theta_1, \cdots, \theta_{k-1}) \beta_{j-k}(\theta_{k+1}, \cdots, \theta_{j-1}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j} \\ &+ \cdots + \sum_{j=(n-1)k+1}^{kn} u(\theta_1, \cdots, \theta_{k-1}) \cdots u(\theta_{(n-2)(k-1)+1}, \cdots, \theta_{(n-1)(k-1)}) \\ &\qquad\qquad \times \beta_{j-(n-1)k}(\theta_{(n-1)k+1}, \cdots, \theta_{j-1}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}.\end{aligned}$$

$\tilde{F} = (\tilde{F}_n)$ 是解析鞅, 坐标的独立性说明

$$\begin{aligned}\|\tilde{F}_{kn}\|_q^q \leqslant& E(1 + u(\theta_1, \cdots, \theta_{k-1}) + \cdots \\ &+ u(\theta_1, \cdots, \theta_{k-1}) \cdots u(\theta_{(n-2)(k-1)+1}, \cdots, \theta_{(n-1)(k-1)})) \|F_k\|_q^q \\ \leqslant& (1 + Eu + \cdots + (Eu)^{n-1}) \|F_k\|_q^q \leqslant (1 - Eu)^{-1} \|F_k\|_q^q,\end{aligned}$$

即

$$P(A) \|\tilde{F}_{kn}\|_q^q \leqslant \|F_k\|_q^q. \tag{3.11}$$

$A_j = \{\theta : u(\theta_{(j-1)k+1}, \theta_{jk}) = 0\}$, 类似于上面的讨论可知 $P(A_j; \text{i.o.}) = 1$, 从而 $S^{(q)}(\tilde{F}) > 1$ a.e.. 此时存在 $c > 0$, 使得 $\|\tilde{F}\|_\rho \geqslant c'$. 代入 (3.11) 并以 $2\lambda^{-1}F$, 代替 F 即得到所要的结论.

(ii)⇒(iii). 记 β^* 为 $(\beta_n, n \geqslant 1)$ 的极大函数, 先建立关于 $S^{(q)}(F)$ 和 $F^* \vee \beta^*$ 的好 λ 不等式, 其方法与第 7 章使用过的类似.

设 $\alpha > 0$, $\eta^q > 1 + \alpha^q$, $\lambda > 0$, 定义

$$\begin{aligned}\mu &= \inf\{n : S_{n+1}^{(q)}(F) > \lambda\}, \\ \nu &= \inf\{n : S_{n+1}^{(q)}(F) > \eta\lambda\}, \\ \sigma &= \inf\{n : \|F_n\| \vee \|\beta_{n+1}\| > \alpha\lambda\}.\end{aligned}$$

三者均为停时, 令 $A_k = \{\mu < k \leqslant \nu \wedge \sigma\}, u_k = \chi_{A_k}$, 则 u_k 可料. 定义 F 的变换 $\tilde{F} = (\tilde{F}_n)$, 其中 $\mathrm{d}\tilde{F}_n = u_n \beta_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$, $\tilde{F}$ 是解析鞅.

注意在 $\{\nu = n, \sigma = \infty\}$ 上, $F^* \leqslant \alpha\lambda$, $\beta^* \leqslant \alpha\lambda$ 并且实际上,

$$\tilde{F}_{n+1} = \sum_{j=\mu+1}^{n+1} \beta_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}, \quad S_{n+1}^{(q)}(\tilde{F})^q > (\eta^q - \alpha^q - 1)\lambda^q.$$

所以

$$\{S^{(q)}(F) > \eta\lambda, F^* \vee \beta^* \leqslant \alpha\lambda\} \subset \{S^{(q)}(\tilde{F})^q > (\eta^q - \alpha^q - 1)\lambda^q\}.$$

当 $u_k = 1$ 时, 有 $\tilde{F}_k = F_{k-1} + dF_k - F_\mu$, 所以 $\left\|\tilde{F}_k\right\|^q \leqslant 3\alpha^q\lambda^q$, 从而

$$\|\tilde{F}\|_q^q \leqslant 3\alpha^q\lambda^q P, \quad \mu < \infty.$$

应用上面诸式和 (3.9) 得到

$$\begin{aligned}P(S^{(q)}(F) > \eta\lambda) =& P(S^{(q)}(F) > \eta\lambda, F^* \vee \beta^* \leqslant \alpha\lambda)\\ &+ P(F^* \vee \beta^* > \alpha\lambda)\\ \leqslant& P(S^{(q)}(\tilde{F})^q > (\eta^q - \alpha^q - 1)\lambda^q) + P(F^* \vee \beta^* > \alpha\lambda)\\ \leqslant& c(\eta^q - \alpha^q - 1)^{-p/q}\lambda^{-p}\|F\|_p^p + P(F^* \vee \beta^* > \alpha\lambda)\\ \leqslant& 3c\alpha^p(\eta^q - \alpha^q - 1)^{-p/q}P(S^{(q)}(F) > \lambda) + P(F^* \vee \beta^* > \alpha\lambda).\end{aligned}$$

当 α 足够小时, 对于 $\Phi(t) = t^p (0 < p < \infty)$, 即可得到

$$\|S^{(q)}(F)\|_p \leqslant c_p\|F^* \vee \beta^*\|_p \leqslant c_p(1 + 2K)\|F^*\|_p.$$

因为 $\|\beta_n\| \leqslant K(\|F_n\| + \|F_{n-1}\|)$, 故 $\beta^* \leqslant 2KF^*$.

(iii)⇒(i). 对于解析鞅 $F = (F_n)$ 和 $\lambda > 0$, 定义

$$\tau = \inf\{n : \|F_n\| \vee \|\beta_{n+1}\| > \lambda\},$$

由于 $\mathrm{d}F_{\tau\wedge n} = \chi_{\{\tau \geqslant n\}}\mathrm{d}F_n = \chi_{\{\tau \geqslant n\}}\beta_n(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$, 故 $(F_{\tau\wedge n})$ 仍是解析鞅并且 $\|F_{\tau\wedge n}\| \leqslant 2K\lambda$. 由 (iii), 在 $\{\tau = \infty\}$ 上 $S^{(q)}(F) < \infty$ a.e.. 由于 $\{F^* \leqslant \lambda/2K\} \subset \{\tau = \infty\}$ 以及 $F^* < \infty$ a.e., 故知 $S^{(q)}(F) < \infty$ a.e..

定理 6 设 X 是局部 PL- 凸连续拟 Banach 空间, $2 \leqslant q < \infty$, 则 X 有 q-PL 一致凸等价拟范数当且仅当定理 5 中任一条件成立.

证明 若 X 是 q-PL 一致凸的, $F = (F_n)$ 是解析鞅, 则由引理 3,

$$\begin{aligned}\|F_{n+1}\|_p^p =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|F_n + \beta_{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{n+1}}\|_{L^p([0,2\pi]^n, \Sigma_n, X)}^p \mathrm{d}\theta_{n+1}\\ \geqslant& \|F_n\|_{L^p([0,2\pi]^n, \Sigma_n, X)}^p + C_X\|\beta_{n+1}\|_{L^p([0,2\pi]^n, \Sigma_n, X)}^p,\end{aligned}$$

相加即得到 (3.10).

反过来, 设 (3.10) 对于每个解析鞅成立, $\forall x \in X$, 令

$$|||x|||^p = \inf\left\{\sup_n \|F_n\|_p^p - c^p\sum_{n=1}^{\infty}\|\beta_n\|_p^p\right\}, \tag{3.12}$$

其中下确界是关于每个满足 $F_0 = x, \sup\|F_n\|_p < \infty$ 的解析鞅 $F = (F_n)$ 而取的. 记此集合为 $\mathfrak{M}(x)$. 从 (3.10) 知, $|||x||| \geqslant c\|x\|$. 另一方面取解析鞅 $F_0 = x, \beta_n \equiv 0, n \geqslant 1$, 则知 $|||x||| \leqslant \|x\|$, $|||\cdot|||$ 的拟范性以及与 $\|\cdot\|$ 的等价性由此可知. 下面证明连续性.

注意此时 $L^p(\mu, X)$ 也是连续拟 Banach 空间. 由命题 1, $\forall\varepsilon$, $\exists\delta > 0$ 使得当 $f, g \in L^p(\mu, X)$, $\|f - g\|_p < \delta$ 时,

$$\left|\|f\|_p^p - \|g\|_p^p\right| < \varepsilon. \tag{3.13}$$

不妨设 $|||x||| \leqslant 1, |||y||| \leqslant 1, |||x - y||| \leqslant c\delta, 0 < \varepsilon < 1$. 此时存在解析鞅 $F = (F_n)$, 使得

$$\sup_n \|F_n\|_p^p - c^p \sum_{n=1}^{\infty} \|\beta_n\|_p^p \leqslant |||x|||^p + \varepsilon. \tag{3.14}$$

若令 $G_n = F_n + (y - x)$, 则 $G_0 = y, \mathrm{d}G_n = \mathrm{d}F_n$, 同时 $\|G_n - F_n\|_p = \|x - y\| \leqslant \delta$, 所以由 (3.13), $\sup\limits_n |\|F_n\|_p^p - \|G_n\|_p^p| \leqslant \varepsilon$ 并且有

$$|||y|||^p \leqslant \sup_n \|G_n\|_p^p - c^p \sum_{n=1}^{\infty} \|\beta_n\|_p^p \leqslant |||x|||^p + \varepsilon,$$

这得出连续性.

为证明 $(X, |||\cdot|||)$ 是 q-PL 一致凸的, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists m > 0$ 使得

$$\left||||x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}y|||^p - |||x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}j2\pi/m}y|||^p\right| < \varepsilon, \quad t \in \left[\frac{(j-1)2\pi}{m}, \quad \frac{j2\pi}{m}\right],$$

$j = 1, \cdots, m$. 对于每个 j, 取有限解析鞅 $F^{(j)} = (F_n^{(j)}) \in \mathfrak{M}(x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}j2\pi/m}y)$ 使得

$$\sup_n \|F_n^{(j)}\|_p^p - c^p \sum_{n=1}^{\infty} \|\beta_n^{(j)}\|_p^p \leqslant |||x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}j2\pi/m}y|||^p + \varepsilon. \tag{3.15}$$

现在构造新的解析鞅 $\tilde{F} = (\tilde{F}_n)$, 其中

$$\tilde{F}_0 = x, \tilde{F}_n(t, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}j2\pi/m})y + F_{n-1}^{(j)}(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}),$$
$$n \geqslant 1, t \in \left(\frac{(j-1)2\pi}{m}, \frac{j2\pi}{m}\right], j = 1, \cdots, m.$$

易知 $\tilde{F} = (\tilde{F}_n)$ 是解析鞅, $\tilde{F} \in \mathfrak{M}(x)$, 并且对于如上的 t,

$$\mathrm{d}\tilde{F}_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}y, \quad \mathrm{d}\tilde{F}_n(t, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) = \mathrm{d}\tilde{F}_{n-1}(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}), \quad n \geqslant 2.$$

于是由定义

$$\big\|\|x\|\big\|^p \leqslant \sup_n \|\tilde{F}_n\|_p^p - c^p \sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{\beta}_n\|_p^p,$$

但由局部 PL 凸性, 对于 $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\|\tilde{F}_n\|_p^p &= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi} \int_{(j-1)2\pi/m}^{j2\pi/m} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{[0,2\pi]^{n-1}} \|\mathrm{e}^{\mathrm{i}j2\pi/m} y + F_{n-1}^{(j)}\|^p \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_{n-1} \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{[0,2\pi]^{n-1}} \|F_{n-1}^{(j)}\|^p \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_{n-1} + \varepsilon.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{\beta}_n\|_p^p = \|y\|^p + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \|\beta_n^{(j)}\|_p^p.$$

于是由 (3.15),

$$\begin{aligned}\big\|\|x\|\big\|^p &\leqslant \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \big\|\|x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}j2\pi/m} y\|\big\|^p + 2\varepsilon - c\|y\|^p \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big\|\|x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} y\|\big\| \mathrm{d}\theta + 3\varepsilon - c\|y\|^p.\end{aligned}$$

由 $\big\|\|x\|\big\| \leqslant \|x\|$ 得出

$$\big\|\|x\|\big\|^p + \big\|\|y\|\big\|^p \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big\|\|x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} y\|\big\| \mathrm{d}\theta + 3\varepsilon,$$

ε 是任意的, 从而得出 q-PL 一致凸性. 定理证毕.

$L^p(\partial D, P, X)$ 中的解析三角多项式是形如 $p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{k=0}^{n} x_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$ 的函数, 这里 $x_k \in X, n \geqslant 1$. 以 $A_p(X)$ 表示由此类多项式生成的子空间.

定义 4 $\forall \varepsilon > 0$, 令

$$h_q^X(\varepsilon) = \inf\{\|f\|_q - 1 : \|\hat{f}(0)\| = 1, \|f - \hat{f}(0)\|_q \geqslant \varepsilon, f \in A_q(X)\},$$

称之为 X 的解析凸性模, 其中 $2 \leqslant q < \infty$, $\hat{f}(0)$ 是 f 的第 0 项 Fourier 系数. 称 X 是 q- 解析一致凸的, 若 $\exists c > 0$, 使得 $h_q^X(\varepsilon) \geqslant C\varepsilon^q$ $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1)$.

显然 q- 解析一致凸性蕴含着 q-PL 一致凸性.

定理 7 复拟 Banach 空间 X 是 q- 解析一致凸的当且仅当存在 $C_q > 0$ 使得

$$\|f\|_q^q - \|\hat{f}(0)\|^q \geqslant C_q \|f - \hat{f}(0)\|_q^q, \quad \forall f \in A_q(X). \tag{3.16}$$

证明 若 $h_q^X(\varepsilon) \geqslant C\varepsilon^q$ $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1), f \in A_q(X)$, $\|\hat{f}(0)\| = 1$, 则当 $\|f\|_q \leqslant 3$ 时, $\|f - \hat{f}(0)\|_q \leqslant 8\rho$. 令 $\varepsilon_0 = (8\rho)^{-1}\|f - \hat{f}(0)\|_q$, 则 $\varepsilon_0 \leqslant 1$. 由定义当 $\|f - \hat{f}(0)\|_q \geqslant \varepsilon_0$ 时,

$$\|f\|_q^q \geqslant \|f\|_q \geqslant 1 + C\varepsilon_0^q = \|\hat{f}(0)\|^q + (8\rho)^{-q}\|f - \hat{f}(0)\|_q^q.$$

当 $\|f\|_q > 3$ 时, 由 $\|\hat{f}(0)\| = 1$, $\|f - \hat{f}(0)\|_q \leqslant 2\rho(\|f\|_q + 1)$, 故

$$\|f\|_q \geqslant \|f\|_q/2 + 3/2 \geqslant \|f - \hat{f}(0)\|_q/4\rho + 1,$$

从而有 $C'_q > 0$, 使得

$$\|f\|_q^q - \|\hat{f}(0)\|^q \geqslant C'_q\|f - \hat{f}(0)\|_q^q, \quad \forall f \in A_q(X), \quad \|\hat{f}(0)\| = 1.$$

若 $\|\hat{f}(0)\| = 0$, 此式只要 $C'_q \leqslant 1$ 自然成立. 若 $\|\hat{f}(0)\| = a \neq 0$, 考虑 $a^{-1}f$, 由拟范数的齐性, 同样的式子成立. 最后取 $C = 1 \wedge C'_q$, 得到 (3.16).

反过来的证明是容易的.

定理 8 设 $2 \leqslant q < \infty$, 则复拟 Banach 空间 X 是 q- 解析一致凸的当且仅当存在 $\exists\, c_p > 0$, 使得每个 X 值 Hardy 鞅 $F = (F_n)$ 满足

$$\|F_0\|^q + C_q\sum_{n=1}^{\infty}\|\mathrm{d}F_n\|_q^q \leqslant \sup_n \|F_n\|_q^q. \tag{3.17}$$

证明 先设 X 是 q- 解析一致凸的, $F = (F_n)$ 是 X 值 Hardy 鞅. $\forall n$ 和固定的 $\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}$, 令

$$g(\theta_n) = F_n(\theta_1, \cdots, \theta_n) = F_{n-1}(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) + \sum_{j=1}^{\infty}\varphi_{nj}(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta_n},$$

则 $\hat{g}(0) = F_{n-1}$. 由 (3.16),

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|g(\theta_n)\|^q\mathrm{d}\theta_n - \|\hat{g}(0)\|^q \geqslant \frac{C_q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|g(\theta_n) - \hat{g}(0)\|^q\mathrm{d}\theta_n,$$

或

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|F_n(\theta_1, \cdots, \theta_n)\|^q\mathrm{d}\theta_n - \|F_{n-1}(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})\|^q \\ \geqslant &\frac{C_q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|\mathrm{d}F_n(\theta_1, \cdots, \theta_n)\|^q\mathrm{d}\theta_n.\end{aligned}$$

关于 $\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}$ 积分得到

$$\|F_n\|_q^q - \|F_{n-1}\|_q^q \geqslant C_q\,\|\mathrm{d}F_n\|_q^q,$$

两端关于 n 相加即得到 (3.17).

反过来, 由 (3.17), $\forall f \in A_q(X)$, 以 $f, \hat{f}(0)$ 代入即得到 (3.16).

引理 4 设 X 局部 PL 凸, $0 < p < \infty$, $F = (F_n)$ 是 X 值 Hardy 鞅, 则存在 $D_n = D_n(\theta_1, \cdots, \theta_n)$, 使得 $\|F_n\| \leqslant D_n$, $\|D_n^*\|_p \leqslant C_p \|F_{n+1}\|_p, \forall n \geqslant 1$.

证明 由定理 3, 局部 PL 凸性意味着 $\forall 0 < p < \infty$,

$$\|F_{n-1}\|^p \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|F_n\|^p \mathrm{d}\theta_n. \tag{3.18}$$

若 $p > 1$, 令 $D_{n-1} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \|F_n\| \mathrm{d}\theta_n$, 则

$$D_n^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|F_1\| \mathrm{d}\theta_1 \vee \cdots \vee \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|F_{n+1}\| \mathrm{d}\theta_{n+1},$$

实际上, $\left(\displaystyle\int_0^{2\pi} \|F_k\| \mathrm{d}\theta_k, k \leqslant n+1\right)$ 是实值下鞅, 应用 Doob 不等式即得到 $\|D_{n-1}^*\|_p \leqslant C_p \|F_n\|_p$. 若 $0 < p < 1$, 先取 $0 < p' < p$, (3.18) 对于 p' 成立, 然后关于 p/p' 应用 Doob 不等式得到所要的结论.

定理 9 设 X 是局部 PL 凸的复拟 Banach 空间, $2 \leqslant q < \infty$, 则以下各条件当对于所有 X 值解析鞅 $F = (F_n)$ 成立时是等价的:

(i) $\{F^* < \infty\} \subset \{S^{(q)}(F) < \infty\}$, a.e.;

(ii) $\exists c > 0$ 使得

$$\lambda P(S^{(q)}(F) > \lambda) \leqslant c\|F\|_1; \tag{3.19}$$

(iii) 对于任何 (或某个)$p, 0 < p < \infty$, $\exists\, c_p > 0$ 使得

$$\|S^{(q)}(F)\|_p \leqslant c_p \|F\|_p, \tag{3.20}$$

这里 $S^{(q)}(F) = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|dF_n\|^q\right)^{1/q}$;

(iv) 对于任何 (或某个)$p, 0 < p < \infty$, $\exists\, c_p > 0$ 使得对于 D 中定义的每个 X 值解析函数 f 和 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < 1$,

$$\left\|\left(\sum_{n=0}^{\infty} \|f(W_{\tau_n}) - f(W_{\tau_{n-1}})\|^q\right)^{1/q}\right\|_p \leqslant c_p \|f\|_{H^p(X)}. \tag{3.21}$$

这里 $(W_t, t \geqslant 0)$ 是从原点出发的 Brown 运动, $\tau_n = \inf\{t > 0 : |W_t| = r_n\}$ $(n \geqslant 1)$. $\|f\|_{H^p(X)}$ 是如 8.1 节所说的解析函数的 Hardy 范数.

证明 (i)⇔(ii)⇔(iii) 的证明与定理 5 类似. 只需注意在 (ii)⇒(iii) 的证明中, 定义的停时 μ, ν 不变, 而 $\sigma = \inf\{n : D_n^* > \alpha\lambda\}$, 其中 D_n^* 定义如引理 4. 在 (iii)⇒(i)

的证明中, 停时的定义是 $\tau = \inf\{n : D_n^* > \lambda\}$. 必要时还可以用形如 $\tilde{F} = (\tilde{F}_n)$ 的 Hardy 鞅逼近, 其中

$$\mathrm{d}\tilde{F}_n = \tilde{F}_n - \tilde{F}_{n-1} = \sum_{j=1}^{k_n} \varphi_{nj}(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta_n},$$

并且每个 φ_{nj} 是 $\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}$ 的 X 值系数三角多项式. 实际上此类鞅在 $L^p(P, X)$ 中是稠密的.

为证 (iv) 的等价性, 注意 $f(W_{\tau_n}) - f(W_{\tau_{n-1}})$ 是一个鞅差并且由 8.1 节的知识, (3.20) 成立时 X 必具有 ARNP, 所以 (3.21) 从 (3.20) 得到.

对于解析一致凸也有一个与定理 6 类似的结果.

定理 10 设 X 是局部 PL- 凸连续拟 Banach 空间, $2 \leqslant q < \infty$, 则 X 具有等价拟范数使之成为 q- 解析一致凸的, 当且仅当定理 9 中任一条件成立.

证明 设 $f(\theta) = \sum_{j=0}^{n} x_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}$ 是任一三角多项式, 令 $g(\theta) = f(\theta) - x_0$, 则 f, g 有与定理 6 中 x, y 类似的关系. 施行与定理 6 类似的程序可以得到所要的结论.

8.4 解析 UMD 空间的特征

定义 1 称复 Banach 空间 X 是解析 UMD 空间 (AUMD 空间): 如果存在 $C > 0$, 使得对于任何 $\varepsilon_n = \pm 1$, 任何 X 值解析鞅 $F = (F_n)$, F 关于 $\varepsilon_n = \pm 1$ 的变换 $G = (G_n)$, $G_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \mathrm{d}F_k$ 满足

$$\|G_n\|_1 \leqslant C \|F_n\|_1, \quad \forall n \geqslant 1. \tag{4.1}$$

摆在我们面前的有一系列问题: UMD 空间与 AUMD 空间有何不同? AUMD 空间与 PL 一致凸空间和具有 ARN 性质的空间有何关系? 定义中的解析鞅能否换为 Hardy 鞅? AUMD 空间有何特征性质? 让我们依次来叙述有关的结论.

定理 1 设 X 是复空间, 下面条件当对于所有解析鞅 $F = (F_n)$ 及其变换 $G = (G_n)$ 成立时是等价的:

(i) $\exists C > 0$ 使得

$$\lambda P(G^* > \lambda) \leqslant C \|F\|_1, \quad \forall \lambda > 0; \tag{4.2}$$

(ii) 对于任何 (或某个)$0 < p < \infty, \exists C_p > 0$ 使得

$$\|G_n\|_p \leqslant C_p \|F_n\|_p, \quad \forall n \geqslant 1. \tag{4.3}$$

证明 (ii)⇒(i). 只需应用 Doob 不等式. 为证 (i)⇒(ii), $\forall n\geqslant 1$, 先设

$$D_{n-1}(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|F_n(\theta_1,\cdots,\theta_n)\|\mathrm{d}\theta_n,$$

则 $(D_n,n\geqslant 1)$ 是适应 R.V. 序列, 由 8.3 节引理 4 的证明知道: $\forall 0<p<\infty$,

$$\|F_n\|\leqslant D_n,\quad \|D_n^*\|_p\leqslant C_p\|F_{n+1}\|_p,\quad n\geqslant 1. \tag{4.4}$$

现在设 $\alpha>0,\eta>1+\alpha,\lambda>0$, 定义

$$\mu=\inf\{n:\|G_n\|>\lambda\},\quad \nu=\inf\{n:\|G_n\|>\eta\lambda\},\quad \sigma=\inf\{n:\|D_n\|>\alpha\lambda\}.$$

记 $A_k=\{\mu<k\leqslant\nu\wedge\sigma\}$, $u_k=\chi_{A_k}$, u_k 是可料的. 令

$$\tilde{F}_n=\sum_{k=1}^n u_k\mathrm{d}F_k,\quad \tilde{F}=(\tilde{F}_n),$$

注意 $\mathrm{d}\tilde{F}=u_k\mathrm{d}F_k=u_k(\theta_1,\cdots,\theta_{k-1})\beta(\theta_1,\cdots,\theta_{k-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$, 所以 $\tilde{F}$ 仍是解析鞅. 设 $u_n(\theta)=1$, 不妨设 $k_0<n$, $u_{k_0+1}(\theta)=1,u_{k_0}(\theta)=0$, 则 $\tilde{F}_n=F_n-F_{k_0}$, 从而在 A_n 上应用 (4.4) 得到

$$\begin{aligned}\int_{A_n}\|\tilde{F}_n\|\mathrm{d}P&\leqslant\int_{A_n}\|F_n\|\mathrm{d}P+\int_{A_n}\|F_{k_0}\|\mathrm{d}P\\&\leqslant\int_{A_n}D_n\mathrm{d}P+\int_{A_n}\|F_{k_0}\|\mathrm{d}P\leqslant 2\alpha\lambda P(A_n).\end{aligned}$$

于是 $E\|\tilde{F}_n\|\leqslant 2\alpha\lambda P(\mu<\infty)$. 若 $\tilde{G}=(\tilde{G}_n)$ 是 $\tilde{F}=(\tilde{F}_n)$ 关于同样的 $\varepsilon_n=\pm1$ 的变换, 在 $\{\nu=n,\sigma=\infty\}$ 上, $F^*\leqslant D^*\leqslant\alpha\lambda$,

$$\|\tilde{G}_n\|=\|G_n-G_{k_0}\|\geqslant\|G_n\|-\|G_{k_0}\|\geqslant\eta\lambda-\alpha\lambda>\lambda,$$

所以当 (4.2) 成立时,

$$\begin{aligned}P(G^*>\eta\lambda,D^*&\leqslant\alpha\lambda)\leqslant P(\tilde{G}^*>\lambda)\\&\leqslant C\lambda^{-1}\|\tilde{F}\|_1\leqslant 2\alpha CP(\mu<\infty)=2\alpha CP(G^*>\lambda),\end{aligned}\tag{4.5}$$

此即关于 (G^*,D^*) 的好 λ 不等式. (4.3) 的成立只是 7.1 节引理 4 的结论. 定理证毕.

定理 1 说明 AUMD 空间定义中的 (1.1) 式可以换为对于某个 (或任意)$0<p<\infty$,(4.3) 式成立.

定理 2 若 X 是 AUMD 空间, 则

(i) X 不存在与 c_0 同构的子空间;

(ii) 存在 $2\leqslant q<\infty$, X 是 q 余型的;

(iii) X 与某个 q-PL 一致凸空间等距同构 $(2\leqslant q<\infty)$;

(iv) X 具有解析 RN 性质.

证明 1° 对于足够大的 N, 令 $S=R^N$, 对于每个 $s=(r_1,\cdots,r_N)\in S$, 定义

$$\tau_s(\theta)=\inf\{k:\left|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta_k}r_k-1\right|>2\sin\frac{\pi}{2N}\},\quad \inf\varnothing=N,$$

τ_s 是 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta_k}r_k$ 首次不在区间 $(\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/N},\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/N})$ 中的停时. 定义解析鞅 $F^{(s)}=(F_n^{(s)})$,

$$F_n^{(s)}(\theta)=\sum_{k=1}^{n\wedge\tau_s}(-1)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k},$$

它可以看成一个 c_0 值解析鞅. 注意

$$|F_n^{(s)}(\theta)|\leqslant 2+2N\sin\frac{\pi}{2N}\leqslant 6.$$

另一方面, 作关于 $\varepsilon_n=(-1)^n$ 的变换, 则 $G_n^{(s)}(\theta)=\sum\limits_{k=1}^{n\wedge\tau_s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$. 对于每个 θ, 存在 s 使得 $\tau_s=N$, 对于它,

$$\left|G_n^{(s)}(\theta)\right|\geqslant N\Big(1-2\sin\frac{\pi}{2N}\Big),$$

$G_n^{(s)}$ 不是 L^1 有界的, 故 c_0 不具有 AUMD 性质.

2° 明显地, AUMD 是一种超性质, Maurey 与 Pisier 证明了此时存在 $2\leqslant q<\infty$ 使得 X 是 q 余型的.

3° 由 q 余型定义, $\exists L>0$ 使得若 $\zeta_1,\cdots,\zeta_n$ 是在 ∂D 上彼此独立且一致分布的 R.V., $x_1,\cdots,x_n\in X$, 则

$$\sum_{k=1}^n\|x_k\|^q\leqslant LE\left\|\sum_{k=1}^n\zeta_kx_k\right\|^q. \tag{4.6}$$

若 $F=(F_n)$ 是 X 值解析鞅, 则

$$\begin{aligned}E\Big(\sum_{k=1}^n\|\beta_k\|^q\Big)&\leqslant KE\left\|\sum_{k=1}^n\zeta_k\beta_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}\right\|^q\\&\leqslant KC_q^qE\left\|\sum_{k=1}^n\beta_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}\right\|^q\leqslant KC_q^q\left\|F_n\right\|_q^q.\end{aligned}$$

此式对于每个解析鞅成立, 由 8.3 节定理 6, X 必同构于 q-PL 一致凸空间.

4° 设 $F=(F_n)$ 是 X 值 L^1 有界解析鞅, (ε_n) 是定义在概率空间 Ω' 上的 R 序列, 由 AUMD 性质,

$$E_\theta\left\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(\omega)\mathrm{d}F_k(\theta)\right\|\leqslant L,\quad n\geqslant 1,\quad \omega\in\Omega',$$

从而

$$E_\omega E_\theta\left\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(\omega)\mathrm{d}F_k(\theta)\right\|\leqslant L,\quad n\geqslant 1.$$

由 Fubini 定理, 则对于几乎所有 θ,

$$E_\omega\left\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\mathrm{d}F_k(\theta)\right\|<\infty,\quad n\geqslant 1, \tag{4.7}$$

因为 c_0 不等距同构于 X 的任何子空间, 由 2.2 节定理 7, $\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k\mathrm{d}F_k(\theta)$ ω-a.e. 收敛. 再由 Fubini 定理, 对于几乎所有 ω, $\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k\mathrm{d}F_k(\theta)$ θ-a.e. 收敛. 由此导致 $\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{d}F_k(\theta)=\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k^2\mathrm{d}F_k(\theta)$ θ-a.e. 收敛, 所以 X 具有 ARN 性质.

定理 3 若 $1\leqslant p<\infty$, 则 X 是 AUMD 空间当且仅当 $L^p(\mu,X)$ 也是 AUMD 空间.

证明 只需从 X 是 AUMD 空间导出 $L^p(\mu,X)$ 也是. 实际上设 $F=(F_n)$ 是 X 值解析鞅, $\mathrm{d}F_n=\beta_n(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$, 不失一般性, 假定每个 β_n 是 $L^p(\mu,X)$ 值简单函数. 记 $\beta_n(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})=\beta_n(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})(\omega)$, 在每一点 ω, β_n 都是 X 值函数, 由于 X 是 AUMD 空间, 故

$$E_\theta\Big\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\beta_k(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}\Big\|_X^p\leqslant C_pE_\theta\Big\|\sum_{k=1}^{n}\beta_k(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}\Big\|_X^p.$$

两端关于 μ 积分再利用 Fubini 定理得到

$$E_\theta\left\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\beta_k(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}\right\|_{L^p(\mu,X)}^p\leqslant C_pE_\theta\left\|\sum_{k=1}^{n}\beta_k(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}\right\|_{L^p(\mu,X)}^p,$$

此即 (4.3). 所以 $L^p(\mu,X)$ 具有 AUMD 性质.

由定理 3 可知, 复空间 $L^1[0,1]$ 具有 AUMD 性质. 但是 $L^1[0,1]$ 不具有 UMD 性质, 因为它连 RN 性质都不具有. 由于解析鞅只是一种特殊类型的鞅, 所以 UMD

性质蕴含 AUMD 性质. 这说明 (若在复空间范围内来考虑), UMD 空间类是 AUMD 空间类的真子类. 此外如果将 (1.1) 中的解析鞅换为 Hardy 鞅我们得到 Hardy 鞅变换. 如果在空间 X 中取值的每个 Hardy 鞅及其关于 $\varepsilon_n = \pm 1$ 的每个变换都满足 (1.1), 称 X 具有 HUMD 性质. 注意对于 Hardy 鞅, 定理 1 的结论仍然成立, 并且其证明与解析鞅的情况类似. 另一方面容易知道, HUMD 性质蕴涵 AUMD 性质. 有趣的是反过来的关系也是成立的. 这一结论是 Xu 证明的, 所用的方法与 8.1 节定理 9, 10 的逼近方法类似.

记 X 值 Hardy 鞅及其经过 $\varepsilon_n = \pm 1$ 序列的变换全体为 HM, 记解析鞅经过 $\varepsilon_n = \pm 1$ 序列的变换全体为 AM.

定理 4　设 X 是复 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) X 是 AUMD 空间;

(ii) $\exists C > 0$ 使得 $\forall (F, G) \in$HM ,

$$\lambda P(G^* > \lambda) \leqslant C \|F\|_1, \quad \forall \lambda > 0; \tag{4.8}$$

(iii) 对于任何 (或某个) $0 < p < \infty$, $\exists C_p > 0$ 使得 $\forall (F, G) \in$HM,

$$\|G_n\|_p \leqslant C_p \|F_n\|_p, \quad \forall n \geqslant 1; \tag{4.9}$$

(iv) $\forall (F, G) \in$HM, 若 $\|F\|_1 < \infty$, 则 G_n a.e. 收敛;

(v) $\forall (F, G) \in$HM, 在条件 $\sup\limits_n \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} k^{-1} \mathrm{d}F_k \right\|_1 < \infty$ 之下, G_n 满足强大数定律. 即以 X 中范数, $n^{-1} G_n \to 0$, a.e..

定理中的 Hardy 鞅换为解析鞅, (iv) 中的 a.e. 收敛换为以测度收敛, (v) 中的强大数定律换为弱大数定律结论仍成立.

证明　(i)⇔(ii)⇔(iii) 的等价性已在上面说明. 由于 AUMD 空间具有 ARN 性质, 所以 (iii)⇒(iv) 是明显的.

为证 (iv)⇒(v), 考虑鞅 $\tilde{F} = (\tilde{F}_n)$, 其中 $\tilde{F}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^{-1} \mathrm{d}F_k$ 并且 $\sup\limits_n \|\tilde{F}_n\|_1 < \infty$. 在关于同样的 $\varepsilon_n = \pm 1$ 变换下有 $\tilde{G} = (\tilde{G}_n)$, 其中 $\tilde{G}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^{-1} \mathrm{d}G_k$, 则 $(\tilde{F}, \tilde{G}) \in$HM. 由 (iv), $\tilde{G}_n$ a.e. 收敛. 由 Kronecker 引理知道 G_n 满足强大数定律.

剩下证明 (v)⇒(i), 只需假定所有解析鞅满足 (v) 中条件时, 弱大数定律成立, 我们证明此时解析鞅满足 (4.1).

由 (v), $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $\forall (F, G) \in$HM,

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} k^{-1} \mathrm{d}F_k \right\|_1 < \delta \text{ 时}, \quad \sup_n P(n^{-1} \|G_n\| > \varepsilon) < \varepsilon. \tag{4.10}$$

现在若 $(F,G)\in$HM, 不妨设 $F_0=0$, $\|F\|_1<\delta$. 定义 $F^{(k,m)}=(F_n^{(k,m)})$:

$$\mathrm{d}F_n^{(k,m)}=\begin{cases}0, & n\leqslant m, \text{ 或 } n>m+k,\\ (m+j)\beta_j(\theta_m,\cdots,\theta_{m+j-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{m+j}}, & n=m+j,\quad 1\leqslant j\leqslant k.\end{cases}$$

容易算出 $\sup_n\left\|\sum_{j=1}^n j^{-1}\mathrm{d}F_j^{(m,k)}\right\|_1=\sup_n\|F_n\|_1<\delta$. 由 (4.10), $F^{(k,m)}$ 的变换满足

$$\sup_k P\left((m+k)^{-1}\left\|\sum_{j=1}^k(m+k)\mathrm{d}G_j\right\|>\varepsilon\right)<\varepsilon.$$

令 $m\to\infty$, 得到 $\sup_k P(\|G_k\|>\varepsilon)<\varepsilon$. 若对于 $\lambda>0$, 定义

$$\tau=\inf\{n:\|G_n\|+\|\mathrm{d}G_{n+1}\|>\lambda\}.$$

考虑停止鞅 $F^{(\tau)}=(F_{\tau\wedge n})$ 及其变换 $G^{(\tau)}=(G_{\tau\wedge n})$, 显然 $\left\|F^{(\tau)}\right\|_1<\delta$, 于是 $\sup_k P(\|G_{\tau\wedge k}\|>\varepsilon)<\varepsilon$. 令 $n\to\infty$, 得到

$$\begin{aligned}P(G^*>\varepsilon)&=P(\tau<\infty)=\lim_{n\to\infty}P(\tau\leqslant n)\\&=\lim_{n\to\infty}P(\|G_{\tau\wedge n}\|>\varepsilon)\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $G^*<\infty$ a.e.. 同时 $\|F\|_1<\infty$ 时, $G^*<\infty$ a.e..

仿照 8.3 节定理 5 (i)⇒(ii) 的证明, 不过将其中的 $S^{(q)}(F)$ 换为 $\|G_n\|$, 即得到不等式 (4.2), 从而得到 X 具有解析 UMD.

在 AUMD 空间的定义中要求每个解析鞅或 Hardy 鞅关于序列 $\varepsilon_n=\pm1$ 的变换是 L^p 有界的. 实际上像 UMD 空间的情况一样, 可以考虑解析鞅或者 Hardy 鞅关于 (Σ_n) 可料序列 (v_n), $v^*\leqslant1$ 的变换

$$G_n=\sum_{k=0}^n v_k\mathrm{d}F_k,\quad n\geqslant1,$$

利用逐步逼近的方法 (见 8.1 节定理 3) 可以证明, 两种方式定义的 AUMD 性质是等价的, 并且本节定理 5 中有关的结果换为用 (v_n), $v^*\leqslant1$ 所作的变换依然成立.

下面来考虑 AUMD 空间的二元函数特征.

定义 2 称函数 $\xi:X\times X\to[-\infty,\infty)$ 是斜重次调和的, 若 $\forall x,y,u\in X$, 两函数 $\xi(x+zu,y\pm zu)$ 关于 z 是复平面上的次调和函数.

例如对于 $0<p<\infty$, 函数 $\|x+y\|^p$, $\log\|x+y\|$ 都是斜重次调和的.

引理 1 设 X 是某个赋范空间, 函数 $\Psi: X \to [-\infty, \infty)$ 是上半连续并且有上界的函数, 则存在 (一致) 连续函数序列 $\Psi_k: X \to [-\infty, \infty)$, 使得 $\Psi_1 \leqslant \sup_{x\in X} \Psi(x)$, $\Psi_{k+1} \leqslant \Psi_k$ 并且 $\lim_{k\to\infty} \Psi_k = \Psi$.

证明 令

$$\Psi_k(x) = \sup_{y\in X}\{\Psi(y) - k\|x-y\|\}, \quad \forall x \in X, \quad k \geqslant 1, \tag{4.11}$$

像标量情况的证明一样可知 Ψ_k 满足所说的条件.

我们记满足 $F_0 = 0$ 的简单解析鞅及其经过 $\varepsilon_n = \pm 1$ 的变换全体为 AM_0.

定理 5 设 X 是复 Banach 空间, $\Phi: X \times X \to [-\infty, \infty)$ 是上半连续的在有界集上有上界的函数, 则

$$\Psi(x, y) = \inf\{E\Phi(x + F_\infty, y + G_\infty) : (F_n, G_n) \in AM_0\} \tag{4.12}$$

是不大于 $\Phi(x, y)$ 的最大斜重次调和函数.

证明 我们证明 $\Psi(x + zu, y + zu)$ 是次调和的, 关于另一函数的证明与此类似.

由于 Ψ 是一些函数的下确界, 为了 Ψ 下半连续, 实际上只需证明 $\forall (F_n, G_n) \in AM_0$, $E\Phi(x + F_\infty, y + G_\infty)$ 关于 (x, y) 是下半连续的, 而这正是我们对于 $\Phi(x, y)$ 的假设. 另外若取 $(F_n, G_n) \equiv (0, 0)$, 则 $(F_n, G_n) \in AM_0$, 由此得到 $\Psi(x, y) \leqslant \Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ 是有上界的.

为证 $\Psi(x + zu, y + zu)$ 是次调和的, 即证 $\forall x, y, u \in X$,

$$\Psi(x + au, y + au) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(x + (a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})u, y + (a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})u)\mathrm{d}t.$$

为简化起见, 只需证明 $a = 0, r = 1$ 的情况.

$\forall \varepsilon > 0$, 对于每个 $\theta \in [0, 2\pi]$, 由 (4.10), 存在 $(F_n^{(\theta)}, G_n^{(\theta)}) \in AM_0$ 使得

$$E\Phi(x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}u + F_\infty^{(\theta)}, y + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}u + G_\infty^{(\theta)}) < \Psi(x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}u, y + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}u) + \varepsilon. \tag{4.13}$$

根据引理, 存在连续函数 $\Psi_k \geqslant \Psi$, 从而

$$E\Phi(x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}u + F_\infty^{(\theta)}, y + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}u + G_\infty^{(\theta)}) < \Psi_k(x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}u, y + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}u) + \varepsilon. \tag{4.14}$$

由 Φ 的上半连续性, 此时存在区间 $I^{(\theta)} \subset [0, 2\pi]$, 使得 $\theta \in I^{(\theta)}$ 并且

$$E\Phi(x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}u + F_\infty^{(\theta)}, y + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}u + G_\infty^{(\theta)}) < \Psi_k(x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}u, y + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}u) + \varepsilon, \quad \forall t \in I^{(\theta)}.$$

由 $[0,2\pi]$ 的紧性, 存在有限多个区间 $I_j^{(\theta)}(1\leqslant j\leqslant J)$, 不妨设 $I_j^{(\theta)}=[t_{j-1},t_j)$, $0=t_0<t_1<\cdots<t_J<2\pi$, $\theta_j\in I_j^{(\theta)}$ 及 $(F_n^{(\theta_j)},G_n^{(\theta_j)})\in AM_0$, 使得

$$E\Phi(x+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}u+F_\infty^{(\theta_j)},y+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}u+G_\infty^{(\theta_j)})<\Psi_k(x+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}u,y+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}u)+\varepsilon,\quad \forall t\in I^{(\theta_j)}. \tag{4.15}$$

定义 $(\tilde F_n,\tilde G_n)$ 如下:

$$\tilde F_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}u+F_n^{(\theta_j)},\quad \tilde G_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}u+G_n^{(\theta_j)},\quad t\in I_j^{(\theta)},j=1,\cdots,J,$$

则 $(\tilde F_n,\tilde G_n)\in AM_0$, 其中的变元是 $(t,\theta_1,\theta_2,\cdots)$. 于是根据定义和 (4.13), (4.14),

$$\begin{aligned}\Psi(x,y)&\leqslant E\Psi(x+\tilde F_\infty,y+\tilde G_\infty)\\&=\sum_{j=1}^J E\Psi(x+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}u+F_\infty^{(\theta_j)},y+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}u+G_\infty^{(\theta_j)})\frac{\Delta t_j}{2\pi}+\varepsilon\\&<\sum_{j=1}^J\Psi_k(x+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}u,y+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}u)\frac{\Delta t_j}{2\pi}+2\varepsilon\\&<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_k(x+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}u,y+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}u)\mathrm{d}t+3\varepsilon.\end{aligned}$$

只要分划 $[t_{j-1},t_j)$ 足够细, 最后的不等式是可以做到的. ε 任意, 由此得到

$$\Psi(x,y)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_k(x+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}u,y+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}u)\mathrm{d}t. \tag{4.16}$$

令 $k\to\infty$, 即得到所要的结论.

现在证明 Ψ 的最大性. 设 $\tilde\Psi$ 斜双重次调和并且 $\tilde\Psi(x,y)\leqslant\Phi(x,y)$, 若 $(F_n,G_n)\in AM_0$, 则

$$\begin{aligned}E\Phi(x+F_n,y+G_n)&\geqslant E\tilde\Psi(x+F_n,y+G_n)\\&=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\tilde\Psi(x+F_{n-1}+\beta_n(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n},\\&\qquad y+G_{n-1}\pm\beta_n(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n})\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_n\\&\geqslant E\tilde\Psi(x+F_{n-1},y+G_{n-1})\geqslant\cdots\geqslant E\tilde\Psi(x,y)=\tilde\Psi(x,y),\end{aligned}$$

关于 $(F_n,G_n)\in AM_0$ 取下确界得到 $\Psi(x,y)\geqslant\tilde\Psi(x,y)$. 定理证毕.

定理 6 复 Banach 空间 X 具有 AUMD 性质当且仅当存在斜重次调和函数 $\xi:X\times X\to[-\infty,\infty)$ 满足:

(i) $\xi(0,0)>0$;

(ii) $\xi(x,0) \geqslant \xi(0,0), \xi(0,y) \geqslant \xi(0,0), \forall x,y \in X$;

(iii) $\xi(x,y) \leqslant \xi(0,0) + \|y\|, \forall x,y \in X$;

(iv) 在 $\{(x,y) : \|x\| + \|y\| \geqslant 1\}$ 上, $\xi(x,y) \leqslant \|y\|$.

证明　充分性. 设 X 具有 AUMD 性质, 则 $\exists c > 0$ 使得对任何解析鞅 $F = (F_n)$, $\varepsilon_n = \pm 1$, 以及 $F = (F_n)$ 关于 $\varepsilon_n = \pm 1$ 的变换 $G = (G_n)$,

$$\|F_n\|_1 \leqslant c \|G_n\|_1, \quad n \geqslant 1.$$

设 $\Phi(x,y) = c\|y\| - \|x\|$, 则 Φ 是连续的在有界集上有界的函数. 设 $\Psi(x,y)$ 是定理 7 中确定的斜重次调和函数, 注意 $x \pm G_n$ 是 $x + F_n$ 的变换, 于是

$$\begin{aligned}\Psi(x,\pm x) &= \inf\{E\Phi(x+F_n, x \pm G_n) : (F_n, G_n) \in AM_0\} \\ &= \inf\{cE\|x \pm G_n\| - E\|x+F_n\| : (F_n,G_n) \in AM_0\} \geqslant 0.\end{aligned}$$

另一方面, $\Psi(0,0) \leqslant \Phi(0,0) = 0$, 所以 $\Psi(0,0) = 0$.

令 $\xi(x,y) = (c+1)^{-1}[1 + \Psi(x,y)]$, 则 ξ 仍是斜重次调和的. 容易知道 $\xi(0,0) = (1+c)^{-1} > 0, \xi(x,\pm x) = (c+1)^{-1}[1+\Psi(x,\pm x)] \geqslant (c+1)^{-1} = \xi(0,0)$. 此外 $\forall x,y \in X$,

$$\xi(x,y) \leqslant (c+1)^{-1}[1 + c\|y\| - \|x\|] \leqslant \xi(0,0) + \|y\|,$$

若 $\|x\|+\|y\| \geqslant 1$, 则 $\xi(x,y) \leqslant (c+1)^{-1}[1+c\|y\|-\|x\|] \leqslant \|y\|$. 即 ξ 满足条件 (i)~(iv).

必要性. 若函数 ξ 存在并且满足条件 (i)~(iv), 我们证明以 $c = \xi(0,0)^{-1}$ 为系数, 解析鞅不等式 $\|G_n\|_1 \leqslant c\|F_n\|_1$, $n \geqslant 1$ 成立, 从而 X 具有 AUMD 性质.

首先对于解析鞅 $F = (F_n)$ 及其变换 $G = (G_n)$, 注意 $G_0 = \pm F_0 = \pm x$, 由 (iii) 和 (iv),

$$\xi(F_n, G_n) \leqslant \xi(0,0) + \|G_n\|. \tag{4.17}$$

当 $\|F_n\| + \|G_n\| \geqslant 1$ 时,

$$\xi(F_n, G_n) \leqslant \|G_n\|. \tag{4.18}$$

由斜重次调和性,

$$\begin{aligned}E\xi(F_n,G_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} &\xi(F_{n-1} + \beta_n(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}, \\ &G_{n-1} \pm \beta_n(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n})\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_n \\ \geqslant E\xi(F_{n-1}, G_{n-1}) \geqslant \cdots &\geqslant \xi(x,\pm x) \geqslant \xi(0,0).\end{aligned}$$

由此并且应用 (4.17) 得到

$$
\begin{aligned}
P(\|F_n\| \geqslant 1) &\leqslant P(\|F_n\| + \|G_n\| \geqslant 1) \\
&\leqslant P(\xi(F_n, G_n) \leqslant \|G_n\|\ ) \\
&= P(\|G_n\| - \xi(F_n, G_n) + \xi(0,0) \geqslant \xi(0,0)) \\
&\leqslant \xi(0,0)^{-1} E[\|G_n\| - \xi(F_n, G_n) + \xi(0,0)] \\
&\leqslant \xi(0,0)^{-1} E\,\|G_n\|\,.
\end{aligned}
$$

$F = (F_n)$ 是任意的, 以 $\lambda^{-1}F$ 代替 F 得到

$$
\lambda P(\|F_n\| \geqslant \lambda) \leqslant \xi(0,0)^{-1} E\,\|G_n\|\,. \tag{4.19}
$$

根据定理 1, 5 的结论, X 必是 AUMD 空间. 定理证毕.

实际上用稍微细致的方法可以证明 X 具有 AUMD 性质当且仅当存在双重次调和函数 $\xi : X \times X \to [-\infty, \infty)$ 满足 $\xi(0,0) > 0; \|x - y\| > 1$ 时, $\xi(x,y) \leqslant \|x + y\|$ (见文献 [155]). 所谓 ξ 双重次调和, 即 $\xi(x,\cdot)$ 与 $\xi(\cdot,y)$ 都是重次调和函数.

此外, Blower[24] 还应用满足 Hormander-Mikhlin 条件的乘子在 $H^1(\partial D, X)$ 上的有界性刻画了 X 的 AUMD 性质, 这里不拟叙述.

第 8 章评注:

复空间与实空间是否有相同的几何性质? 在 Banach 空间几何理论发展的早期人们对此似乎是浑然不觉的. 大家往往只是把复空间当作实空间去处理. 但 20 世纪 80 年代初, Bukhvalov 与 Danilevich 在研究单位圆中定义的向量值解析函数与调和函数径向极限的存在性时发现二者所要求的条件是不同的, 从而发现了复空间与实空间在几何性质上的差异. 几乎同时, Edgar 在研究复空间值鞅的收敛性时也提出了 "是否存在复 RN 性质" 的疑问. 本章着重于三个方面, 即解析 RN 性质、复凸性、解析 UMD 性质叙述有关的结果.

8.1 节定理 1, 2, 3 和推论 1 都属于文献 [46]. 定理 4 属于 Dowling[83]. 引理 2 和定理 5 见文献 [20]. 推论 3 在标量值情况就是 Riesz 兄弟在 1927 年证明的定理. 关于解析测度的表现定理 (定理 7) 属于文献 [21], 关于解析算子的表现定理 (定理 8) 属于文献 [82]. 文献 [92] 用解析鞅的收敛性, 文献 [98] 用 Hardy 鞅的收敛性分别刻画了 ARN 性质. 文献 [37]~[39] 给出了空间不具有 ARN 性质时圆内解析函数的特性, 同样地给出了 ARN 性质的刻画.

8.2 节定理 1, 2 来自文献 [100]~[102]. 另见文献 [40]、[41].

8.3 节定理 1, 2 见文献 [103]、[201]. 关于 PL 凸性及其刻画见文献 [72], 其中讨论的复杂的 R.V. 序列出现于解析鞅与 Hardy 鞅之前. 关于若干凸性模的等价性还见文献 [71], 定理 4, 5, 6 来自文献 [154]、[159], 那里更讨论了 Φ 不等式, 另见文献 [159]. 解析凸与解析凸性模的定义及其刻画, 重赋范定理 (定理 7,8) 都属于文献 [214]、[215]. 定理 9 见文献 [15]、[16]. 文献 [205] 还应用复对称鞅给出过 PL 凸性的刻画. 文献 [32] 也讨论了复凸性.

8.4 节定理 1 来自文献 [15]、[98]. 定理 2 见文献 [72] 等. 定理 4 也见文献 [15]. 定理 5, 6 来自文献 [174].

附录 独立性与条件独立性

本书中多次用到集合族的独立性概念. 独立性是概率论中的一个基本概念, 这里对几个问题给予集中的叙述, 主要是独立性和条件独立性, Borel-Cantelli 引理, 条件期望在独立或条件独立情况的有关结论, 构造函数族的独立 Copy 的方法等.

定义 1 设 (Ω, Σ, P) 是完备概率空间,

(i) 对于 $A, B \in \Sigma$, 称 A, B 两集合 (或事件) 独立, 若

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{1}$$

(ii) 若 Σ_1, Σ_2 是 Σ 的子 σ 代数, 称 Σ_1, Σ_2 独立, 若任何 $A_1 \in \Sigma_1$ 与任何 $A_2 \in \Sigma_2$ 独立.

(iii) 若 $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)$ 是定义在 (Ω, Σ, P) 上的 (标量值或向量值) 可测函数, 称 ξ_1, ξ_2 独立, 若 $\sigma(\xi_1), \sigma(\xi_2)$ 独立, 这里 $\sigma(\xi_1), \sigma(\xi_2)$ 是分别由 ξ_1, ξ_2 生成的 σ 代数, 即使得 ξ_1, ξ_2 可测的最小 σ 代数.

(iv) 称集合族 $(A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$(或 σ 代数族 $(\Sigma_\lambda, \lambda \in \Lambda)$, 可测函数族 $(\xi_\lambda, \lambda \in \Lambda)$) 两两独立, 若其中任意两个集合族 (或两个 σ 代数, 两个函数) 独立.

(v) 称集合 $A_1, \cdots, A_n \in \Sigma$ 相互独立, 若

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{m} P(A_{i_k}), \tag{2}$$

其中 $i_k \in \{1, \cdots, n\}$, $i_k \neq i_s$, $m = 2, \cdots, n$.

称 σ 代数 $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$ 相互独立, 若对于任何 $A_i \in \Sigma_i, A_1, \cdots, A_n$ 相互独立. 称 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 相互独立, 若 $\sigma(\xi_1), \cdots, \sigma(\xi_n)$ 相互独立.

(vi) 称集合族 $(A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ (或 σ 代数族 $(\Sigma_\lambda, \lambda \in \Lambda)$, 函数族 $(\xi_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ 相互独立, 若其中任意有限多个集合 (或 σ 代数, 函数) 族相互独立.

定理 1 设 (Ω, Σ, P) 是概率空间,

(1) 若 $\pi_1 = \{A_i^{(1)}, i \in I\}, \pi_2 = \{A_i^{(2)}, i \in J\}$ 是 Σ 的两个子集族, π_1, π_2 关于有限交封闭 (称之为 π 类集族), π_1, π_2 独立, 则 $\sigma(\pi_1), \sigma(\pi_2)$ 独立;

(2) 将 (1) 推广到任意多个子集族和相互独立的情况结论仍成立.

特别地, 若每个 $\{B_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是任意的集合类的族, B_λ 是关于有限交封闭的集族 (π 类), $\{B_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 相互独立, $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \Lambda$ 并且 $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$, 则

$$F_1 = \sigma(B_\lambda, \lambda \in \Lambda_1), \quad F_2 = \sigma(B_\lambda, \lambda \in \Lambda_2)$$

独立.

证明 1° 设 $F = \{B \in \sigma(\pi_2) : P(A \cap B) = P(A)P(B), \forall A \in \pi_1\}$. 由假设 $\pi_2 \subset F$, 从而 $\sigma(\pi_2) \subset \sigma(F)$. 我们证明 $\sigma(F) = F$, 即 F 本身是 σ 代数, 从而由 F 的定义得到 $F = \sigma(\pi_2)$.

再设 $H = \{A \in \sigma(\pi_1) : P(A \cap B) = P(A)P(B), \forall B \in \sigma(\pi_1)\}$, 同样的证明得到 $H = \sigma(\pi_1)$. 由 F, H 的定义得到 $\sigma(\pi_1), \sigma(\pi_2)$ 独立.

现在证明 F 是 σ 代数. 易知 $\Omega, \varnothing \in F$, 若 $B \in F$, 则 $B^c \in \Omega \backslash B$,

$$\begin{aligned} P(B^c \cap A) &= P((\Omega \cap A) \backslash (B \cap A)) \\ &= P(A) - P(B \cap A) \\ &= P(A) - P(B)P(A) \\ &= P(B^c)P(A), \end{aligned}$$

故 $B^c \in F$. 若 $B_1, B_2 \in F, B_1 \cap B_2 = \varnothing$, 则

$$\begin{aligned} P((B_1 \cup B_2) \cap A) &= P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) \\ &= P(B_1)P(A) + P(B_2)P(A) \\ &= P(B_1 \cup B_2)P(A), \end{aligned}$$

故 $B_1 \cup B_2 \in F$, 这对于有限并也是真的.

现在设 $B_n \in F, B_n \subset B_{n+1}$, 则

$$\begin{aligned} P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cap A\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A)\right) = \lim_{n \to \infty} P(B_n \cap A) \\ &= \lim_{n \to \infty} P(B_n)P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) P(A), \end{aligned}$$

这说明 $\lim\limits_{n \to \infty} B_n \in F$, 得证.

2° 推广到有限多个的情况是明显的. 对于任意多个的情况注意到其相互独立性是建立在任意有限多个相互独立的基础上的, 故结论仍然成立.

定理 2 假定 X, Y 是 Banach 空间.

(i) 设 $\xi_i : \Omega \to X$ 是独立 R.V., $f_i : X \to Y$ 是 Borel 函数 $(i = 1, 2)$, 则 $f_i(\xi_i)$ $(i = 1, 2)$ 是独立 R.V.;

(ii) 设 $\xi_i : \Omega \to X (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是相互独立 R.V., $f_1 : X^k \to Y, f_2 : X^{n-k} \to Y$ 是 Borel 可测函数, 则 $f_1(\xi_1, \cdots, \xi_k)$, $f_2(\xi_{k+1}, \cdots, \xi_n)$ 是独立 R.V., 其中 X^k, X^{n-k} 是乘积空间.

证明 由于 $f_i^{-1}(F) \subset H$, $(f_i \circ \xi_i)^{-1}(F) = \xi_i^{-1}(f_i^{-1}(F)) \subset \xi_i^{-1}(H)$, 其中 H, F 分别是 X, Y 中的 Borel σ 代数, $\xi_1^{-1}(H)$ 与 $\xi_2^{-1}(H)$ 的独立性导致所要的结论.

对于 (ii) 也一样, 二者都是定理 1 的推论.

由定理 2 可以知道, 若 ξ_1, ξ_2 是取值于 Banach 空间 X 的 R.V., 并且两者独立, 则 $\|\xi_1\|$, $\|\xi_2\|$; $\|\xi_1\|^p$, $\|\xi_2\|^p$ $(1 < p < \infty)$; $x^*(\xi_1)$, $x^*(\xi_2)$ $(\forall x^* \in X^*)$都独立. 若 $(\xi_n, n \geqslant 1)$ 相互独立, 则每个 ξ_n 与 $\sum\limits_{i \neq n} \alpha_i \xi_i$ 独立.

定理 3 设 $\xi : \Omega \to R, \eta : \Omega \to X$ 分别是定义在概率空间 (Ω, Σ, P) 上的实函数和向量值函数, 若 ξ, η 独立并且 $\xi, \eta, \xi\eta$ 可积, 则

$$E\xi\eta = E\xi E\eta. \tag{3}$$

证明 先证必要性. 对于 ξ,η 都是实值并且都是简单函数的情况, 例如:

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i},\quad \bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega,\quad A_i\cap A_k=\varnothing,\quad i\neq k,$$
$$\eta=\sum_{j=1}^{m}b_i\chi_{B_i},\quad \bigcup_{j=1}^{m}B_i=\Omega,\quad B_j\cap B_l=\varnothing,\quad j\neq l,$$

这里 $a_i,b_j\in R$. 容易得到

$$\begin{aligned}E\xi\eta&=E\sum_{i,j}a_ib_j\chi_{A_i\cap B_j}=\sum_{i,j}a_ib_jP(A_i\cap B_j)\\&=\sum_{i,j}a_ib_jP(A_i)P(B_j)=\Big(\sum_i a_iP(A_i)\Big)\Big(\sum_j b_jP(B_j)\Big)\\&=E\xi E\eta.\end{aligned}$$

上述有限和也可推广到无穷和, 即定理得结论对取可数值的函数是成立的.

在 $\xi,\eta,\xi\eta$ 都是可积的一般情况下, 取实数族 $a_i^{(n)}(-\infty<i<\infty,\ 1\leqslant n<\infty)$ 满足 $a_i^{(n)}\leqslant a_{i+1}^{(n)}$, $\lim\limits_{i\to-\infty}a_i^{(n)}=-\infty$, $\lim\limits_{i\to+\infty}a_i^{(n)}=+\infty$ 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_i(a_{i+1}^{(n)}-a_i^{(n)})=0$. 记

$$A_i^{(n)}=\{\omega:a_i^{(n)}\leqslant\xi<a_{i+1}^{(n)}\},\quad \xi_n=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_i^{(n)}\chi_{A_i^{(n)}},$$
$$B_i^{(n)}=\{\omega:a_i^{(n)}\leqslant\eta<a_{i+1}^{(n)}\},\quad \eta_n=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j^{(n)}\chi_{B_j^{(n)}}.$$

由 ξ,η 独立知道 $A_i^{(n)},B_j^{(n)}$ 相互独立, 因此 ξ_n,η_n 独立. 由上面的论证,

$$E\xi_n\eta_n=E\xi_nE\eta_n,$$

令 $n\to\infty$, 即得出 $E\xi\eta=E\xi E\eta$.

对于 ξ 为实值 R.V., η 为向量值 R.V. 的情况, 只需考虑 ξ 与 $x^*\eta$ 两个 R.V., 这里 $x^*\in X^*$ 是 X 上的连续线性泛函. 由定理 2 及其后面的说明, ξ 与 $x^*\eta$ 独立, 于是

$$x^*E\xi\eta=E\xi x^*\eta=E\xi Ex^*\eta=E\xi x^*(E\eta)=x^*E\xi E\eta,$$

x^* 是任意的, 得出 $E\xi\eta=E\xi E\eta$.

定理 4 设 ξ 是概率空间 (Ω,Σ,P) 上的 R.V., $B\subset\Sigma$ 是子 σ 代数. 若 ξ 可积并且 ξ 与 B 是独立的 (即 $\sigma(\xi)$ 与 B 独立), 则

$$E(\xi|B)=E\xi. \tag{4}$$

证明 注意 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ 当且仅当 $E\chi_A\chi_B=E\chi_AE\chi_B$. 现在对于任何 $A\in B$, 由条件期望定义和独立性,

$$\int_A E(\xi|B)\mathrm{d}P=\int_A\xi\mathrm{d}P=E\xi\chi_A=\int_A E\xi\mathrm{d}P.$$

为了更明确, 也可先对简单函数应用此式, 然后转到一般情况. 总之 (4) 成立.

在下面定理中记 $A_n\text{i.o.} = \limsup\limits_n A_n = \bigcap\limits_{n\geqslant 1}\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k$, 称之为有无穷多个 A_n 出现的事件 (集合).

定理 5(Borel-Cantelli 引理) 设 (Ω, Σ, P) 是概率空间.

(i) 若 $A_n \in \Sigma, \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, 则 $P(A_n; \text{i.o.}) = 0$;

(ii) 若 A_n 两两独立并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, 则 $P(A_n; \text{i.o.}) = 1$.

证明 易知对于任何 n $A_n\text{i.o.} \subset \bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k$, 于是

$$P(A_n; \text{i.o.}) \leqslant P\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) \leqslant \sum_{k\geqslant n} P(A_k) \to 0, \quad n\to\infty,$$

得到 (i).

为了得到 (ii), 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. $\forall m \geqslant n$, 由独立性

$$\begin{aligned} 1 - P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) &= P\left(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\right) = P(A_n^c)\cdots P(A_m^c) \\ &= (1-P(A_n))\cdots(1-P(A_m)) \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\sum\limits_{k=n}^{m} P(A_k)} \quad (\text{由于 } 1+x\leqslant \mathrm{e}^x, x\geqslant -1). \end{aligned}$$

另一方面, 对于每个固定的 n, $\sum\limits_{i=n}^{\infty} P(A_i) = \infty$. 从而由上式推出

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) = 1,$$

于是

$$P(A_n; \text{i.o.}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1.$$

对于 R.V. 序列 $(\xi_n, n\geqslant 1)$, 称 $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \sigma(\xi_k, k\geqslant n)$ 是 $(\xi_n, n\geqslant 1)$ 的尾 σ 代数.

定理 6(Kolmogorov 0-1 率) 若 $(\xi_n, n\geqslant 1)$ 是相互独立的 R.V. 序列, B 是相应的尾 σ 代数, 则对于每个 $A\in B$, 或者 $P(A)=0$ 或者 $P(A)=1$.

证明 由于 ξ_n 相互独立, 因此由定理 1, 对于每个 $n, \sigma(\xi_n)$ 与 $\sigma(\xi_k, k\geqslant n+1)$ 是相互独立的. 但 $B\subset \sigma(\xi_k, k\geqslant n+1)$, 所以 $\sigma(\xi_n)$ 与 B 独立. 同样由定理 1, B 与 $\sigma(\sigma(\xi_n), n\geqslant 1) = \sigma(\xi_n, n\geqslant 1)$ 独立. 但 $B\subset \sigma(\xi_n, n\geqslant 1)$, 所以对于每个 $A\in B, A$ 与 A 独立, 即

$$P(A) = P(A\cap A) = P(A)^2,$$

故 $P(A)=0$ 或 1.

定义 2　设 (Ω,Σ,P) 是概率空间, B,Σ_1,Σ_2 是 Σ 的子 σ 代数, 称 Σ_1,Σ_2 关于 B 是条件独立的, 若对于任何 $A_1\in\Sigma_1,\Sigma_2\in B_2$,

$$E(\chi_{A_1}\chi_{A_2}|B)=E(\chi_{A_1}|B)E(\chi_{A_2}|B),\text{ a.e..}\tag{5}$$

称 (Ω,Σ,P) 上的 R.V. ξ_1,ξ_2 关于 σ 代数 B 条件独立, 若 $\sigma(\xi_1),\sigma(\xi_2)$ 关于 B 条件独立.

命题 1　(1) 若 ξ,η 可积, η 为实值或向量值函数并且 ξ,η 关于 σ 代数 B 条件独立, 则

$$E(\xi\eta|B)=E(\xi|B)E(\eta|B);\tag{6}$$

(2) 设 Σ_1,Σ_2 是 σ 代数, Σ_1,Σ_2 独立, B 是 Σ_1(或 Σ_2) 的子 σ 代数, 则 Σ_1,Σ_2 关于 B 条件独立.

证明　1° (6) 的证明可以归结为 ξ,η 为简单函数的情况. 设

$$\xi=\sum_i a_i\chi_{A_i},\eta=\sum_j x_j\chi_{A'_j},$$

其中 $a_i\in R,x_j\in X$, $A_i\in\sigma(\xi)$, $A'_j\in\sigma(\eta)$, 此时

$$\begin{aligned}E(\xi\eta|B)&=E\Big(\sum_{i,j}a_ix_j\chi_{A_i}\chi_{A'_j}|B\Big)\\&=\sum_{i,j}a_ix_jE(\chi_{A_i}\chi_{A'_j}|B)\\&=\sum_{i,j}a_ix_jE(\chi_{A_i}|B)E(\chi_{A'_j}|B)\\&=\Big(\sum_i a_iE(\chi_{A_i}|B)\Big)\Big(\sum_j a_jE(\chi_{A'_j}|B)\Big)\\&=E(\xi|B)E(\eta|B).\end{aligned}$$

2° 对于任何 $A_1\in\Sigma_1,A_2\in\Sigma_2$, 不妨设 $B\subset\Sigma_1$, 则对于任何 $e\in B,e\cap A_1\in\Sigma_1$, 故 $e\cap A_1$ 与 A_2 独立, 从而

$$\begin{aligned}\int_e E(\chi_{A_1}\chi_{A_2}|B)\mathrm{d}P&=\int_e\chi_{A_1}\chi_{A_2}\mathrm{d}P=E\chi_{A_1\cap e}\chi_{A_2}\\&=E\chi_{A_1\cap e}E\chi_{A_2}=P(A_2)\int_e\chi_{A_1}\mathrm{d}P\\&=P(A_2)\int_e E(\chi_{A_1}|B)\mathrm{d}P\\&=\int_e P(A_2)E(\chi_{A_1}|B)\mathrm{d}P\\&=\int_e E(\chi_{A_2}|B)E(\chi_{A_1}|B)\mathrm{d}P.\end{aligned}$$

最后一步是因为 $A_2\in\Sigma_2$, 则 A_2 与 B 独立, 从而

$$E(\chi_{A_2}|B)=E\chi_A=P(A_2).$$

定理 7 设 (Ω, Σ, P) 是概率空间, B, Σ_1, Σ_2 是 Σ 的子 σ 代数, 则以下条件等价:

(i) Σ_1, Σ_2 关于 B 条件独立;

(ii) 对于任何 Σ_1 可测的可积函数 ξ,

$$E(\xi|B \vee \Sigma_2) = E(\xi|B); \tag{7}$$

(iii) 对于任何 Σ_2 可测的可积函数 ξ,

$$E(\xi|B \vee \Sigma_1) = E(\xi|B). \tag{8}$$

证明 只须证明 (i) 与 (ii) 等价.

(i) $\Rightarrow$(ii). 只须对于 Σ_1 可测的简单函数证明之, 由条件期望算子的线性, 这又归结为对于任何 $A_1 \in \Sigma_1$,

$$E(\chi_{A_1}|B \vee \Sigma_2) = E(\chi_{A_1}|B). \tag{9}$$

为证此式, 考虑 $\forall e \in B$, 注意此时对于 $\forall A_2 \in \Sigma_2, e \cap A_2 \in B \vee \Sigma_2$, 并且 $B \vee \Sigma_2$ 中元素都可写成此种形式. 又

$$\begin{aligned}\int_{e\cap A_2} E(\chi_{A_1}|B \vee \Sigma_2)\mathrm{d}P &= \int_{e\cap A_2} \chi_{A_1}\mathrm{d}P = \int_e \chi_{A_1\cap A_2}\mathrm{d}P \\ &= \int_e E(\chi_{A_1\cap A_2}|B)\mathrm{d}P \\ &= \int_e E(\chi_{A_1}|B)E(\chi_{A_2}|B)\mathrm{d}P \quad (\text{由条件独立性}) \\ &= \int_e E(\chi_{A_2}E(\chi_{A_1}|B)|B)\mathrm{d}P \\ &= \int_e \chi_{A_2}E(\chi_{A_1}|B)\mathrm{d}P = \int_{e\cap A_2} E(\chi_{A_1}|B)\mathrm{d}P,\end{aligned}$$

于是 (9) 成立.

(ii)$\Rightarrow$(i). 对于任何 $A_1 \in \Sigma_1, A_2 \in \Sigma_2, \chi_{A_2}$ 关于 $B \vee \Sigma_2$ 可测, 由 (9),

$$\begin{aligned}E(\chi_{A_1}\chi_{A_2}|B) &= E(E(\chi_{A_1}\chi_{A_2}|B \vee \Sigma_2)|B) \\ &= E(\chi_{A_2}E(\chi_{A_1}|B \vee \Sigma_2)|B) \\ &= E(\chi_{A_2}E(\chi_{A_1}|B)|B) \\ &= E(\chi_{A_1}|B)E(\chi_{A_2}|B),\end{aligned}$$

(5) 成立. 故 Σ_1, Σ_2 关于 B 条件独立.

定理 8 设 $f_k = (f_{kn}, n \geqslant 0)$ 是一列实值或向量值鞅 $(f_{k0} = 0)$. f_k 与递增子 σ 代数序列 $(B_{kn}, n \geqslant 0)$ 适应, $\mathrm{d}f_k = (\mathrm{d}f_{kn}, n \geqslant 0)$ 是相应的鞅差 $(B_{k_0} = \{\varnothing, \Omega\})$. 若 $B_{k\infty} = \bigvee_{n=1}^{\infty} B_{kn}$ $(k \geqslant 1)$ 是相互独立的 σ 代数族, n_k 是单调递增自然数序列, 则序列 $\mathrm{d}\tilde{f} =$

$(\mathrm{d}f_{11},\cdots,\mathrm{d}f_{1n_1},\mathrm{d}f_{21},\cdots,\mathrm{d}f_{2n_2},\mathrm{d}f_{31},\cdots)$ 是适应于下列 σ 代数序列 $(B_k,k\geqslant 0)$ 的鞅差序列.

$$\begin{aligned}&B_0=B_{10},B_1=B_{11},\cdots,B_{n_1-1}=B_{1n_1-1},\\&B_{n_1}=B_{1n_1}\vee B_{20},\cdots,B_{n_1+n_2-1}=B_{1n_1}\vee B_{2n_2-1},\\&B_{n_1+n_2}=B_{1n_1}\vee B_{2n_2}\vee B_{30},\cdots.\end{aligned}$$

证明　只须证明对于任何自然数 $k,j,1\leqslant j\leqslant n_k-1$,

$$E(\mathrm{d}f_{kj}|B_{1n_1}\vee\cdots\vee B_{k-1n_{k-1}}\vee B_{kj-1})=0.$$

注意 $\mathrm{d}f_{kj}$ 是关于 B_{kj} 可测的, $B_{kj}\subset B_{k\infty}$, 由定理条件 B_{kj} 与 $B_{k\infty}(i\neq k)$ 独立, 从而 $\mathrm{d}f_{kj}$ 与 $B_{1n_1}\vee\cdots\vee B_{k-1n_{k-1}}$ 独立. 又 $B_{kj-1}\subset B_{k\infty}$, 由命题 1(2), $B_{k\infty}$ 与 $B_{1n_1}\vee\cdots\vee B_{k-1n_{k-1}}$ 关于 B_{kj-1} 条件独立. 现在 $\mathrm{d}f_{kj}$ 是关于 $B_{k\infty}$ 可测的函数, 故由定理 7 (ii),

$$E(\mathrm{d}f_{kj}|B_{1n_1}\vee\cdots\vee B_{k-1n_{k-1}}\vee B_{kj-1})=E(\mathrm{d}f_{kj}|B_{kj-1})=0,\ \text{a.e..}$$

定理结论成立.

最后我们来阐述随机变量的独立 copy 与鞅的独立 copy 的构造方法.

对于两个随机变量 $\xi,\eta:\Omega\to X$, 其中 X 是 Banach 空间, 称一个是另一个的 copy, 若对于 X 中的任何 Borel 集 B,

$$P(\omega:\xi(\omega)\in B)=P(\omega:\eta(\omega)\in B).$$

换句话说二者有相同的分布. 对于随机变量序列 $(\xi_n,n\geqslant 1)$ 和 $(\eta_n,n\geqslant 1)$, 设 $\xi_n:\Omega_n\to X$, $\eta_n:\Omega_n\to X$ 在概率空间 (Ω_n,Σ_n,P_n) 上定义, 考虑乘积概率空间 $(\tilde{\Omega},\tilde{\Sigma},\tilde{P})$, 其中 $\tilde{\Omega}=\prod\limits_{i=1}^{\infty}\Omega_i,\tilde{\Sigma}=\prod\limits_{i=1}^{\infty}\Sigma_i,\tilde{P}=\prod\limits_{i=1}^{\infty}P_i$ 分别表示相应的笛卡儿乘积, 此时 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots)$ 为 $\tilde{\Omega}$ 中的元, 对于乘积空间 X^∞ 中的任何 "柱形" Borel 集 $B=B_1\times B_2\times\cdots\times B_n\times X\times\cdots$, 若

$$\tilde{P}(\omega:(\xi_n(\omega_n),n\geqslant 1)\in B)=\tilde{P}(\omega:(\eta_n(\omega_n),n\geqslant 1)\in B),$$

则称 $(\xi_n,n\geqslant 1)$ 是 $(\eta_n,n\geqslant 1)$ 的 copy.

对于实值 R.V. $\xi_1,\cdots,\xi_n$, 用下述方法作 R.V. $\tilde{\xi}_1,\cdots,\tilde{\xi}_n$, 可使 $\tilde{\xi}_1,\cdots,\tilde{\xi}_n$ 相互独立并且 $\tilde{\xi}_i$ 与 ξ_i 同分布 $(1\leqslant i\leqslant n)$. 实际上, 令 $(\tilde{\Omega},\tilde{\Sigma},\tilde{P})$ 是与上面类似的 n 个概率空间的笛卡儿乘积, 对于 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in\tilde{\Omega}$. 令

$$\tilde{\xi}_i(\omega)=\xi_i(\omega_i),\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

若 $a\in R$, 则

$$\{\omega:\tilde{\xi}_i(\omega)<a\}=\Omega_1\times\cdots,\Omega_{i-1}\times\{\omega_i:\xi_i(\omega_i)<a\}\times\Omega_{i+1}\times\cdots\times\Omega_n,$$

所以

$$\tilde{P}(\omega:\tilde{\xi}_i(\omega)<a)=P_i(\omega_i:\xi_i(\omega_i)<a)=P(\xi_i<a),$$

所以 $\tilde{\xi}_i$ 与 ξ_i 同分布 $(1 \leqslant i \leqslant n)$. 另一方面, 由 Fubini 定理,

$$\tilde{P}(\tilde{\xi}_1 < a_1, \cdots, \tilde{\xi}_n < a_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i < a_i) = \prod_{i=1}^{n} \tilde{P}(\tilde{\xi}_i < a_i),$$

所以 $\tilde{\xi}_1, \cdots, \tilde{\xi}_n$ 是相互独立的.

若 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是同一个随机变量 ξ, 则上述方法给了 n 个彼此独立且同分布的随机变量. 完全类似的方法可以构造出一个独立同分布的 R.V. 序列.

对于向量值 R.V. ξ, 类似的方法同样适用.

现在考虑一个鞅 $f = (f_n)$, 它与递增 σ 代数序列 $(B_n, n \geqslant 0)$ 适应. 对于每个 n, 用上述方法作出独立同分布的 R.V. 序列 f_{kn}, 记 $f_k = (f_{kn})$, 相应的 σ 代数列为 $(B_{kn}, n \geqslant 0)$. 容易知道 f_k 都是与 f 同分布的. 其次 f_k 仍是鞅,

$$E(\mathrm{d}f_{kn}|B_{n-1}) = E(\mathrm{d}f_n|B_{n-1}) = 0, \text{a.e.}.$$

另外, 采用乘积 σ 代数, 则 B_{kn} 与 B_{ln} 相互独立. 由定理 1, $B_{k\infty} = \bigvee_{n=1}^{\infty} B_{kn}$ 与 $B_{l\infty} = \bigvee_{n=1}^{\infty} B_{ln}$ $(k \neq l)$ 独立, 甚至 $\{B_{k\infty}, k \geqslant 1\}$ 相互独立. 特别地, $f_k = (f_{kn})(k \geqslant 1)$ 是相互独立的鞅, f_k 是 f 的独立同分布 copy.

参 考 文 献

[1] de Acosta A. Strong exponential integrability of sums of independent B-valued random vectors. Probab Math Statistics, 1980, 1: 133~150

[2] de Acosta A. Inequalities for B-valued random vectors with applications to the law of large numbers. Ann Probab, 1981, 9: 157~161

[3] de Acosta A, Kuelbs J. Some results on the cluster set C($\{S_n/a_n\}$) and the LIL. Ann Probab, 1983, 11: 102~122

[4] de Acosta A, Kuelbs J, Ledoux M. A inequality for the law of the iterated logarithm. 1982, LNM 990: 1~27

[5] Aldous D J. Unconditional bases and martingales in $L_p(F)$. Math Proc Camb Phil. Soc, 1979, 85: 117~123

[6] Alexandlov A B. Essays on non-locally convex Hardy spaces. LNM 864, 1981, 1~89

[7] Alon N, Milman V D. Embedding of l_∞^k in finite dimentional Banach spaces. Israel J Math, 1983, 45: 265~280

[8] Asplund E. Averaged norms. Israel J Math, 1967, 5: 227~233

[9] Asplund E. Frechet differantiablity of convex functions. Acta Math, 1968, 121: 31~47

[10] Assouad P. Martingales et rearrangement dans les uniforment lisses. Sem Maurey-Schwartzs, 1974~1975

[11] Austin D G, Edgar G A, Lonescu T A. Pointwise convergence in terms of expectations. Z Fur Wahr, 1974, 30: 17~26

[12] Beauzamy B. Introduction to Banach Spaces and their Geometry. North-Holland Amsterdam, 1985

[13] Beauzamy B. Espaces d'Intepolation reels. Topologie et Geometrie. 1978, LNM 666

[14] Beck A. A convexity condition in Banach spaces and the strong law of large numbers. Proc Amer Math Soc, 1962, 13: 329~334

[15] Bekjan T N, Liu P D. Φ-inequalities and laws of large numbers of Hardy martingale transforms. Acta Math Scientia, 1997, 17: 343~351

[16] Bekjan T N, Liu P D. Some characterizations of complex Banach space having AUMD property. Acta Anal Funct Appl, 2001, 3: 202~207

[17] Bellow A. Unoform amarts: a class of asymptotic martingales for which strong almost sure convergence obtains. Z Wahr Verw Gebiete, 1978, 41: 177~191

[18] Benedek A, Calderon A P, Panzone R. Convolution operators on Banach space valued functions. Proc Nat Acad Sci, 1962, 48: 356~365

[19] Bessaga C, Pelczynski A. On extreme points in separable conjugate spaces. Israel J

Math, 1966, 4: 262~264

[20] Blasco O. Hardy spaces of vector-valued functions: duality. Trans Amer Math Soc, 1988, 308: 495~507

[21] Blasco O. Boundary values of functions in vector-valued Hardy spaces and geometry on Banach spaces. J Func Anal, 1988, 78: 346~364

[22] Blasco O. A note on vector-valued Hardy and Paley inequaliyies. Proc Amer Math Soc, 1992, 115: 787~790

[23] Blasco O, Pelczynski A. Theorems of Hardy and Peley for vector-valued analytic functions and related classes of Banach spaces. Trans Amer Math Soc, 1991, 323: 335~367

[24] Blower G. A multiplier characterization of analytic UMD spaces. Studia Math, 1990, 96: 117~124

[25] Bochner S, Taylor A E. Linear functionals on certain spaces of obstractly- valued function. Ann Math, 1938, 39: 913~948

[26] Bourgain J. Strongly exposed points in weakly compact convex sets in Banach spaces. Proc Amer Math Soc, 1976, 58: 197~200

[27] Bourgain J. On dentability and the Bishop-Phelps property. Israel J Math, 1977, 28: 265~271

[28] Bourgain J. Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional. Ark Mat, 1983, 21: 163~168

[29] Bourgain J. Extension of a result of Benedek, Calderon and Panzone. Ark Mat, 1984, 22: 91~95

[30] Bourgain J. Vector-valued singular integrals and the H^1-BMO duality. Probability Theory and Harmonic Analysis. New York, 1986, 1~19

[31] Bourgain J. Vector-valued Hausdorff-Young inequalities and applications. Geometric Aspects of Functional Analysis 1986/1987. Springer-verlag, 1988, 239~249

[32] Bourgain J, Davis W J. Martingale transforms and complex uniform convexity. Trans Amer Math Soc, 1986, 249: 501~515

[33] Bourgin R. Geometrical aspects of convex sets with the RN property. LNM 993, 1983

[34] Brown D R. B-convexity and reflexivity in Banach spaces. Trans Amer Math Soc, 1974, 187: 69~81

[35] Brunel A, Sucheston L. Sur quelques conditions equivalents a la superreflexivite dans les espaces de Banach. C R Acad Sci Paris, 1972, 275: 993~994

[36] Brunel A, Sucheston L. On B-convex Banach spaces. Math Systems Theory, 1974, 7: 294~299

[37] Bu S Q. The analytic Radon-Nikodym property in Banach spaces of mearurable vector-valued functions. Ann Math, 1990, 288: 345~360

[38] Bu S Q. Existence of radial limits of Harmonic functions in Banach spaces. Ann Math, 1991, 12 : 110~118

[39] Bu S Q. A counterexample concerning the analytic Radon-Nikodym property. Ann. Math, 1995, 16B: 15~22

[40] Bu S Q. A new characterization of the analytic Radon-Nikodym property. Proc Amer Math Soc, 2000, 128: 1017~1022

[41] Bu S Q. Quelques remarques sur la propriete de Radon-Nikodym analytique. C R Acad Sci Paris, 1988, 306: 757~760

[42] Bu S Q. Operator-valued Fourier multipliers and maximal regularity for vector-valued boundary problems. Adv Math, 2005, 3417~3442

[43] Buckholtz J D. Sums of power of complex numbers. Notices Amer Math Soc, 1966, 13: 372

[44] Bukhvalov A V. Hardy spaces of vector-valued functions. J Sov Math, 1981, 16: 1051~1059

[45] Bukhvalov A V, Danilevich A A. Boundary properties of analytic and Harmonic functions with values in Banach spaces. Math Notes, 1982, 31: 104~110

[46] Burkholder D L. Martngale transforms. Ann Math Statis, 1966, 37: 1494~1504

[47] Burkholder D L. Distribution function inequalities for martingales. Ann Probab, 1973, 1: 19~42

[48] Burkholder D L. A sharp inequality for martingale transforms. Ann Probab, 1979, 7: 858~863

[49] Burkholder D L. A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional. Ann Probab, 1981, 9: 997~1011

[50] Burkholder D L. Martngale transforms and the geometry of Banach spaces. 1981, LNM 860: 35~50

[51] Burkholder D L. A geometric condition that implies the existence of certain singular integrals of Banish-space-valued functions. Conference on Harmonic Analysis in Honer of Antoni Zygmund (Chicago, 1981), 1983, 270~286

[52] Burkholder D L. Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms. Ann Probab, 1984, 12: 647~702

[53] Burkholder D L. Martingales and Fourier analysis in Banach spaces. 1986, LNM 1206: 61~108

[54] Burkholder D L. Differential subordination of harmonic functions and martingales. 1989, LNM 1384: 1~23

[55] Burkholder D L. An extension of a classical martingale inequality. Probability Theory and Harmonic Analysis. New York, 1986, 21~30

[56] Burkholder D L. Explorations in martingale theory and its applications. 1989, LNM 1464: 2~66

[57] Calderon A P, Zygmund A. On the existence of certain singular integrals. Acta Math, 1952, 88: 85~139

[58] Chacon R V, Sucheston L. On convergence of vector-valued asymptotic martingales.

Z Wahr Verw Gebiete, 1975, 33: 55~59

[59] Chao J A, Long R L. Martingale transforms with unbounded multiplies. Proc Amer Math Soc, 1992, 114: 831~838

[60] Chao J A, Long R L. Martingale transforms and Hardy spaces. Probab. Theory Relat Field, 1992, 91: 399~404

[61] Chatterji S D. Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces. Math Scand, 1968, 22: 21~41

[62] Chobanyan S A, Tarieladze V I. A counterexample concerning the CLT in Banach spaces. 1978, LNM 656: 25~30

[63] Choi K P. Some sharp inequalities for martingale transforms. Trans Amer Math Soc, 1988, 307: 279~300

[64] Chow Y S. A martingale inequality and the law of large numbers. Proc Amer Math Soc, 1960, 11: 107~111

[65] Clarkson J A. Uniformly convex spaces. Trans Amer Math Soc 1936, 40: 396~414

[66] Cobos F. Duality, UMD-property and Lorentz-Marcinkiewicz operator spaces. 16 coloquio Brasileiro de Matematica, Rio de Janeiro, 1988, 97~106

[67] Cobos F. Some spaces in which martingale difference sequence are unconditional. Bull Polish Acad Sci Math, 1986, 34: 695~703

[68] Danilevich A A. Some Boundary properties of abstract analytic functions and their applications. Math USSR Sb, 1976, 29: 453~474

[69] Davis B. On the integrability of the martingales square function. Israel J Math, 1970, 8: 187~190

[70] Davis B. On the weak type (1,1) inequality for conjugate functions. Proc Amer Math Soc, 1974, 44: 307~311

[71] Davis W J. Moduli of complex convexity. Geometry of Banach spaces. Proc conference held in Stroble, Austria, 1989, 65~70

[72] Davis W J, Garling D J H, Tomczak-Jaegermann N. The complex convexity of quasinormed linear spaces. J Func Anal, 1984, 55: 110~150

[73] Davis W J, Milman V D, Tomczak-Jaegermann N. The distance between certain n-dimensional Banach spaces. Israel J Math, 1981, 39: 1~15

[74] Davis W J, Phelps R R, The Radon-Nikodym property and dentable sets in Banach spaces. Proc Amer Math Soc, 1974, 45: 119~122

[75] Dellacherie C, Meyer P A. Probabilities et Potentiels (A), (B), (C). Hermann, Paris, 1975

[76] Diestel J. An introduction to the theory of obsolutely p-summing operators between Banach spaces. Proc centre math anal, Australian National Univ, 1985, 9: 1~26

[77] Diestel J. Geometry of Banach spaces. 1975, LNM 485

[78] Diestel J, Uhl J J. Vector measures. Math. Surveys no.15, Amer Math Soc, Providence, 1977

[79] Diestel J, Uhl J J. Progress in vector measures 1977-1983. 1983, LNM 1033: 144~192
[80] Dilworth S J. Complex convexity and the geometry of Banash spaces. Math Proc Camb Phil Soc, 1986, 99: 495~906
[81] Doob J L. Stochastic Processes. New York: Wiley, 1953
[82] Dowling P N. Representable operator and the analytic Radon-Nikodym property in Banach spaces. Proc R Ir Acad, 1985, 85: 143~150
[83] Dowling P N. The analytic Radon-Nikodym property in Lebesque Bochner function spaces. Proc Amer Math Soc, 1987, 99: 119~122
[84] Dowling P N. Duality in some vector valued function spaces. Ricky Mountain J Math, 1992, 22: 511~518
[85] Dowling P N. Extentions of the maximum principle for vector-valued analytic and harmonic functions. J Math Anal Appl, 1995, 190: 599~604
[86] Dowling P N, Edgar G A. Some characterizations of the analytic Radon-Nikodym property in Banach spaces. J Fnuc Anal, 1988, 80: 349~357
[87] Duren P L. Theory of H^p Spaces. New York: Academic Press, 1970
[88] Durrett R. Brownian Motion and Martingales in Analysis. Wadsworth Inc. 1984
[89] Edgar G A. Estremal integral representations. J Func Anal, 1976, 23: 145~161
[90] Edgar G A. On the Radon-Nikodym property and martingale convergence. 1978, LNM 645: 62~76
[91] Edgar G A. Complex martingale convergence. 1985, LNM 1116: 38~59
[92] Edgar G A. Analytic martingale convergence. J Func Anal, 1986, 69: 268~280
[93] Enflo P. Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm. Israel J Math, 1972, 13: 281~288
[94] Fernandez D L. Vector-valued singular integral operators on L^p-spaces with mixed norms and applications. Pacific J Math, 1987, 129: 257~275
[95] Figiel T. On the moduli of convexity and smoothness. Studia Math, 1976, 56: 121~155
[96] Gamelin T W. Uniform algebras and Jensen measures. Math Surveys. Camb. Univ., 1978
[97] Garling D J H. Brownian motion and UMD-spaces. Conf on Probab. and Banach spaces. Zaragoza 1985, 1986, LNM 1221: 36~49
[98] Garling D J H. On martingales with values in a complex Banach space. Math Proc Camb Phil Soc, 1988, 104: 399~406
[99] Garsia A. Martingale Inequalities. Sem Notes on Recent Progress. Benjamin, 1973
[100] Ghoussoub N, Lindenstrauss J, Maurey B. Analytic martingales and plurisubharmonic barriers in complex Banach spaces. Contemporary Math, 1989, 85: 110~130
[101] Ghoussoub N, Maurey B. Plurisubharmonic martingales and barriers in complex quasinormed spaces. Ann Inst Fourier, 1989, 39: 1007~1060
[102] Ghoussoub N, Maurey B, Schachermayer W. Pluriharmonically dentable complex Banach spaces. J fur die reine und angewandte mathmatik, 1989, 39: 76~127

[103] Globevnic J. On complex strict and uniform convexity. Proc Amer Math Soc, 1975, 47: 175~178

[104] Gine E, Zinn J. Central limit theorems and weak laws of large numbers in certain Banach spaces. Z Wahr Verw Gebiete, 1983, 62: 323~354

[105] Goodman V, Kuelbs J. Rates of convergence for the functional LIL. Ann Probab, 1989, 17: 301~316

[106] Goodman V, Kuelbs J, Zinn J. Some results on the LIL in Banach space with applications to weighted empirical processes. Ann Probab, 1981, 9: 713~752

[107] Gordon Y. Some inequalities for Gaussisn processes and applications. Israel J Math, 1985, 50: 265~289

[108] Gundy R F. A decomposition for L′-bounded martingales. Ann Math statis, 1968, 39: 134~138

[109] Gundy R F. On the class LlogL, martingales, and singular integrals. Studia Math, 1969, 33: 109~118

[110] Gundy R F. Some martingale inequalities with applications to harmonic analysis. J Func Anal, 1989, 87: 212~230

[111] Heinkel B. On the law of large numbers in 2 uniformly smooth Banach spaces, Ann Probab, 1984, 12: 851~857

[112] Hensgen W. Some remarks on boundary values of vector-valued harmonic and analytic functions. Arch Math, 1991, 57: 89~96

[113] Herz C S. Bounded mean oscillation and regulated martingales. Trans Amer Math Soc, 1974, 193: 199~215

[114] Hoffmann-Jorgensen J. Sums of independent Banach space valued random variables. Studia Math, 1971, 52: 159~186

[115] Hoffmann-Jorgensen J. Probability and geometry of Banach spaces. 1982, LNM 948: 164~229

[116] Hoffmann-Jorgensen J, Pisier G. The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces. Ann Probab, 1976, 4: 587~599

[117] Hou Y L, Liu P D. Complex measure martingales under $b_p^+(K)$-condition. Acta Math Sinica, 1997, 40A: 235~245

[118] Hou Y L, Liu P D. Complex measure martingale space and its dual. Acta Math Sinica, 1997, 40A: 481~492

[119] Hou Y L, Liu P D. Two geometrical properties of vector-valued Musielak-Orlicz spaces. Acta Anal Func Appl, 1999, 1: 11~15

[120] Hu D H. Stochastic Process Theory. Wuhan Univ., 2000

[121] Huff R E. Dentability and the Radon-Nikodym property. Duke Math J, 1974, 41: 111~114

[122] Huff R E, Morris P D. Geometric characterzations of the Radon-Nikodym property in Banach spaces. Studia Math, 1976, 56: 157~164

[123] Ito K, Nisio M. On the convergence of sums of independent Banach-spaces-valued random variables. Osaka J Math, 1968, 5: 25~48

[124] Jain N C. Central limit theorem in a Banach spaces. 1976, LNM 526: 113~130

[125] James R C. Superreflexive Banach spaces. Can J Math, 1972, 24: 896~904

[126] James R C. Nonreflexive spaces of type 2. Israel J Math, 1978, 30: 1~13

[127] Johnson W B, Schechtman G. Embedding l_p^m into l_1^n. Acta Math, 1982, 149: 71~85

[128] Kadec V M. On complex uniform convexity of the Lebesque-Bochner spaces. Teor. Funktsii Funktsional Anal, 1983, 40: 71~74

[129] Kahane J P. Some Random Series of Functions. Lenington, 1968

[130] Kalton N J. Differentiability properties of vector-valued functions. 1985, LNM 1221: 141~181

[131] Kalton N J. Plurisubharmonic functions on quasi-Banach spaces. Stadia Math, 1986, 184: 297~324

[132] Kothe G. Topological Vector Spaces I. Splinger-Verlag, 1969

[133] Konig H. Vector-valued multplier theorems. Publications mathematique de l'universite Paris VII, 1988, 131~140

[134] Kuelbs J. The law of the iterated logarithm and related strong convergence theorems for Banach space valued random variables. 1976, LNM 539: 225~314

[135] Kuelbs J. Kolmogorov's law of the iterated logarithm for Banach-space-valued random variablies. Illinois J Math, 1977, 21: 784~800

[136] Kuelbs J, Zinn J. Some results on LIL behavior. Ann Probab, 1983, 11: 506~557

[137] Kunen K, Rosenthal H. Martingale proofs of some geometrical results in Banach space theory. Pacific J Math, 1982, 100: 153~175

[138] Kuo T. On conjugate Banach spaces with Radon-Nikodym property. Pacific J Math, 1975, 59: 197~503

[139] Kwapien S. Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients. Studia Math, 1972, 44: 583~595

[140] LeCam L. Convergence in distribution of stochastic processes. Univ Calif Publ Statist, 1957, 2: 207~236

[141] Ledoux M. La Ioi du logarithem itere pour les variables pregaussiennes a valeurs dans les espaces Banach a norme reguliere. 1982, LNM 920: 609~622

[142] Ledoux M, Talagrand M. Characterizatoin of the law of the iterated logarithm in Banach spaces. Ann Probab, 1988, 16: 1242~1264

[143] Ledoux M, Talagrand M. Probability in Banach Spaces. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1991

[144] Lindenstrauss J, Pelczynski A. Absolutely summing operators in Lp spaces and their applications. Studia Math, 1968, 29: 275~326

[145] Lindenstrauss J, Tzafriri L. Classical Banach Spaces II. Function Spaces. New York: Springer, 1979

[146] Liu P D. UMD spaces and the laws of large numbers of Banach-space-valued martingales. Bull Science, 1989, 34: 401~404
[147] Liu P D. On the spaces in which martingale difference sequences are unconditional, J. Sys. Sci. & Math. Sci., 1989(9): 251~259
[148] Liu P D. An isomorphic characterization of Hilbert space. Adv Math, 1989, 18: 219~225
[149] Liu P D. Martingale inequalities and convexity and smoothness of Banach spaces. Acta Math Sinica, 1989, 32: 765~775
[150] Liu P D. The Φ-inequalities of B-valued regular martingales and the geometrical properties of Banach spaces. Adv. Math., 1990(19): 357~365
[151] Liu P D. Martingale spaces and the geometrical properties of Banach spaces. Science in China, 1991, 34: 513~527
[152] Liu P D. Fefferman's inequalities and the dual of ${}_aH_p(X)$. Ann Math, 1991, 12A: 356~364
[153] Liu P D. An isomorphic characterizations of Hilbert spaces by differential subordination of martingales. Acta Math Sinica, 1992, 35: 387~395
[154] Liu P D, Bekjan T N. Complex convexity and the inequalities of Hardy martingales. Acta Math Sinica, 1997, 40: 133~143
[155] Liu P D, Bekjan T N, Tylli H O. The biplurisubharmonic and biplurisuperharmonic characterizations of AUMD spaces. Proc ICM (Wuhan 2003), FST, Resaerch Information Ltd UK 2004, 140~150
[156] Liu P D, Hou Y L. Transforms, differential subordinations and Ap-weighted inequalities of Banach-space-valued regular martingales. Acta Math Scientia , 1992, 12: 22~32
[157] Liu P D, Hou Y L. Atomic decompositions of Banach-space-valued martingales, Science in China, 1999, 42: 38~47
[158] Liu P D, Long R L. Boundness of several operators on martingale spaces and geometrical properties of Banach spaces. Ann Math, 1992, 13B: 167~179
[159] Liu P D, Saksman E, Tylli H-O, Boundedness of the q-mean-square operator on vector-valued analytic martingales. Can Math Bull, 1999, 42: 221~230
[160] Liu P D, Yu L. Atom decompositions and small index spaces of Banach-space-valued martingales. Science in China, 2001, 44: 1361~1372
[161] Long R L. Martingale Spaces and Inequalities. Peking University, 1993
[162] Long R L, Liu P D. Real interpolation of Banach-space-valued regular martingale spaces. Ann Math, 1993, 14A: 152~158
[163] Maurey B. Systeme de Hear. Sem Maurey-Schwartz 1974-1975, Ecole Poly Paris, 1975
[164] Maurey B. Type et cotype dans les espaces munis de structure locale inconditionnelle. Sem Maurey-Schwartz 1973-1974, Ecole Poly Paris, 1974
[165] Maurey B, Pisier G. Series de variables aleatoires vectorielles independantes et proprietes geometriques des espaces de Banach. Studia Math, 1976, 58: 45~90

[166] McConnell T R. On Fourier multiplier transformations of Banach-valued functions. Trans Amer Math Soc, 1984, 285: 739~757

[167] Mei T, Liu P D. On the maximal inequalities for martingales involving two functions. Proc Amer Math Soc, 2002, 130: 883~892

[168] Mei T, Liu P D. Double Φ-function inequality for nonnegative submartingales. Ann Math, 2000, 21B: 211~216.

[169] Milman V D, Schechtman G. Asympototic theory of finite dimersional normed spaces. 1986, LNM 1200

[170] Namioka I, Phelps R R. Banach spaces which are Asplund spaces. Duke Math J, 1975, 42: 735~750

[171] Pelczynski A. Structurac theory of Banach spaces and its interplay with analysis and probability. Proc ICM (Warsaw, 1983), PWN, Warsaw 1984, 237~269

[172] Pelczynski A. On unconditional bases and Rademacher averages. 1975, LNM 472: 119~129

[173] Phelps R R. Dentability and extreme point in Banach spaces. J Func Anal, 1974, 17: 78~90

[174] Piasecki M. A geometrical charectrization of AUMD Banach spaces via subharmonic functions. Demonstratio Math, 1997, 30: 641~654

[175] Piestch A. Operator Ideals. North-Holand, Amsterdam, 1980

[176] Pisier G. Martingales with values in uniformly comvex spaces. Israel J Math, 1975, 20: 326~350

[177] Pisier G. Un exemple concernant la superreflexitive. Sem Maurey-Schwartz 1974-1975, E' cole Poly, Paris, 1975

[178] Pisier G. Sur les espaces de Banach qui ne contiennent pas uniforment de l_n^1. C R Acad Sci Paris, 1983, 277: 991~994

[179] Pisier G. Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces. 1986, LNM 1206: 167~241

[180] Pisier G. Factorization of operator valued analytic functions, Adv Math, 1992, 93: 61~125

[181] Pisier G. Une propriete du type p-stable. Sem Manrey-Schwartz, 1973, 74

[182] Pisier G. On the duality between type and cotype. 1981, LNM 939: 131~144

[183] Pisier G. Sur les espaces de Banach K-convexes. Sem d'Analyse functionnelle, 11. Ecole Poly, 1979~1980

[184] Pisier G. Le theoreme limite centrale et la lei du Logarithme iteree dans les spaces de Banach. Sem. Maurey-Schwartz, 1975, 76

[185] Pisier G. On the dimension of the l_p^n-subspaces of Banach spaces, for $1<p<2$. Trans Amer Math Soc, 1983, 276: 201~211

[186] Pisier G, Xu Q H. The Strong p-variation of martingales and orthogonal series. Probab Theory Relat Fields, 1988, 77: 497~514

[187] Ren C D. On the reflexive Orlicz space and Lions J L lemma. Bull Science, 1986, 31: 1516~1517

[188] Ricker W J. Characterization of Poisson integrals of vector-valued functions and measures on the unit circle. Hokkaido Math J, 1987, 16: 29~42

[189] Riddle L H, Uhi J J. Martingales and the fine line between Asplund spaces and spaces not containing a copy of l_1. 1981, LNM 939: 145~156

[190] Rosinski J. Remarks on Banach spaces of stable type. Probab and Math Statist, 1980, 1: 67~71

[191] Rosinski J. Central limite theorems for independent random vectors in Banach spaces. 1981, LNM 939: 157~180

[192] Rubio de Francia J L. Martingale and integral transforms of Banach space valued functions. 1986, LNM 1221: 195~222

[193] Rubio de Francia J L. Fourier series and Hilbert transforms with values in UMD Banach spaces. Studia Math, 1985, 81: 95~105

[194] Rubio de Francia J L, Ruiz F J, Torrea J L. Calderon-Zygmund theory for operator-valued Kernels. Adv Math, 1986, 62: 7~48

[195] Schechtman G. Fine embedding of finite dimensional subspaces of Lp, $1 \leqslant p < 2$, into l_p^m. Proc Amer Math Soc, 1985, 94: 617~623

[196] Schwartz L. Geometry and Probability in Banach Spaces. 1981, LNM 852

[197] Stegall C. The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces, II. Trans Amer Math Soc, 1981, 264: 507~519

[198] Stein E M. Singular Integrals and Differentiability Properties. Princeton Univ, 1970

[199] Szarek S J. On the best constants in the Khinchin inequality. Studia Math, 1976, 58: 197~208

[200] Talagrand M. Isoperimetry and integrability of the sum of independent Banach space valued random variables. Ann Probab, 1989, 17: 1546~1570

[201] Thorp E, Whitley R. The strong maximum modulus theorem for analytic functions into a Banach spaces. Proc Amer Math Soc, 1967, 18: 640~646

[202] von Neumann J. On rings of operators, reduction theory. Ann Math, 1949,50: 401~485

[203] Wang X C, Wu Z Q. Probability in Banach Spaces. Jilin Univ, 1990

[204] Wang Z K. Stochastic Process Theory. Science Press, 1965

[205] Wei W Z, Liu P D. Martingale characterizations of the PL-uniform convexity for complex Banach spaces. Sci Bull, 1997, 42: 234~237

[206] Weisz F. Martingale Hardy Spaces and its Applications in Fourier Analysis. 1994, LNM 1568

[207] William B J, Lindenstrauss J. Handbook of the geometry of Banach spaces I, 2001; II, 2004

[208] Woyczynski W A. On Marcinkiewicz-Zygmund laws of large numbers in Banach spaces and related rates of convergence. Probab Math Statis, 1980,1

[209] Woyczynski W A. Geometry and Martingales in Banach Spaces. 1975, LNM 472: 235~275

[210] Woyczynski W A. Geometry and martingales in Banach spaces, part II. Adv Probab, 1978, 4: 267~517

[211] Woyczynski W A. Asymptotic behavior of martingales in Banach spaces II. 1981, LNM 939: 216~225

[212] Woyczynski W A. Tail probabilities of sums of random vectors in Banach spaces, and related mixed norms. 1980, LNM 794: 455~489

[213] Wu C X, Wang T F, Chen S T, Wang Y W. Geometrical Theory of Orlicz Spaces. Harbin Tech Univ, 1986

[214] Xu Q H. Inegalites pour les martingales de Hardy et renormage des espaces quasi-normes. C R Acad Paris, 1988, 306: 601~604

[215] Xu Q H. Convexite uniforme et inegalites de martingales. Math Ann 1990, 287: 193~211

[216] Xu Q H. Littlewood-Paley theory for functions with values in uniformly convex spaces. J reine angew Math, 1998, 504: 195~226

[217] Yan J A. Martingale and Stochastic Integral. Shanghai Sci Tech, 1981

[218] Yu L. Extension of Fefferman's duality theorem for B-valued martingale Hardy spaces. Proc ICM (Wuhan 2003), FST, Resaerch Information Ltd UK 2004, 318~330

[219] Yu L. Duals of Banach-space-valued martingale Hardy spaces. Kyungpook Math. J, 2001, 41: 259~275

[220] Yu L, Liu P D. Vector-valued Lipschitz martingale spaces ${}_p\lambda^\beta(X)$ and ${}_p\Lambda^\beta(X)$, Acta Math Sinica. 2001, 44A: 59~68

[221] Yu X T. Geometry of Banach Spaces. Eastern China Normal Univ, 1986

[222] Zimmermann F. On vector-valued Fourier multiplier theorems. Studia Math, 1989, 93: 201~222

[223] Zinn J. Inequalities in Banach Spaces with Applications to Probablistic Limit Theorems-a Survey. LNM 860, 1981, 324~329

[224] Zuo H L, Liu P D. The minimal operator and weighted inequalities for martingales. Acta Math Scientia, 2006, 26: 37~40

[225] Zygmund A. Trigonometric Series I, II. Camb, London, 1959

符 号 表

(Ω, Σ, μ)	测度空间
$\|F\|(\Omega)$	测度 F 的全变差
$F \ll \mu$	测度 F 关于μ绝对连续
$\sigma(\Gamma), \sigma(f), \sigma(f_\lambda : \lambda \in \Lambda)$	由集合族, 函数 f 或函数族生成的σ代数
$E(f\|B)$	条件期望
$L_p(\mu, X)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$	Bochner 可积函数空间(X 值 p 方可积函数全体)
$L_p(\mu, X)(0 \leqslant p < 1)$	X 值 p 方可积函数空间
$L_\Phi(\mu, X)$	由 Φ 生成的 X 值 Orlicz 函数空间
$\|\cdot\|_\Phi, N_\Phi(f)$	Luxemberg 范数, Orlicz 范数
$\{B_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$	递增 σ 代数网
$(f_n, B_n, n \geqslant 1)$, $(f_\lambda, B_\lambda, \lambda \in \Lambda)$	离散鞅, 半序鞅
$\mathrm{d}F/\mathrm{d}\mu$	Radon-Nikodym 导数
τ, T	停时, 有界停时全体
$A \subset B$ a.e.	A 几乎包含于 B
Ave (F)	测度 F 的平均值域
$\mathrm{co}E, \overline{\mathrm{co}}E$	集合 E 的凸壳, 闭凸壳
diam E	E 的直径
s-co(K)	集合 E 的 s 凸壳
c-co(K)	集合 E 的 c 凸壳
ex$K$、exp K、str exp K	集合 K 的端点、暴露点、强暴露点全体
se K	集合 K 的暴露泛函全体
dent E	凸集 E 的凹点集
supp K	集合 K 的支撑泛函全体
$S(K, x*, \alpha)$	集合 K 的切片
$\overline{\mathrm{co}}^{w*}K$	集合 K 的 w^* 闭包
dens D	集合 D 的稠密特征
$\partial\varphi(x)$	凸函数 φ 的梯度
R-p, $T_p(X)$	Rademacher p- 型, 型常数
R-q, $C_q(X)$	Rademacher q- 余型, 余型常数
$f \sim g$	f 是 g 的 copy

$d_n \sim d$	独立同分布随机变量 (i.i.d)
$l_p(X)$	X 值 l_p 序列空间
$c_0(X)$	收敛于 0 的 X 值序列空间
$c_r(X)$	X值收敛随机序列空间
$B_r(X)$	X值随机有界序列空间
$\{Y_n\} \succ d$	$\{Y_n\}$ 尾概率一致有界
$\varphi_\xi(x^*)$	随机变量 ξ 的特征泛函
$r_\xi(x^*, y^*)$	随机变量 ξ 的协方差
$\mu_\lambda \xrightarrow{w} \mu (\mu_\lambda \xrightarrow{\backsim} \mu)$	依分布收敛
BLIL、CLIL	有界重对数律、紧重对数律
H_d、K_d	再生核 Hilbert 空间, 其闭单位球
$C\{S_n/a_n\}$	S_n/a_n的聚点全体
p-Gauss	Gauss p - 型
wL_p、wl_p	弱 L_p 函数空间,弱l_p序列空间
$\\|\cdot\\|_{wL_p}$、$\\|\cdot\\|_{wl_p}$	弱 L_p 和弱 l_p 的拟范数
$\Pi_p(X,Y)$、$\Pi_p(T)$	p 绝对可和算子, 算子范数
$\Sigma(X,Y)$、$\sigma(T)$	Hilbert-Schmidt 算子, 算子范数
$d(E,F)$	空间 E 与 F 的 Banach-Mazur 距离
$\delta_X(\varepsilon)$	空间 X 的凸性模
$\rho_X(\tau)$	空间 X 的光滑模
p_Φ、q_Φ	凸函数 Φ 的上、下指标
f^*	鞅的极大函数
$S^{(p)}(f)$、$\sigma^{(p)}(f)$	均方函数、条件均方函数
$m^{(p)}(f)$、$M^{(p)}(f)$	鞅 f 的下函数, 上函数
$f_p^\#$、$\tilde{f}_p^\#$	平削算子
$W_p(f)$、$\tilde{W}_p(f)$	变差算子
T_γ	鞅变换算子
H_a、${}_pH_a^S$、${}_pH_a^\sigma$、${}_pK_a$、${}_p\mathcal{K}_a$、 ${}_pL_a$、${}_p\mathcal{L}_a$、BMO$_p$、BMO$_p^+$	各类鞅空间
${}_pH_\Phi^s$、${}_pH_\Phi^\sigma$、${}_pK_\Phi$、${}_p\mathcal{K}_\Phi$、${}_pL_\Phi$、${}_p\mathcal{L}_\Phi$	Orlicz 范数各类鞅空间
${}_p\lambda^\beta(X)$、${}_p\Lambda^\beta(X)$	Lipschitz 鞅空间
PH_a、${}_pPH_a^S$	可料控制鞅空间
$L_a(l_p)(X)$	复合空间 (无穷函数序列空间)
A_p、$\hat{A}_p$、S、S^+、S^-	各类权函数

$\varphi^*(t)$	φ 的非增重排函数
$K(t,x)$	K 泛函
L_{ra}	Lorentz 函数空间
H_{ra}、${}_pH^s_{ra}$	Lorentz 帙空间
$(X_0,X_1)_{\theta a}$	实内插空间
D、∂D	复平面中的单位圆、圆周
$P_r(t)$	Poisson 核
$G_p(u)$	Littlewood-Paley G - 函数
$S_p(u)$	Luzin 面积积分
$h^a(X)$	调和函数的 Hardy 空间
$u^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$	u 的径向极大函数
$(W_t)_{t\geqslant 0}$	(从 0 点出发的)Brown 运动
$L^p(\partial D,X)$	定义在∂D上 p 方可积函数空间
$\xi(x,y)$	双凸函数
$Hf(t)$、$H^*f(t)$	f的 Hilbert 变换, 极大 Hilbert 变换
V^p_X	p 有界变差测度全体
$\mathrm{PSH}(X)$	X 上重次调和函数全体
$\mathrm{PSH}_1(X)$	X 上重次调和规范 Lipschitz 函数全体
$\hat{A}$	A的重次调和壳
$\hat{d}_A$	$d(x,A)$的重次调和包络
$H^X_p(\varepsilon)$	复凸模
$\wedge$、$\vee$	下端、上端 (格运算)

索 引

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1 数理逻辑基础(上册) 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论(上册) 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础(下册) 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 群构造(上册) 1982.11 张远达 著
9 有限群构造(下册) 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论(上册) 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论(上册) 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论(下册) 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著

29 同调代数 1988.2 周伯壎 著
30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青、段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜、陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉、冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙、吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇、张学莲 著
41 线性偏微分算子引论（下册） 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲、马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬、赵晓华、刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英、李冲、杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先、霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著

63 调和分析及其在偏微分方程中的应用　1999.10　苗长兴　著
64 惯性流形与近似惯性流形　2000.1　戴正德、郭柏灵　著
65 数学规划导论　2000.6　徐增堃　著
66 拓扑空间中的反例　2000.6　汪林、杨富春　编著
67 拓扑空间论　2000.7　高国士　著
68 非经典数理逻辑与近似推理　2000.9　王国俊　著
69 序半群引论　2001.1　谢祥云　著
70 动力系统的定性与分支理论　2001.2　罗定军、张祥、董梅芳　编著
71 随机分析学基础（第二版）　2001.3　黄志远　著
72 非线性动力系统分析引论　2001.9　盛昭瀚、马军海　著
73 高斯过程的样本轨道性质　2001.11　林正炎、陆传荣、张立新　著
74 数组合地图论　2001.11　刘彦佩　著
75 光滑映射的奇点理论　2002.1　李养成　著
76 动力系统的周期解与分支理论　2002.4　韩茂安　著
77 神经动力学模型方法和应用　2002.4　阮炯、顾凡及、蔡志杰　编著
78 同调论——代数拓扑之一　2002.7　沈信耀　著
79 金兹堡-朗道方程　2002.8　郭柏灵等　著
80 排队论基础　2002.10　孙荣恒、李建平　著
81 算子代数上线性映射引论　2002.12　侯晋川、崔建莲　著
82 微分方法中的变分方法　2003.2　陆文端　著
83 周期小波及其应用　2003.3　彭思龙、李登峰、谌秋辉　著
84 集值分析　2003.8　李雷、吴从炘　著
85 数理逻辑引论与归结原理　2003.8　王国俊　著
86 强偏差定理与分析方法　2003.8　刘文　著
87 椭圆与抛物型方程引论　2003.9　伍卓群、尹景学、王春朋　著
88 有限典型群子空间轨道生成的格（第二版）　2003.10　万哲先、霍元极　著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用（第二版）　2004.3　苗长兴　著
90 稳定性和单纯性理论　2004.6　史念东　著
91 发展方程数值计算方法　2004.6　黄明游　编著
92 传染病动力学的数学建模与研究　2004.8　马知恩、周义仓、王稳地、靳 祯　著
93 模李超代数　2004.9　张永正、刘文德　著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1　王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想　2005.3　钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论　2005.3　傅希林、闫宝强、刘衍胜　著

97 代数学中的Frobenius结构 2005.7 汪明义 著
98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 凝固过程动力学与交界面稳定性引论 2006.12 徐鉴君 著
105 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马天 汪宁宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
109 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
110 鞅与Banach空间几何学 2007.6 刘培德 著

(O-2758.0101)



ISBN 978-7-03-019028-4

销售分类建议：高等数学

定 价：62.00 元